This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

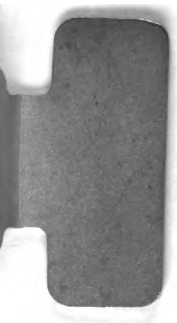
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

UC-NRLF
$B 680 721



LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

17

MONATSHEFTE

FÜR

MATHEMATIK UND PHYSIK.

MIT UNTERSTÜTZUNG DES

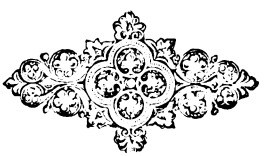
HOHEN K. K. MINISTERIUMS FÜR KULTUS UND UNTERRICHT

HERAUSGEGEBEN VON

G. v. ESCHERICH UND W. WIRTINGER

IN WIEN.

XXV. JAHRGANG.



WIEN, 1914.

VERLAG DES MATH. SEMINARS DER UNIVERSITÄT WIEN

IX. STRUDELHOFGASSE 4.

IM BUCHHANDEL DURCH J. EISENSTEIN & CO. IN WIEN.

LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA
DAVIS

Digitized by Google

Adresse für Manuskripte und Sendungen:

Redaktion der Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien IX., Strudelhofgasse 4.

K. und K. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Digitized by Google

Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von **Ludwig Baumgartner** aus Landshut [1]).

Die vorliegende Arbeit bezweckt eine Übertragung der Untersuchungen über das Unendlichwerden ganzer Funktionen einer komplexen Veränderlichen von endlicher Ordnung im Unendlichen und dessen Zusammenhang sowohl mit dem infinitären Verhalten der Koeffizienten als mit der Verteilung der Nullstellen auf Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

In ihrem Aufbau und der durchweg elementaren Ableitung der Resultate, sowie auch in der Bezeichnung der Begriffe schließt sich die Arbeit ziemlich enge an die „Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung" an, wie sie Herr A. Pringsheim in den Math. Annalen, Bd. 58 (1904) veröffentlicht hat [2]). Daneben wurde eine von Herrn A. Pringsheim im Jahre 1910 über denselben Gegenstand gehaltene Vorlesung benützt, welche noch manche Vereinfachungen brachte, die sich auch bei Betrachtung der Funktionen zweier Veränderlichen als wertvoll erwiesen (insb. im II. Abschnitt).

Da beim Übergang zu Funktionen mehrerer Veränderlichen eine Reihe von Schwierigkeiten entsteht, für welche die Funktionen einer Veränderlichen kein Analogon bieten, konnte natürlich bei weitem nicht die Vollständigkeit erreicht werden, welche die entsprechende Theorie der ganzen Funktionen einer Veränderlichen auszeichnet. Zwar ließ sich bei den Untersuchungen über das Unendlichwerden selbst, sowie über den Zusammenhang des Unendlichwerdens mit dem infinitären Verhalten der Koeffizienten noch die allgemeine ganze Funktion zweier Veränderlicher von endlicher Ordnung zu Grunde legen. Dagegen gelang die Auffindung eines Zusammenhanges zwischen dem Unendlichwerden und der Nullstellen-Verteilung nur für eine sehr spezielle Klasse, die aber immer noch so allgemeiner Natur ist, daß sie jede ganze Funktion einer Veränderlichen liefert, wenn die eine der beiden Veränderlichen festgehalten wird.

---

[1]) Die Literatur über den im folgenden behandelten Gegenstand beschränkt sich, soviel ich weiß, auf eine Arbeit des Herrn Jules Sire in Bd. 31 (1911) der Rendiconti circ. mat. Palermo: „Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini". Doch beruht diese Arbeit im wesentlichen auf anderer Grundlage und verfolgt andere Ziele, hat daher mit der vorliegenden wenig Berührungspunkte. Vgl. übrigens Fußnote 2, p. 45.

[2]) Dort findet sich auch eine Zusammenstellung der wesentlichen Literatur über diesen Gegenstand.

Digitized by Google

Es mag hier ein Auszug aus dem Nachfolgenden Platz finden, der die Hauptresultate im Zusammenhang überblicken läßt:

Zur Charakterisierung des Unendlichwerdens der ganzen Funktion $g(x, y)$ dient das Verhalten der Maxima ihrer absoluten Beträge in Kreisgebieten um den Nullpunkt bei unbegrenzt wachsenden Radien. Diese Maxima erweisen sich als reelle, stetige und monotone Funktionen von $|x|$ und $|y|$ (I. Abschn., § 1). Es zeigt sich dann zunächst, daß das Verhalten einer ganzen rationalen Funktion $g(x, y)$ im Unendlichen sich durch dasjenige einer Summe von Potenzen $|x|^{\alpha} + |y|^{\alpha'}$ charakterisieren läßt, wobei die zulässigen Wertepaare α, α' eine unendliche Menge bilden (§ 2). Genauer wird auf die entsprechenden Verhältnisse eingegangen bei den nun folgenden Untersuchungen der ganzen transzendenten Funktionen $g(x, y)$; zur Abschätzung der für $|x| = r$, $|y| = r'$ mit $\bar{g}(r, r')$ bezeichneten Maxima der absoluten Beträge dient hier die Vergleichung mit Funktionen der Form $e^{r^{\alpha}+r'^{\alpha'}}$, und zwar werden als die im folgenden ausschließlich zu betrachtenden ganzen Funktionen nicht-unendlicher Ordnung diejenigen definiert, welche einer Ungleichung der Form

$$\bar{g}(r, r') < e^{r^{\alpha}+r'^{\alpha'}}$$

genügen, sofern nur $r^2 + r'^2$ eine gewisse positive Zahl übersteigt. Durch möglichste Verkleinerung der Exponenten α, α' ergibt sich das grundlegende Resultat, daß für jede ganze Funktion nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ eine unendliche Menge festbestimmter Wertepaare α, α' existieren derart, daß man für alle positiven δ, δ' hat:

$$\bar{g}(r, r') \begin{cases} < e^{r^{\alpha}+\delta+r'^{\alpha'}+\delta'} & \text{für alle } r, r', \text{ für die } r^2 + r'^2 \text{ hinreichend groß ist,} \\ > e^{r^{\alpha}-\delta+r'^{\alpha'}-\delta'} & \text{für gewisse } r, r' \text{ für die } r^2 + r'^2 \text{ beliebig groß ist.} \end{cases}$$

Die Gesamtheit aller derartigen Wertepaare α, α', die als „Ordnungspaare" bezeichnet werden, definiert eine stetige, monotone Funktion $\alpha' = \varphi(\alpha)$, die „Ordnungsfunktion", geometrisch eine stetige, monotone Kurve, die „Ordnungskurve", welche auch in einen rechten Winkel mit parallel zu den Achsen verlaufenden Schenkeln ausarten kann. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen lassen sich nun drei Spezialtypen trennen, der Maximal-, Normal-, Minimaltypus. Die Tatsache, daß keine zwei Zahlen c, c' existieren, für welche wieder in dem obigen Sinne

$$\bar{g}(r, r') < e^{c r^{\alpha}+c' r'^{\alpha'}}$$

wäre, definiert den Maximaltypus, die Existenz zweier solchen Zahlen dagegen den Normaltypus, wenn keine von ihnen beliebig klein sein kann, andernfalls den Minimaltypus. Im Falle des Normaltypus zeigt sich wieder, daß eine unendliche Menge festbestimmter Wertepaare γ, γ' („Typuspaare") existiert, so daß man

Digitized by Google

für alle positiven $\varepsilon, \varepsilon'$ im obigen Sinne hat:

$$\bar{g}(r, r') \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'}} \\ > e^{(\gamma-\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\varepsilon') r'^{\alpha'}}. \end{cases}$$

Die Gesamtheit der Typuspaare bestimmt wieder eine stetige monotone Funktion $\gamma' = \chi(\gamma)$, die „Typusfunktion" bezw. „Typuskurve" genannt wird (§ 3). Den Schluß dieser Betrachtungen bildet der Nachweis, daß sich die Ordnungsfunktion bei gewissen linearen Transformationen die ganzen Funktionen invariant verhält, bezw. daß die Endlichkeit der Ordnung durch gewisse allgemeinere Transformationen nicht alteriert wird (§ 4).

Der zweite Abschnitt behandelt Zusammenhänge der Koeffizienten der ganzen Funktionen endlicher Ordnung mit dem Verhalten der Funktionen im Unendlichen. Es werden gewisse Doppelfolgen betrachtet, deren Terme abhängen von den absoluten Beträgen der Koeffizienten und ihren Indices, sowie von Zahlen, welche das Unendlichwerden nach oben oder unten hin beschränken (§ 1 bezw. 2), bezw. von Ordnungspaaren oder Ordnungs- und Typenpaaren (§ 3). Über die oberen Limites der einfachen Folgen, welche aus diesen Doppelfolgen durch Ordnung nach allgemeinen Diagonalen entstehen, ergeben sich in voller Analogie mit den Verhältnissen bei Funktionen einer Veränderlichen durchweg umkehrbare, in § 3 zusammengestellte Sätze.

Für den dritten Abschnitt, welcher Beziehungen des Unendlichwerdens der ganzen Funktionen zur Art ihres Verschwindens sucht, müssen die ganzen Funktionen in die Form unendlicher Produkte von sogenannten Primfunktionen gebracht werden. Die allgemeine derartige Darstellung der ganzen Funktionen von zwei Veränderlichen, wie sie Herr H. Hahn gegeben hat, kann hier deswegen nicht zu Grunde gelegt werden, weil sie — vermöge ihrer Allgemeinheit — keine Analoga zum Range und Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen erkennen läßt (§ 1). Es werden daher nur noch Funktionen der spezielleren, im wesentlichen von O. Biermann angegebenen Form betrachtet:

$$G(x, y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} \bar{\gamma}_{\varkappa}(x, y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1 - \gamma_{\varkappa}(x, y)] \, e^{\sum_{\lambda=1}^{p_{\varkappa}} \frac{1}{\lambda} (\gamma_{\varkappa}(x,y))^{\lambda}} \right\},$$

wobei $g(x, y)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion ist, ferner

$$\bar{\gamma}_{\varkappa}(x, y) = c_{10}^{(\varkappa)} x + c_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + c_{r0}^{(\varkappa)} x^r + \cdots + c_{0r}^{(\varkappa)} y^r$$

$$\gamma_{\varkappa}(x, y) = a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktionen $1 - \gamma_{\varkappa}(x, y)$ als verschwindende Bestandteile der Prim-

Digitized by Google

funktionen auftreten können, wird die Beziehung erwiesen:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu,\nu}^{(\varkappa)} = 0 \quad \begin{pmatrix} \mu = 0,\ 1, \ldots s \\ \nu = 0,\ 1, \ldots s \end{pmatrix}.$$

Bleiben die Zahlen $p_\varkappa$ unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) Schranke, so heißen die Funktionen „von endlichem Range“ (§ 2). Von den Funktionen der angeführten Form wird nun wieder eine spezielle Art zur weiteren Betrachtung ausgewählt[1]), die „ganzen Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen“, d. h. die Funktionen der Form:

$$G(x,y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)^\lambda} \right\} \quad (\S\ 3).$$

Für diese wird gezeigt, daß die Endlichkeit des Ranges aus der Endlichkeit der Ordnung folgt, sodann (ganz analog wie bei Funktionen einer Veränderlichen), daß im Gebiete der primitiven Funktionen diejenigen endlichen Ranges und endlicher Ordnung sich vollständig decken (§ 4). Dieses letzte Resultat wird dann noch auf eine etwas allgemeinere Klasse von Funktionen, die sich auf solche mit wesentlich linearen Primfunktionen zurückführen lassen, ausgedehnt (§ 5). Die bisherige Produktdarstellung der betrachteten Funktionen läßt noch nicht das eigentliche Analogon zum Range erkennen. Es zeigt sich, daß die bisher benützten Konvergenzfaktoren nur eine mittlere Stellung unter allgemeineren Formen einnehmen, d. h.: die schließlich nicht mehr verschwindende Funktion $1 - \gamma_\varkappa(x,y)$ läßt sich in der Form $e^{-\Gamma_\varkappa}$ darstellen, $\Gamma_\varkappa$ aber in eine Doppelreihe entwickeln; die Konvergenz wird sodann dadurch herbeigeführt, daß der Exponent des Exponentialfaktors von dieser Doppelreihe einen Teil abtrennt, nämlich in der bisher betrachteten mittleren Form alle Glieder diesseits einer unter 45° verlaufenden Diagonale, in der nunmehr einzuführenden alle Glieder diesseits einer beliebigen (d. h. unter irgend einem Winkel verlaufenden) Diagonale (§ 6, 7). Jede solche Diagonale wird durch drei, wenn sie aber dem Anfangsgliede möglichst nahe liegen soll, durch zwei Zahlen festgelegt. So wird man zu einer unendlichen Menge von Zahlenpaaren geführt, welche das als „Rangsystem“ bezeichnete Analogon zum Range vorstellt. Wie bei Funktionen einer Veränderlichen ergibt sich durch eine entsprechende Verschärfung dieses Begriffes das Analogon zum Grenzexponenten (§ 8). Zum Schlusse werden Beziechnungen dieser beiden Begriffe zum Unendlichwerden der Funktion gesucht; es ergibt sich die zu erwartende Identität des letzteren dieser Begriffe mit der Ordnungsfunktion, wenigstens unter einer bei Funktionen nicht allzu fernliegender Art erfüllten Bedingung (§ 9).

[1]) Der eigentliche Grund für diese Einschränkung tritt erst zu Anfang des § 7 deutlich hervor (siehe dort Fußnote).

Digitized by Google

I. Abschnitt.

Über das Verhalten ganzer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen.

§ 1. Über das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion $g(x,y)$ in einem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$.

$g(x,y)$ bedeutet im folgenden eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion der beiden unabhängigen komplexen Veränderlichen x, y.

Die absoluten Beträge der Funktionswerte $g(x,y)$ in einem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ haben ein Maximum, für welches die folgenden Sätze gelten:

Satz 1. Ist x_0, y_0 Maximalstelle der Funktion $g(x,y)$ im Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$, so ist $|x_0| = r$, $|y_0| = r'$.

Erteilt man nämlich etwa der Veränderlichen x einen festen Wert, so bleibt eine Potenzreihe in y allein übrig, deren absoluter Betrag sein Maximum für den Kreis $|y| \leqq r'$ auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r' hat. Dies gilt auch für $x = x_0$, wobei x_0 derjenige Wert ist, für welchen $g(x,y)$ das Maximum in dem Gebiete der beiden Kreise annimmt; d. h. aber $|y_0| = r'$, wenn y_0 die y-Koordinate dieser Maximalstelle ist.

Das Analoge läßt sich für x_0 beweisen.

Nach diesem Satze ist $\underset{\substack{|x| \leqq r \\ |y| \leqq r'}}{\mathrm{Max}} |g(x,y)|$ mit $\underset{\substack{|x| = r \\ |y| = r'}}{\mathrm{Max}} |g(x,y)|$ gleichbedeutend; es wird im folgenden mit $\bar{g}(r,r')$ bezeichnet. $\bar{g}(r,r')$ ist dann eine reelle, nicht-negative Funktion der reellen nicht-negativen Veränderlichen r, r'.

Satz 2. Die Funktion $\bar{g}(r,r')$ wächst monoton, wenn r und r' monoton wachsen oder doch eine von diesen beiden Größen, während die andere konstant bleibt, und zwar wächst $\bar{g}(r,r')$ ins Unendliche, wenn mindestens eine der Größen r, r' ins Unendliche wächst.

Ist nämlich $r_2 \geqq r_1$, $r_2' \geqq r_1'$, wobei nicht in beiden Relationen zugleich das Gleichheitszeichen gelten soll, so folgt unmittelbar aus der Definition von $\bar{g}$, daß nicht

$$\bar{g}(r_2, r_2') < \bar{g}(r_1, r_1')$$

sein kann; aber auch

$$\bar{g}(r_2, r_2') = \bar{g}(r_1, r_1')$$

Digitized by Google

ist unmöglich, da sonst gegen Satz 1 das Maximum $\underset{\substack{|x|\leqq r_2\\ |y|\leqq r_2'}}{\mathrm{Max}}|g(x,y)$ schon in einem Punkte x, y angenommen würde, für welchen $|x|=r_1$, $|y|=r_1'$ wäre.

Daß $\bar{g}(r,r')$ etwa mit r ins Unendliche wächst, folgt daraus, daß das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion einer Veränderlichen ins Unendliche wächst und

$$\underset{\substack{|x|\leqq r\\ |y|\leqq r'}}{\mathrm{Max}}|g(x,y)|\geqq\underset{|x|\leqq r}{\mathrm{Max}}|(x,y_0)|$$

ist, wenn y_0 einen festen Wert bedeutet, für den $|y_0|\leqq r'$ ist.

Satz 3. Die Funktion $\bar{g}(r,r')$ ist eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen r, r'.

Es handelt sich um den Nachweis folgender vier Ungleichungen:

$$\bar{g}(r,r')-\bar{g}(r-\Delta r, r'-\Delta r')<\varepsilon, \tag{1}$$

$$\bar{g}(r+\Delta r, r'+\Delta r')-\bar{g}(r,r')<\varepsilon, \tag{2}$$

$$|\bar{g}(r+\Delta r, r'-\Delta r')-\bar{g}(r,r')|<\varepsilon, \tag{3}$$

$$|\bar{g}(r-\Delta r, r'+\Delta r')-\bar{g}(r,r')|<\varepsilon \tag{4}$$

nach Annahme von $\varepsilon>0$ etwa für $0<\Delta r<\sigma$, $0<\Delta r'<\sigma$, falls σ so bestimmt wird, daß für alle x, y eines hinreichend großen Kreisgebietes, etwa des Kreisgebietes $|x|\leqq 2r$, $|y|\leqq 2r'$ gilt:

$$|g(x+h, y+k)-g(x,y)|<\varepsilon \text{ für } h\leqq\sigma,\ k\leqq\sigma, \tag{5}$$

was stets möglich ist, da $g(x,y)$ stetig und damit in dem betrachteten Kreisgebiet gleichmäßig stetig ist.

Nachweis der Ungl. (1): $\bar{g}(r,r')$ wird in einem Punkte x_0, y_0 angenommen, es ist also

$$\bar{g}(r,r')=|g(x_0,y_0)|.$$

Nach Ungl. (5) ist

$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon \text{ für } |x-x_0|\leqq\sigma,\ |y-y_0|\leqq\sigma$$

und um so mehr

$$\big||g(x,y)|-|g(x_0,y_0)|\big|<\varepsilon \text{ für } |x-x_0|\leqq\sigma,\ |y-y_0|\leqq\sigma.$$

Da $\Delta r<\sigma$, $\Delta r'<\sigma$ gewählt wird, ragt das Kreisgebiet $x-x_0|\leqq\sigma$, $|y-y_0|\leqq\sigma$ in das Kreisgebiet $|x|\leqq r-\Delta r$, $|y|\leqq r'-\Delta r'$ hinein, so daß gemeinsame Punkte, z. B. x_1, y_1 existieren. Nun hat man einerseits

$$\big||g(x_1,y_1)|-|g(x_0,y_0)|\big|<\varepsilon,$$

Digitized by Google

anderseits

$$|g(x_1, y_1)| < \bar{g}(r - \Delta r,\ r' - \Delta r'),$$

also um so mehr

$$\bar{g}(r, r') - \bar{g}(r - \Delta r,\ r' - \Delta r') < \varepsilon.$$

Ähnlich erfolgt der Nachweis der Ungl. (2).

Zum Nachweis der Ungl. (3) unterscheidet man die Fälle:

$a)$ $\quad \bar{g}(r, r') < \bar{g}(r + \Delta r,\ r' - \Delta r'),$

$b)$ $\quad \bar{g}(r, r') > \bar{g}(r + \Delta r,\ r' - \Delta r')$ [1])

und verfährt ähnlich.

Der Nachweis der Ungl. (4) erfolgt analog demjenigen der Ungl. (3).

§ 2. Einige Sätze über das Verhalten ganzer rationaler Funktionen $g(x,y)$ im Unendlichen.

Satz 4. Ist

$$g(x,y) = a_0^{(0)} + (a_1^{(0)} x + a_0^{(1)} y) + \cdots + (a_s^{(0)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda}^{(\lambda)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots a_0^{(s)} y^s),$$ [2])

so ist

$$|g(x,y)| \begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{s+\delta'} \text{ für alle } |x|^2 + |y|^2 > R_{\delta,\delta'}^2 & (1\,a) \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} \text{ für gewisse beliebig große } |x|^2 + |y|^2. & (1\,b) \end{cases}$$

Beim Beweise von Ungl. (1 a) werden die Fälle unterschieden:

$$a)\ |x| \geqq |y|, \quad b)\ |x| \leqq |y|.$$

$a)$ $\quad |g(x,y)| \leqq |a_0^{(0)}| + |a_1^{(0)} x| +$

$$+ |a_0^{(1)} y| + \cdots |a_s^{(0)} x^s| + \cdots |a_{s-\lambda}^{(\lambda)} x^{s-\lambda} y^\lambda| + \cdots |a_0^{(s)} y^s| =$$

$$= |x|^{s+\delta} \left(\frac{|a_0^{(0)}|}{|x|^{s+\delta}} + \frac{|a_1^{(0)}|}{|x|^{s-1+\delta}} + \frac{|a_0^{(1)}|}{|x|^{s-1+\delta}} \cdot \left|\frac{y}{x}\right| + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{|a_s^{(0)}|}{|x|^\delta} + \cdots \frac{|a_{s-\lambda}^{(\lambda)}|}{|x|^\delta} \cdot \left|\frac{y}{x}\right|^\lambda + \cdots + \frac{|a_0^{(s)}|}{|x|^\delta} \cdot \left|\frac{y}{x}\right|^s \right) < |x|^{s+\delta}$$

für hinreichend große $|x|$, etwa $|x| > R_\delta$ und solche y, für die Bedingung (a) erfüllt ist; damit jedenfalls für alle x, y, für welche

[1]) Im Falle der Gleichheit ist die Richtigkeit der zu beweisenden Ungleichung evident.

[2]) Dabei sollen natürlich nicht alle Koeffizienten in dieser letzten Klammer verschwinden.

Digitized by Google

$|x|^2+|y|^2>2R_\delta^2$ ist und Bedingung (a) zutrifft. Um so mehr ist für diese

$$|g(x,y)|<|x|^{s+\delta}+|y|^{s+\delta'}.$$

Analog findet man im Falle (b)

$|g(x,y)|<|x|^{s+\delta}+|y|^{s+\delta'}$ etwa für $|x|^2+|y|^2>2R_{\delta'}^2$.

Wählt man nun

$$R_{\delta,\delta'}>\begin{cases}R_\delta\,.\sqrt{2}\\ R_{\delta'}\,.\sqrt{2}\end{cases},$$

so ist Ungl. (1 a) in dem behaupteten Umfang erwiesen.

Beweis der Ungl. (1 b):

$$g(x,y)\geqq\big|\,|a_s^{(0)}x^s+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}x^{s-\lambda}y^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}y^s|-$$
$$-|a_0^{(0)}+a_1^{(0)}x+a_0^{(1)}y+\cdots+a_{s-1}^{(0)}x^{s-1}+\cdots+a_0^{(s-1)}y^{s-1}|\big|.$$

Setzt man $y=cx$, so ergibt sich

$$|g(x,y)|\geqq\big|\,|x|^s.|a_s^{(0)}+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}c^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}c^s|-$$
$$-|a_0^{(0)}+x(a_1^{(0)}+a_0^{(1)}c)+\cdots+x^{s-1}(a_{s-1}^{(0)}+\cdots+a_0^{(s-1)}c^{s-1})|\big|.$$

c bestimmt man so, daß $a_s^{(0)}+\cdots+a_{s-\lambda}^{(\lambda)}c^\lambda+\cdots+a_0^{(s)}c^s$ nicht verschwindet, sondern etwa den Wert G hat. Für hinreichend große Werte von $|x|$ gilt dann

$$|g(x,y)|>\frac{G}{2}|x|^s \text{ für gewisse } x,\ y, \tag{2}$$

nämlich solche, für welche $y=cx$ ist.

Anderseits ist aber für $y=cx$ und hinreichend große Werte von $|x|$

$$|x|^{s-\delta}+|y|^{s-\delta'}=|x|^s\left(\frac{1}{|x|^\delta}+\frac{c^{s-\delta'}}{|x|^{\delta'}}\right)<\frac{G}{2}|x|^s. \tag{3}$$

Aus Ungl. (2) und (3) folgt Ungl. (1 b) in dem behaupteten Sinne.

Zusatz 1. Für manche Zwecke erscheint es vorteilhafter, die Ungl. (1 a) durch die folgende nur scheinbar schärfere zu ersetzen, deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet, wenn man in (1 a) δ, δ' durch 2δ, $2\delta'$ ersetzt und dann die Faktoren $|x|^\delta<\varepsilon$, $|y|^{\delta'}<\varepsilon'$ absondert:

$$|g(x,y)|<\varepsilon|x|^{s+\delta}+\varepsilon'|y|^{s+\delta'} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R^2. \tag{4}$$

Digitized by Google

Stellt man sich die Aufgabe, weitere Wertepaare α, α' zu finden, für welche im Sinne des Satzes 4

$$|g(x,y)| \begin{cases} < |x|^{\alpha+\delta} + |y|^{\alpha'+\delta'} \\ > |x|^{\alpha-\delta} + |y|^{\alpha'-\delta'} \end{cases}$$

ist, indem man von dem dort mit s, s' bezeichneten Wertepaar ausgeht, so zeigt sich, daß im allgemeinen eine Verminderung des einen Exponenten s eine Vermehrung des anderen bedingt und umgekehrt. Doch kann auch ein Exponent s ohne Änderung des anderen erniedrigt werden in den beiden folgenden Fällen:

a) Es sind alle $a_{s-\lambda}^{(\lambda)} = 0$ für $\lambda = 1, 2, \ldots s$, nur $a_s^{(0)} \neq 0$;

b) es sind alle $a_{s-\lambda}^{(\lambda)} = 0$ für $\lambda = 0, 1, \ldots s-1$, nur $a_0^{(s)} \neq 0$.

Im Falle *a*) sei $a_k^{(0)} x^k + \cdots + a_0^{(k)} y^k$ die höchste homogone Summe in der Darstellung von $g(x,y)$ (vgl. Satz 4), welche eine Potenz von y mit nicht verschwindendem Koeffizienten enthält; im Falle *b*) sei $a_l^{(0)} x^l + \cdots + a_0^{(l)} y^l$ die höchste homogene Summe, welche eine Potenz von x mit nicht verschwindendem Koeffizienten enthält. Dann gilt:

Zusatz 2. Neben den Ungleichungen des Satzes 4 bestehen die folgenden Ungleichungen in demselben Sinne:

$$\text{Im Falle } a) \; |g(x,y)| \begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{k+\delta'} \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{k-\delta'}, \end{cases}$$

$$\text{im Falle } b) \; |g(x,y)| \begin{cases} < |x|^{l+\delta} + |y|^{s+\delta'} \\ > |x|^{l-\delta} + |y|^{s-\delta'}; \end{cases}$$

in allen übrigen Fällen läßt sich in den Ungleichungen des Satzes 4 keiner der beiden Exponenten s erniedrigen, ohne daß der andere erhöht wird. Der leichte, aber umständliche Beweis dieses weiterhin nicht benützten Satzes wird unterlassen.

Für die einfachsten ganzen rationalen Funktionen $g(x,y)$ lassen sich alle möglichen Wertepaare α, α' berechnen von der Art, daß im bisherigen Sinne ist:

$$|g(x,y)| \begin{cases} < |x|^{\alpha+\delta} + |y|^{\alpha'+\delta'} \\ > |x|^{\alpha-\delta} + |y|^{\alpha'-\delta'}. \end{cases}$$

Beispiele:

$g(x,y) = x + y$ ergibt als Wertepaare α, α' alle diejenigen, welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha = 1, \; \infty > \alpha' \geqq 1 \text{ oder } \infty > \alpha \geqq 1, \; \alpha' = 1;$$

geometrisch ausgedrückt: alle Wertepaare, die den Punkten eines rechten Winkels mit dem Scheitel (1, 1) entsprechen, dessen Schenkel den Achsen parallel laufen.

Digitized by Google

$g(x, y) = xy$ ergibt als Wertepaare α, α' alle diejenigen, welche der Gleichung $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ oder $\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' - 1}$ genügen; geometrisch: alle Wertepaare, die den Punkten eines Astes einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Scheitel (2, 2) entsprechen.

$g(x, y) = x^2 + y$ ergibt als Wertepaare α, α' alle, die den Bedingungen genügen:

$$\alpha = 2,\ \infty > \alpha' \geqq 1 \text{ oder } \infty > \alpha \geqq 2,\ \alpha' = 1;$$

geometrisch: alle Wertepaare, die den Punkten eines den Achsen parallelen rechten Winkels mit dem Scheitel (2, 1) entsprechen.

Das erste und zweite Beispiel bestätigen Satz 4, das dritte den Zusatz 2.

Zwecks späterer Anwendung soll hier noch der Satz bewiesen werden:

Satz 5. Bedeutet $g(x, y)$ wieder dieselbe Funktion wie im Satze 4 und $\Re\big(g(x,y)\big)$ den reellen Teil von $g(x, y)$, so hat man

$$\Re\big(g(x,y)\big)\begin{cases} < |x|^{s+\delta} + |y|^{s+\delta'} \text{ für alle } |x|^2 + |y|^2 > R^2_{\delta,\delta'} \\ > |x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} \text{ für gewisse beliebig große } |x|^2 + |y|^2 \end{cases}.$$

Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus der ersten Ungleichung des Satzes 4, da

$$\Re\big(g(x,y)\big) \leqq |g(x,y)|$$

ist.

Die zweite Ungleichung läßt sich für alle Wertsysteme x, y nachweisen, bei welchen etwa die x-Koordinate auf gewissen Strahlen durch den Nullpunkt liegt, während die y-Koordinate der jeweilige Bildpunkt der x-Koordinate ist, der durch eine Substitution $y = cx$ geliefert wird.

Für $y = cx$ wird nämlich

$$g(x,y) = x\left[(a_s^{(0)} + a_{s-1}^{(1)} c + \cdots + a_0^{(s)} c^s) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{a_0^{(0)}}{x^s} + \frac{a_1^{(0)}}{x^{s-1}} + \frac{a_0^{(1)} c}{x^{s-1}} + \cdots + \frac{a_0^{(s-1)} c^{s-1}}{x}\right)\right]$$

c wird so bestimmt, daß $a_s^{(0)} + a_{s-1}^{(1)} c + \cdots + a_0^{(s)} c^s$ einen von Null verschiedenen Wert, etwa A annimmt.

Dann ist

$$g(x,y) = x^s A\big(1 + f(x)\big),$$

wobei

$$|f(x)| = \frac{1}{|A|} \cdot \left|\frac{a_0^{(0)}}{x^s} + \frac{a_1^{(0)}}{x^{s-1}} + \frac{a_0^{(1)} c}{x^{s-1}} + \cdots + \frac{a_0^{(s-1)} c^{s-1}}{x}\right| < \varepsilon \text{ für } |x| > R.$$

Digitized by Google

Setzt man

$$x = |x| \,.\, e^{\varphi i},\quad A = |A| \,.\, e^{\psi i},$$

so ist

$$g(x, y) = |x|^s |A| e^{(s\varphi+\psi)i}\left(1 + f(x)\right)$$

oder, wenn man φ so wählt, daß $s\varphi + \psi = 2k\pi$ ist,

$$g(x, y) = |x|^s |A| \left(1 + f(x)\right);$$

folglich

$$\Re\left(g(x, y)\right) = |x|^s |A| \left(1 + \Re\left(f(x)\right)\right) \quad \text{oder}$$

$$\Re\left(g(x, y)\right) > |x|^s |A| (1 - \varepsilon) \quad \text{für } |x| > R, \tag{5}$$

da

$$\Re\left(f(x)\right) \leqq |f(x)| < \varepsilon \text{ für } |x| > R.$$

Anderseits ergibt sich wie am Schlusse des Beweises von Satz 4:

$$x|^{s-\delta} + |y|^{s-\delta'} < |x|^s |A| (1 - \varepsilon) \text{ für } |x| > R',\ y = cx. \tag{6}$$

Aus Ungl. (5) und (6) folgt die behauptete Ungleichung.

§ 3. Das Verhalten ganzer transzendenter Funktionen $g(x, y)$ im Unendlichen; Ordnungsfunktion und Typusfunktion.

Während der absolute Betrag einer ganzen rationalen Funktion von zwei Veränderlichen x, y nach Satz 4 nicht stärker ins Unendliche wächst als eine Summe von Potenzen von $|x|$ und $|y|$, ergibt sich für ganze transzendente Funktionen:

Satz 6. Der absolute Betrag einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ wächst stärker ins Unendliche als jede Summe zweier Potenzen von $|x|$ und $|y|$.

Wenn nämlich $g(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion ist, so ist, falls x_0, y_0 beliebig fixiert werden, nur nicht so, daß $g(x, y_0)$ bezw. $g(x_0, y)$ identisch verschwindet, mindestens eine dieser beiden Funktionen eine ganze transzendente Funktion von x bezw. y allein. Es sei etwa das erstere der Fall, und es werde $|y_0| = r_0'$ gesetzt. Gäbe es nun zwei Zahlen a, a', so daß man von einem gewissen Werte von $r^2 + r'^2$ an hätte

$$\bar{g}(r, r') < r^a + r'^{a'},$$

so wäre

$$\bar{g}(r, r_0') < r^a + r_0'^{a'} < r^b \text{ für } b > a \text{ und hinreichend großes } r.$$

Digitized by Google

Anderseits wird aber

$$\bar{g}(r, r_0') = \underset{\substack{|x|=r \\ |y|=r_0'}}{\text{Max}} |g(x, y)| \geqq^{1)} \underset{|x|=r}{\text{Max}} |g(x, y_0)| > r^b$$

für jedes b, da das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen transzendenten Funktion einer Veränderlichen stärker als jede Potenz ins Unendliche wächst.

Bei Betrachtung des Unendlichwerdens von ganzen transzendenten Funktionen $g(x, y)$ wählt man daher als Vergleichsfunktionen zweckmäßig Funktionen der Form

$$e^{r^a + r'^{a'}}.$$

Definition: Eine ganze transzendente Funktion $g(x, y)$ heißt von nicht-unendlicher Ordnung, wenn zwei positive Zahlen a, a' existieren, so daß man hat

$$\bar{g}(r, r') < e^{r^a + r'^{a'}} \text{ für } r^2 + r'^2 > A^2 \text{ (endliche Zahl).} \qquad (1)$$

Diejenigen Funktionen, für welche Ungl. (1) gilt, wie klein auch a oder a' bezw. a und a' zugleich gewählt werden, gehören der Ordnung Null an.[2]) Wir beschäftigen uns hier ausschließlich mit Funktionen nicht-unendlicher Ordnung; wird dabei ausdrücklich von Funktionen endlicher Ordnung gesprochen, so soll die Ordnung Null ausgeschlossen sein.

Satz 7. Ist $g(x, y)$ eine ganze transzendente Funktion von nicht-unendlicher Ordnung, also

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^a + r'^{a'} \text{ für } r^2 + r'^2 > A^2, \qquad (2)$$

so gibt es eine bestimmte Zahl α von der Art, daß man für jedes positive δ hat

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{a+\delta} + r'^{a'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R_\delta^2 \\ > r^{a-\delta} + r'^{a'} \text{ für gewisse beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Ebenso gibt es eine bestimmte Zahl α', so daß im analogen Sinne gilt

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^a + r'^{a'+\delta'} \\ > r^a + r'^{a'-\delta'}. \end{cases}$$

Der Beweis, der etwa für die Ungl. (3) geführt wird, verläuft ganz analog dem entsprechenden bei Funktionen einer Veränderlichen.

---

[1]) Im allgemeinen gilt das Zeichen $>$, y_0 braucht ja nicht gerade die y-Koordinate desjenigen Punktes x, y zu sein, in welchem das Maximum für das Gebiet beider Kreise $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ angenommen wird.

[2]) Z. B. $e^x + y$, $x \cdot e^y$; hieher gehören eigentlich auch die ganzen rationalen Funktionen.

Digitized by Google

Man betrachtet zunächst die Verhältnisse für alle r, r', für die $r^2 + r'^2 > R_1^2$ ist, wo $R_1 > A$ ist. Der Exponent a der Ungl. (2) läßt sich eventuell erniedrigen; schließlich findet man einen Wert $\alpha_1 \leqq a$, so daß für alle positiven ε ist

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_1+\varepsilon} + r'^{\alpha'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_1^2 \\ > r^{\alpha_1-\varepsilon} + r'^{\alpha'} & \text{für gewisse beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Dasselbe gilt für eine ins Unendliche wachsende Folge von Zahlen

$$R_1 < R_2 < \ldots < R_\nu < \ldots;$$

man findet dazu eine Folge von Zahlen

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_\nu \geqq \ldots,$$

derart, daß für jedes ν und alle positiven ε gilt

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_\nu+\varepsilon} + r'^{\alpha'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_\nu^2 \\ > r^{\alpha_\nu-\varepsilon} + r'^{\alpha'} & \text{für gewisse bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{4}$$

Da $0 \leqq \alpha_\nu \leqq a$ ist, existiert $\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = \alpha$; für dieses α gelten die Ungl. (3) in dem angegebenen Sinne; denn man kann zu jedem δ ein so großes ν wählen, daß für ein passendes ε, z. B. $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$

$$\alpha + \delta > \alpha_\nu + \varepsilon, \quad \alpha - \delta < \alpha_\nu - \varepsilon$$

ist; zu α_ν gehört dann ein R_ν, so daß die Ungl. (4) zutreffen. Wählt man R_δ größer als dieses R_ν, (das aber nun zu jedem gegebenen δ bestimmt wird), so gelten um so mehr die Ungl. (3).

Man kann nun in der vorausgesetzten Ungl. (2) a' von beliebig großen Werten an bis zu einer gewissen Grenze stetig abnehmen lassen und für jeden durchlaufenen Wert $a' = \alpha'$ den ersten Teil des Satzes 7 anwenden; so findet man unendlich viele Wertepaare α, α', wobei α' sich stetig ändert. Ebenso kann man in Ungl. (2) a von beliebig großen Werten an stetig abnehmende Werte α durchlaufen lassen und stets den zweiten Teil des Satzes 7 anwenden; man findet wieder unendlich viele Wertepaare α, α'.

Für alle so gefundenen Wertepaare α, α' und irgend welche positive Zahlen δ, δ' gilt, wie unmittelbar aus Satz 7 folgt:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R_{\delta,\delta'}^2 \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} & \text{für gewisse bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \tag{5}$$

Jedes Wertepaar α, α', das den Ungl. (5) genügt, wird im folgenden kurz als „Ordnungspaar" bezeichnet; die von der Gesamtheit aller Ordnungspaare bestimmte Funktion $\alpha' = \varphi(\alpha)$ (oder $\alpha = \psi(\alpha')$) soll „Ordnungsfunktion" der Funktion $g(x, y)$, ihr geometrisches Bild „Ordnungskurve" heißen.

Digitized by Google

Satz 8. Die Ordnungsfunktion einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ ist eine monotone, und zwar im wesentlichen abnehmende Funktion, d. h. sind α_1, α_1' und α_2, α_2' zwei Ordnungspaare und ist $\alpha_2 > \alpha_1$, so ist $\alpha_2' \leqq \alpha_1'$.

α_1, α_1' und α_2, α_2' sind Ordnungspaare, bedeutet:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_1+\delta} + r'^{\alpha_1'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > (R^{(1)}_{\delta,\delta'})^2 \quad (5\,a) \\ > r^{\alpha_1-\delta} + r'^{\alpha_1'-\delta'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2, \quad (5\,b) \end{cases}$$

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha_2+\delta} + r'^{\alpha_2'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > (R^{(2)}_{\delta,\delta'})^2 \quad (6\,a) \\ > r^{\alpha_2-\delta} + r'^{\alpha_2'-\delta'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2. \quad (6\,b) \end{cases}$$

Da $\alpha_2 > \alpha_1$ ist, kann man δ so wählen, daß

$$\alpha_2 - \delta > \alpha_1 + \delta$$

ist $\left(\text{nämlich } \delta < \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$; wäre zugleich $\alpha_2' > \alpha_1'$, so könnte man δ' so wählen, daß

$$\alpha_2' - \delta' > \alpha_1' + \delta'$$

wäre; dann wäre

$$r^{\alpha_2-\delta} + r'^{\alpha_2'-\delta'} > r^{\alpha_1+\delta} + r'^{\alpha_1'+\delta'};$$

damit würden sich die Ungl. (6 b) und (5 a) widersprechen; denn sie müssen für gewisse Werte r, r' zugleich gelten, nämlich für solche, für die (6 b) gilt und die zugleich so gewählt sind, daß $r^2 + r'^2 > (R^{(1)}_{\delta,\delta'})^2$ ist.

Es ist möglich und kommt tatsächlich vor (vgl. die Beispiele!), daß neben α, α' auch α, $\alpha' - c$, wo c eine positive Zahl vorstellt, ein Ordnungspaar ist.

Satz 9. Sind α, α' und α, $\alpha' - c$ Ordnungspaare, so sind auch alle Wertepaare α, $\alpha' - \varkappa$ für $0 \leqq \varkappa \leqq c$ Ordnungspaare; dasselbe gilt natürlich für vertauschte Rollen von α und α'.

Da man nämlich nach Voraussetzung hat

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'-c+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

und

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2,$$

so ist um so mehr

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'-\varkappa+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

bezw.

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\varkappa-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2.$$

Digitized by Google

Ist α, α' ein Ordnungspaar, so gehört, wie oben gezeigt wurde [1]), zu jedem $\alpha + h$ für beliebig kleines h ein $\alpha' - k$, so daß $\alpha + h$, $\alpha' - k$ ein Ordnungspaar ist. Nach Satz 8 ist dabei für $h > 0$ auch $k \geqq 0$, und es muß mit abnehmendem h auch k abnehmen oder doch konstant bleiben; es existiert also $\lim_{h=0} k$. Nun sind zwei Fälle möglich:

$$a) \lim_{h=0} k = 0, \qquad b) \lim_{h=0} k = c > 0.$$

Satz 10. Im Falle b) ist neben α, α' auch α, $\alpha' - c$ ein Ordnungspaar, d. h. es gilt für jedes Wertepaar δ_1, δ_1'

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta_1} + r'^{\alpha'-c+\delta_1'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta_1, \delta_1'} & (7\,a) \\ > r^{\alpha-\delta_1} + r'^{\alpha'-c-\delta_1'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2. & (7\,b) \end{cases}$$

Vorausgesetzt ist die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen für beliebig kleines h:

$$\lg \bar{g}(r, r') \begin{cases} < r^{\alpha+h+\delta} + r'^{\alpha'-k+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta, \delta'} & (8\,a) \\ > r^{\alpha+h-\delta} + r'^{\alpha'-k-\delta'} \text{ für gew. bel. große } r^2 + r'^2. & (8\,b) \end{cases}$$

Ist nun ein beliebig kleines Wertepaar δ_1, δ_1' gegeben, so ergibt sich die Gültigkeit der Ungl. (7 a) folgendermaßen: Man betrachtet Ungl. (8 a) für solche h, k, δ, δ', daß

$$\alpha + h + \delta \leqq \alpha + \delta_1 \text{ und } \alpha' - k + \delta' \leqq \alpha' - c + \delta_1'$$

ist; dies ist offenbar stets möglich, man braucht nur

$$h + \delta \leqq \delta_1 \text{ und } \delta' \leqq \delta_1'$$

zu wählen; dann folgt aber Ungl. (7 a) a fortiori aus Ungl. (8 a).

Um die Giltigkeit der Ungl. (7 b) zu erkennen, betrachtet man die Ungl. (8 b) für solche h, k, δ, δ', daß

$$\alpha + h - \delta \geqq \alpha - \delta_1 \text{ und } \alpha' - k - \delta' \geqq \alpha' - c - \delta_1'$$

ist; dazu braucht man nur $\delta \leqq \delta_1$ bezw. h so klein zu wählen, daß (wegen $\lim_{h=0} k = c$)

$$k + \delta' \leqq c + \delta_1'$$

ist; damit folgt wieder Ungl. (7 b) a fortiori aus Ungl. (8 b).

Aus den drei letzten Sätzen ergibt sich: [2])

Satz 11. Die Ordnungskurve einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ ist eine im positiven Quadranten liegende, aus

[1]) Vgl. die an Satz 7 sich anschließende Folgerung!

[2]) Dabei wird die geometrische Ausdrucksweise als die einfachste gewählt.

Digitized by Google

dem Unendlichen kommende, stetige und im wesentlichen monoton abnehmende Kurve, die wieder ins Unendliche geht. Speziell kann sie in die beiden Schenkel eines den Achsen parallelen rechten Winkels ausarten.

Es mag hier noch eine Klasse besonders einfacher ganzer transzendenter Funktionen kurz betrachtet werden: Die Funktionen der Form $e^{g(x,y)}$.

Satz 12. Alle ganzen Funktionen der Form $e^{g(x,y)}$, bei welchen $g(x,y)$ eine ganze rationale Funktion ist, sind von nicht-unendlicher Ordnung.

Es ist nämlich

$$|e^{g(x,y)}| = e^{\Re(g(x,y))};$$

nach der ersten Ungleichung des Satzes 5 existieren nun zwei Zahlen a, a', nämlich $a = s + \delta$, $a' = s + \delta'$, so daß für hinreichend große Werte von $r^2 + r'^2$ gilt:

$$\Re(g(x,y)) = \lg|e^{g(x,y)}| < r^a + r'^{a'},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Mit Benützung der zweiten Ungleichung des Satzes 5 ergibt sich ferner, daß das Wertepaar s, s ein Ordnungspaar der Funktion $e^{g(x,y)}$ ist.

In den besonderen Fällen, in welchen

$$\underset{\substack{|x|\leqq r\\ |y|\leqq r'}}{\mathrm{Max}}\,\Re(g(x,y)) = \bar{g}(r,r')$$

ist, fallen sicher alle Ordnungspaare mit denjenigen Wertepaaren α, α' zusammen, für welche die Ungleichungen bestehen:

$$|g(x,y)| \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'} \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} & \text{für gew. beliebig große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Z. B. sind die Ordnungspaare der Funktionen e^{x+y}, e^{xy}, e^{x^2+y} bezw. diejenigen Wertepaare α, α', welche in § 2 zu den Funktionen $x+y$, xy, x^2+y angegeben sind.

Es handelt sich nun um diejenige schärfere Untersuchung des Unendlichwerdens ganzer Funktionen endlicher Ordnung von zwei Veränderlichen, welche das Analogon zur Unterscheidung der ganzen Funktionen endlicher Ordnung von einer Veränderlichen in drei Spezialtypen, denjenigen des Maximal-, Normal- und Minimaltypus vorstellt. Dem einheitlichen Zahlenwerte, welcher bei Funktionen einer Veränderlichen die Ordnung angibt, stehen im Gebiete der

Digitized by Google

Funktionen zweier Veränderlichen eine unendliche Menge von Ordnungspaaren α, α' gegenüber. Für jedes derartige Ordnungspaar kann die Untersuchung geführt werden [1]).

Es sei also α, α' ein beliebiges Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, d. h.

$$\lg \bar{g}(r,r') \begin{cases} < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'} \\ > r^{\alpha-\delta} + r'^{\alpha'-\delta'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases}$$

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Es gibt zwei positive Zahlen c, c', so daß man hat

$$\lg \bar{g}(r, r') < c r^{\alpha} + c' r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > C^2 \text{ (endliche Zahl)}; \quad (9)$$

2. es gibt keine solchen Zahlen c, c'.

Im Falle (1) kann die Besonderheit eintreten, daß Ungl. (9) für beliebig kleines c oder beliebig kleines c' oder gleichzeitig beliebig kleine c und c' zutrifft. [2]) Dieser Fall soll als Fall (1 *a*) vom Falle (1) abgetrennt werden. Dann wird im Anschluß an die entsprechenden Verhältnisse bei Funktionen einer Veränderlichen folgende Ausdrucksweise eingeführt:

Im Falle (1 *a*) heißt $g(x, y)$ eine Funktion vom „Minimaltypus" in bezug auf das Ordnungspaar α, α', [3]) im Falle (1) vom „Normaltypus" im Falle (2) vom „Maximaltypus".

Im Falle des Normaltypus lassen sich nun alle Betrachtungen, welche von der Definition der Funktionen von nicht-unendlicher Ordnung zu den Ordnungsfunktionen und ihren Eigenschaften geführt haben, wiederholen, indem man das Zahlenpaar c, c' die Rolle des früheren Zahlenpaares a, a' — siehe Ungl. (1) — übernehmen läßt. Es ergibt sich als Analogon zu den Ordnungspaaren eine unendliche Menge von Wertepaaren γ, γ', welche, wenn ε, ε' irgend welche positiven Zahlen sind, den Ungleichungen genügen:

$$\lg \bar{g}(r,r') \begin{cases} < (\gamma+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'} & \text{für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'} \\ > (\gamma-\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\varepsilon') r'^{\alpha'} & \text{für gew. bel. große } r^2 + r'^2. \end{cases} \quad (10)$$

Jedes derartige Wertepaar γ, γ' soll ein zum Ordnungspaar α, α' der Funktion $g(x, y)$ gehöriges „Typuspaar" heißen; die von der Gesamtheit aller zum Ordnungspaar α, α' gehörigen Typuspaare

[1]) Auf die Frage, welche Beziehungen zwischen den zu den einzelnen Ordnungspaaren einer Funktion gehörigen Typen bezw. Typusfunktionen (vgl. die folgende Untersuchung!) bestehen, wird nicht eingegangen; sie scheint keine einfache Antwort zuzulassen. Das erste der zum Schlusse dieses Paragraphen angeführten Beispiele zeigt, daß eine Funktion in bezug auf die verschiedenen Ordnungspaare jedenfalls nicht von gleichem Typus zu sein braucht.

[2]) Vgl. die Analogie bei den zu Anfang dieses Paragraphen definierten Funktionen der Ordnung O.

[3]) Insbesondere wird, falls Ungl. (9) für gleichzeitig beliebig kleine c, c' gilt, von einem „eigentlichen Minimaltypus" gesprochen.

Digitized by Google

bestimmte Funktion $\gamma' = \chi(\gamma)$ oder $(\gamma = \omega(\gamma'))$ wird die zum Ordnungspaar α, α' gehörige „Typusfunktion", ihr geometrisches Bild die „Typuskurve" genannt. Dann gilt der folgende Satz, dessen Beweis in allen Teilen demjenigen für die analogen Behauptungen über die Ordnungspaare entspricht:

Satz 13. Die Typuskurve in bezug auf ein beliebiges Ordnungspaar α, α' einer Funktion $g(x, y)$, — in bezug auf welches die Funktion überhaupt vom Normaltypus ist — ist eine im positiven Quadranten liegende, aus dem Unendlichen kommende, stetige und im wesentlichen monoton abnehmende Kurve, die wieder ins Unendliche geht. Speziell kann sie in die beiden Schenkel eines den Achsen parallelen rechten Winkels ausarten.

Dem Übergang vom Normaltypus zum Minimal- oder Maximaltypus entspricht die geometrische Vorstellung, daß die Typuskurve ganz oder zum Teil mit dem aus den positiven Achsen gebildeten Winkel zusammenfällt bezw. vollständig ins Unendliche rückt.

Beispiele:

$g(x, y) = e^{x+y}$; zum Ordnungspaar 1, 1 ergibt sich eine Typusfunktion, die denselben Charakter hat wie die Ordnungsfunktion, nämlich durch alle Wertepaare γ, γ' definiert ist, welche den Bedingungen genügen:

$$\gamma = 1,\ \infty > \gamma' \geqq 1 \text{ oder } \infty > \gamma \geqq 1,\ \gamma' = 1.$$

In bezug auf alle anderen Ordnungspaare ist die Funktion vom Minimaltypus.

$g(x, y) = e^{xy}$; hier ergeben sich die Typusfunktionen:

Zum Ordnungspaar 2, 2 gehört $\gamma' = \frac{1}{4\gamma}$, $\gamma = \frac{1}{4\gamma'}$;

„ „ $\frac{3}{2}, 3$ „ $\gamma' = \frac{4}{27\gamma^2}$, $\gamma = \sqrt{\frac{4}{27\gamma'}}$;

allgemein:

Zum Ordnungspaar $\alpha, \frac{\alpha}{\alpha-1}$ gehört $\gamma' = \frac{\alpha - 1}{(\alpha^\alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$, $\gamma = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha \gamma'^{\alpha-1}}$.

§ 4. Der Einfluß gewisser Transformationen einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung auf ihre Ordnungsfunktion.

Die Entscheidung der Frage, wie sich die Ordnungsfunktion einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung verhält, wenn $g(x, y)$ einer linearen Transformation

$$x = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1$$
$$y = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2$$

unterworfen wird, scheint erhebliche Schwierigkeiten darzubieten.

Digitized by Google

Für den Fall der spezielleren Substitution

$$\begin{aligned} x &= a\xi + b \\ y &= c\eta + d, \end{aligned} \tag{1}$$

ergibt sich allerdings die Invarianz der Ordnungsfunktion. Doch gestaltet sich selbst in diesem einfachsten Falle die Untersuchung so kompliziert, daß sie hier unterdrückt werden soll.

Für den Fall der allgemeinen ganzen Substitution

$$\begin{aligned} x &= a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \cdots + a_1 \xi + a_0 \\ y &= b_m \eta^m + b_{m-1} \eta^{m-1} + \cdots + b_1 \eta + b_0 \end{aligned} \tag{2}$$

läßt sich, wie hier gleichfalls ohne Beweis angeführt wird, wenigstens zeigen, daß die Nicht-Unendlichkeit bezw. Unendlichkeit der Ordnung dabei erhalten bleibt.

II. Abschnitt.

Beziehungen zwischen dem Unendlichwerden ganzer transzendenter Funktionen zweier komplexer Veränderlichen von nicht-unendlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Reihenkoeffizienten.

§ 1. Beziehungen, welche aus der Existenz einer oberen Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x,y)$ von nicht-unendlicher Ordnung folgen.

Ähnlich wie bei Funktionen einer Veränderlichen lassen sich auch bei Funktionen zweier Veränderlichen aus den Ungleichungen, welche das Verhalten im Unendlichen charakterisieren, Beziehungen für das infinitäre Verhalten der Koeffizienten der Potenzreihen, durch welche die Funktionen definiert sind, gewinnen. Dabei wird zunächst von denjenigen Ungleichungen ausgegangen, welche das Anwachsen des absoluten Betrages der Funktionen nach oben hin beschränken. Es wird also eine Funktion $g(x, y)$ betrachtet, welche für beliebige ε, ε' der Ungleichung genügt:

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon)\, r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon')\, r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}, \tag{1}$$

wobei

$$\alpha > 0, \quad \alpha' > 0.$$

Die Potenzreihe der Funktion $g(x, y)$ laute ein für allemal:

$$g(x,y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}.$$

Digitized by Google

Nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz für Funktionen von zwei Veränderlichen ist nun

$$\begin{aligned} |a_{\mu}^{(\nu)}|\, r^{\mu} r'^{\nu} &< \bar{g}(r, r') \\ &< e^{(\gamma+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'+\varepsilon') r'^{\alpha'}} \text{ für } r^2 + r'^2 > R_{\varepsilon,\varepsilon'}^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Man kann nun speziell

$$r = \left(\frac{\mu}{\alpha(\gamma+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad r' = \left(\frac{\nu}{\alpha'(\gamma'+\varepsilon')}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$$

setzen, wenn man hierin μ und ν derart wählt, daß

$$r^2 + r'^2 > R_{\varepsilon,\varepsilon'}^2$$

ist[1]); Ungl. (2) wird dann nach einiger Umformung:

$$|a_{\mu}^{(\nu)}| \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} < \left(\alpha(\gamma+\varepsilon)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}} \left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}. \tag{3}$$

Während sich bei den Untersuchungen über Funktionen einer Veränderlichen an dieser Stelle die rechte Seite der entsprechenden Ungleichung durch einfaches Wurzel-Ausziehen vom Index (μ) unabhängig machen und damit eine Grenzrelation sich gewinnen läßt, scheinen hier zu demselben Zwecke zunächst Einschränkungen notwendig zu sein. Man könnte die Ungl. (3) nur für solche Werte von μ, ν betrachten, zwischen welchen eine geeignete Beziehung besteht, nämlich etwa

$$\mu = p\lambda, \quad \nu = q\lambda,$$

wo p, q feste ganze positive Zahlen sind, während λ ins Unendliche wächst. Dieser Weg soll jedoch hier nicht betreten werden, da der folgende allgemeinere Resultate verspricht:

Man bestimmt zwei positive ganze Zahlen s, s' und zwei beliebige positive Zahlen c, c' derart, daß

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist[2]); der gemeinsame Wert dieser beiden Ausdrücke wird mit A

[1]) Dabei kann eine der beiden Zahlen μ, ν beliebig, auch gleich Null gewählt werden, wenn nur die andere hinreichend groß gewählt wird. Wenn unten $s'\mu + s\nu$ (wo s, s' positive ganze Zahlen sind) hinreichend groß gewählt wird, wird diese Bedingung stets erfüllt.

[2]) Derselbe Grad der Allgemeinheit würde natürlich schon erreicht, wenn nur zwei Zahlen c und s so bestimmt würden, daß

$$(\alpha'\gamma')^{\frac{1}{\alpha'}} = c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}}$$

wäre; doch ist die obige Form der Symmetrie wegen vorzuziehen. s, s' und eine der Zahlen c, c' sind dabei noch vollkommen willkürlich.

Digitized by Google

bezeichnet. Da die Ausdrücke stetige Funktionen von γ bezw. γ' sind, kann man nun stets beliebig kleine Zahlen ε, ε' so bestimmen, daß

$$c\left(\alpha\left(\gamma+\varepsilon\right)\right)^{\overline{\alpha}} = c'\left(\alpha'\left(\gamma'+\varepsilon'\right)\right)^{\frac{s'}{\alpha'}} = A+\tau$$

ist, wobei τ beliebig klein ist. Daraus folgt:

$$\left(\alpha\left(\gamma+\varepsilon\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{A+\tau}{c}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\left(\alpha'\left(\gamma'+\varepsilon'\right)\right)^{\frac{1}{\alpha'}} = \left(\frac{A+\tau}{c'}\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Aus Ungl. (3) wird somit nach einiger Umformung:

$$\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} < (A+\tau)^{\frac{1}{ss'}},$$

gültig für passende μ, ν (vgl. die Fußnote zu Ungl. (3). Daraus folgt, da der obere Limes eine bestimmte Zahl ist, die Ungleichung aber für beliebig kleine τ gilt:

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}\,^{1)}\left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{ss'}}.$$

Berücksichtigt man noch den unten[2]) angeführten Hilfssatz, so ist nunmehr der Satz bewiesen:

---

[1]) Dieser $\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}$ ist so zu bilden, daß man $s'\mu+s\nu$ der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, . . . durchlaufen läßt und jedesmal alle passenden Wertsysteme μ, ν sucht; d. h. er ist der obere Limes der einfach-unendlichen Zahlenfolge, welche entsteht, wenn man die Doppelfolge

$$b_\mu^{(\nu)} = \left[\left|a_\mu^{(\nu)}\right|\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}$$

nach irgend welchen (nicht nur unter 45° verlaufenden) Diagonalen ordnet. Den Grund für die Einführung von $\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}}$ statt $\overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}$ ersieht man aus der Fußnote p. 27.

[2]) Hilfssatz:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\frac{\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu}\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}}{\mu!\;\nu!}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 1.$$

Mit $s'\mu+s\nu$ wird nämlich entweder μ oder ν oder beide zugleich beliebig groß. Es werde etwa μ beliebig groß; dann liegt der Wert des Ausdruckes

$$\left[\frac{\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu}}{\mu!}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = \left[\frac{\frac{\mu}{e}}{\sqrt[\mu]{\mu!}}\right]^{\frac{1}{s'+\frac{s\nu}{\mu}}}$$

Digitized by Google

Satz 14. Hat eine ganze Funktion

$$g(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} x^{\mu} y^{\nu}$$

die Eigenschaft, daß für irgend ein System positiver Werte α, α', γ, γ' (wobei für α, α' der Wert Null ausgeschlossen ist) und für beliebige positive ε, ε' die Ungleichung

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}$$

gilt, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_{\mu}^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{s s'}},$$

wenn s, s' irgend welche ganze positive und c, c' irgend welche positive Zahlen sind, für welche

$$c (\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c' (\alpha' \gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, und A den gemeinsamen Wert dieser beiden Ausdrücke bezeichnet.

Zu diesem Satze gilt die folgende Umkehrung:

Satz 15. Haben die Koeffizienten $a_{\mu}^{(\nu)}$ einer ganzen Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es positive Zahlen α, α', γ, γ', c, c' und positive ganze Zahlen s, s' gibt, welche den Relationen genügen:

$$c (\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c' (\alpha' \gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} (= A),$$

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_{\mu}^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{s s'}},$$

so ist für beliebige positive ε, ε'

$$\lg \overline{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

---

für hinreichend große μ beliebig nahe an 1, weil dabei nach der Stirlingschen Formel der Wert des Ausdruckes in der eckigen Klammer beliebig nahe an 1 liegt.

Wird zugleich ν beliebig groß, so gilt für

$$B = \left[\frac{\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}}{\nu!} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}}$$

dasselbe; wenn aber ν unter einer endlichen Schranke bleibt, so betrachtet man B in der Form

$$B = \left[\left(\frac{\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\nu}}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right]^{\frac{1}{s' + \frac{s\nu}{\mu}}};$$

der Wert des Ausdruckes in der eckigen Klammer nähert sich für hinreichend große μ dem Wert 1, also auch der Wert von B.

Digitized by Google

Soll die Behauptung für ein gegebenes Wertepaar ε, ε' nachgewiesen werden, so bestimmt man ein Wertepaar ε_0, ε_0' entsprechend den Bedingungen:

$$2\varepsilon_0 \leqq \varepsilon, \quad 2\varepsilon_0' \leqq \varepsilon', \tag{4}$$

$$c\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}}.$$

Der gemeinsame Wert der beiden Seiten der letzten Gleichung sei $A+\tau_0$. Aus der Voraussetzung folgt dann, daß zu τ_0 ein n_{τ_0} existiert, so daß man für alle μ, ν, für welche

$$s'\mu + s\nu \geqq n_{\tau_0}$$

ist, erhält:

$$\left[|a_\mu^{(\nu)}|\,(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\, c^{\frac{\mu}{s}}\, c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} < (A+\tau_0)^{\frac{1}{ss'}}$$

oder

$$|a_\mu^{(\nu)}| < \frac{\left(\frac{A+\tau_0}{c}\right)^{\frac{\mu}{s}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\frac{A+\tau_0}{c'}\right)^{\frac{\nu}{s'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}$$

oder, wenn man für $A+\tau_0$ den einen bezw. anderen Ausdruck einsetzt:

$$|a_\mu^{(\nu)}| < \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}.$$

Anderseits gibt es eine endliche positive Zahl k, so daß für alle (nur in endlicher Anzahl [1]) vorhandenen) Wertepaare μ, ν, für welche

$$s'\mu + s\nu < n_{\tau_0}$$

ist, die Ungleichung gilt:

$$|a_\mu^{(\nu)}| < k \cdot \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}}.$$

Ist K die größere der beiden Zahlen k und 1, so gilt:

$$|a_\mu^{(\nu)}| < K \frac{\left(\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\right)^{\frac{\mu}{\alpha}}}{(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}} \cdot \frac{\left(\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\right)^{\frac{\nu}{\alpha'}}}{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

[1]) Wäre in diesen Betrachtungen $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}$ statt $\overline{\lim}_{s'\mu+s\nu=\infty}$ eingeführt worden, so würde die letzte Ungleichung nur für alle Werte μ, ν gelten, welche einzeln hinreichend groß würden, die Werte μ, ν, für welche sie nicht feststünde, wären in unendlicher Anzahl vorhanden; damit gäbe es nicht notwendig eine Zahl k der eben angegebenen Art.

Digitized by Google

Multipliziert man beiderseits mit $r^{\mu}\, r'^{\nu}$ und setzt auf der rechten Seite

$$\alpha(\gamma+\varepsilon_0)\, r^{\alpha}=\rho, \quad \alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')\, r'^{\alpha'}=\rho', \tag{5}$$

so ergibt sich:

$$|a_{\mu}^{(\nu)}|\, r^{\mu}\, r'^{\nu}<K\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \text{ für } \begin{cases}\mu=0,\,1,\,2,\ldots\\ \nu=0,\,1,\,2,\ldots\end{cases}$$

Summiert man über alle μ, ν und beachtet, daß

$$|g(x,y)|=\left|\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu}^{(\nu)}x^{\mu}y^{\nu}\right|\leqq\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{\mu}^{(\nu)}|\, r^{\mu}\, r'^{\nu}$$

ist, so folgt:

$$|g(x,y)|<K\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}.$$

Für den Ausdruck der rechten Seite wird nun eine obere Schranke gesucht.

Man bestimmt zwei positive ganze Zahlen m, n, so daß man hat:

$$\left(\frac{\rho}{\mu+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}<\frac{1}{2} \text{ für } \mu\geqq m,$$

$$\left(\frac{\rho'}{\nu+1}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}<\frac{1}{2} \text{ für } \nu\geqq n;$$

dazu braucht nur

$$\frac{\rho}{m+1}<\frac{1}{2\alpha} \text{ oder } m>2^{\alpha}\rho-1 \text{ bezw. } n>2^{\alpha'}\rho'-1$$

zu sein; man wählt also

$$m=[2^{\alpha}\rho]^{1}) \text{ bezw. } n=[2^{\alpha'}\rho']. \tag{6}$$

Nun zerlegt man die Doppelsumme folgendermaßen:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}=$$

$$=\left\{\sum_{\mu=0}^{m-1}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\rho^{m}}{m!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left[1+\left(\frac{\rho}{m+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\rho^{2}}{(m+1)(m+2)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{\rho'^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}+\left(\frac{\rho'^{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}\left[1+\left(\frac{\rho'}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+\left(\frac{\rho'^{2}}{(n+1)(n+2)}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}+\cdots\right]\right\}.$$

[1]) $[2^{\alpha}\rho]$ bedeutet die größte in $2^{\alpha}\rho$ enthaltene ganze Zahl.

Digitized by Google

Ersetzt man im ersten Summanden jedes Faktors jedes Glied durch $e^{\frac{\varrho}{\alpha}}$ bezw. $e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}$, im zweiten Summanden den ersten Faktor ebenfalls durch $e^{\frac{\varrho}{\alpha}}$ bezw. $e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}$, hingegen die Ausdrücke

$$\left(\frac{\rho}{m+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{\rho}{m+2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, \left(\frac{\rho'}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}, \left(\frac{\rho'}{n+2}\right)^{\frac{1}{\alpha'}}, \ldots$$

durch $\frac{1}{2}$, so folgt:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^{\mu}}{\mu!}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{\rho^{\nu}}{\nu!}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} < \left\{m e^{\frac{\varrho}{\alpha}} + e^{\frac{\varrho}{\alpha}}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\{n e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}} + e^{\frac{\varrho'}{\alpha'}}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right]\right\} =$$

$$= (m+2)(n+2)\, e^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho'}{\alpha'}}.$$

Daher ist

$$|g(x,y)| < K(m+2)(n+2)\, e^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho'}{\alpha'}}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) und (6):

$$|g(x,y)| < K\left(2^{\alpha}\alpha(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+2\right)\left(2^{\alpha'}\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}+2\right).\, e^{(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}}.$$

Da nun für hinreichend große Werte von $r^2+r'^2$, etwa $r^2+r'^2 > R^2$,

$$K\left(2^{\alpha}\alpha(\gamma+\varepsilon_0)r^{\alpha}+2\right)\left(2^{\alpha'}\alpha'(\gamma'+\varepsilon_0')r'^{\alpha'}+2\right) < e^{\varepsilon_0 r^{\alpha}+\varepsilon_0' r'^{\alpha'}}$$

ist [1]), so erhält man hieraus mit Rücksicht auf die Relationen (4) die Behauptung, wenn $R_{\varepsilon,\varepsilon'} \geqq R$ gewählt wird.

Die Beweise der letzten beiden Sätze bleiben richtig, wenn $\gamma = \gamma' = 0$ ist; es können also ohne weiteres die folgenden beiden Sätze als Spezialfälle der beiden letzten ausgesprochen werden: [2])

Satz 16. Hat die Funktion $g(x,y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha} + \varepsilon' r'^{\alpha'} \text{ für } r^2+r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

bei beliebigen positiven ε, ε' gilt, so ist

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[\left|a_{\mu}^{(\nu)}\right|(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0,$$

wobei s, s' beliebige positive ganze Zahlen sind.

[1]) Dies läßt sich durch Unterscheidung der Fälle $r \geqq r'$, $r \leqq r'$ leicht in exakter Weise dartun.

[2]) Dabei wird $c = c' = 1$ gesetzt; ferner wird lim statt $\overline{\lim}$ geschrieben, was wegen des Wertes Null gestattet ist.

Digitized by Google

Satz 17. (Umkehrung des vorigen.) Haben die Koeffizienten einer ganzen Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, so daß für irgend welche positive ganze s, s' die Gleichung

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}\left[|a_\mu^{(\nu)}|\,(\mu!)^{\frac{1}{\alpha}}\,(\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}}=0$$

erfüllt ist, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$\lg \bar{g}(r, r') < \varepsilon r^{\alpha} + \varepsilon' r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}.$$

Um auch aus der im Vergleich zur Voraussetzung (1) p. 23 weniger exakten Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

eine Folgerung über das Verhalten der Koeffizienten von $g(x, y)$ ziehen zu können, wird der folgende Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz. Aus der für alle positiven δ, δ' und $r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$ gültigen Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \tag{7}$$

folgt die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + \varepsilon' r'^{\alpha'+\delta'}, \tag{8}$$

gültig für alle positiven ε, ε' und $r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$.

Ist nämlich zunächst ein beliebiges ε gegeben, so läßt sich zeigen, daß ein R_ε existiert, so daß man hat:

$$\lg \bar{g}(r, r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon}. \tag{9}$$

Man bestimmt zu den Zahlen δ, ε eine Zahl R_1, so daß die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{r^{\frac{\delta}{2}}} < \varepsilon \text{ von } r > R_1 \text{ an}; \tag{10}$$

R_1 ist eine durch δ und ε fest bestimmte Zahl; nun unterscheidet man die Fälle:

$$a)\ r > R_1, \quad b)\ r \leqq R_1.$$

In jedem der beiden Fälle wird die Existenz einer Zahl R_ε der oben angegebenen Art erwiesen.

Digitized by Google

a) Man bestimmt $R_{\frac{\delta}{2},\delta'}$, so daß man hat:

$$\lg \bar{g}(r,r') < r^{\alpha+\frac{\delta}{2}} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\frac{\delta}{2},\delta'}$$

oder nach Ungleichung (10), da

$$r^{\alpha+\frac{\delta}{2}} = r^{-\frac{\delta}{2}} . r^{\alpha+\delta}$$

ist:

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\frac{\delta}{2},\delta'},\ r > R_1.$$

b) Man bestimmt $R_{\delta,\frac{\delta'}{2}}$, so daß man für $r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\frac{\delta'}{2}}$ erhält:

$$\lg \bar{g}(r,r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\frac{\delta'}{2}} =$$
$$= \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} + \left[(1-\varepsilon) r^{\alpha+\delta} - \left(1 - r'^{-\frac{\delta'}{2}}\right) r'^{\alpha'+\delta'}\right].$$

Wählt man für r' eine Schranke R_2 $\left(\geqq R_{\delta,\frac{\delta'}{2}}\right)$ so groß, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer negativ wird, was wegen der Voraussetzung $r \leqq R_1$ stets möglich ist, so folgt:

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r' > R_2,\ r \leqq R_1,$$

also jedenfalls für $r^2 + r'^2 > R_1^2 + R_2^2$, $r \leqq R_1$.

Wählt man daher

$$R_\varepsilon > \begin{cases} R_{\frac{\delta}{2},\delta'} \\ \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \end{cases},$$

so gilt Ungleichung (9) in beiden Fällen für $r^2 + r'^2 > R_\varepsilon^2$.

Ist nun weiter ein beliebiges ε' gegeben, so läßt sich in derselben Weise wie eben die Existenz eines $R_{\varepsilon,\varepsilon'}$ erweisen, derart, daß die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r,r') < \varepsilon r^{\alpha+\delta} + \varepsilon' r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

gilt, indem man nun R_1' so bestimmt, daß

$$\frac{1}{r'^{\frac{\delta'}{2}}} < \varepsilon' \text{ ist von } r' > R_1' \text{ an,}$$

die beiden Fälle

$$r' > R_1',\quad r' \leqq R_1'$$

unterscheidet und an Stelle der vorausgesetzten Ungleichung nun die eben (für beliebige δ, δ') bewiesene Ungleichung (9) benützt.

Digitized by Google

Nunmehr läßt sich das oben beabsichtigte Resultat folgendermaßen aussprechen:

Satz 18. Hat die ganze Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' und beliebige positive δ, δ' die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \quad \text{für} \quad r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

gilt, so ist für beliebige positive δ, δ' und ganze positive s, s'

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0.$$

Zum Beweise benützt man statt der vorausgesetzten Ungleichung die durch den Hilfssatz aus ihr sich ergebende Ungleichung (8) und wendet Satz 16 in der Weise an, daß man α durch $\alpha+\delta$, α' durch $\alpha'+\delta'$ ersetzt.

Auch dieser Satz ist wieder umkehrbar, nämlich:

Satz 19. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, derart, daß für beliebige positive δ, δ'

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0$$

ist, wobei s, s' irgend welche positive ganze Zahlen sind, so ist für beliebige positive δ, δ'

$$\lg \bar{g}(r, r') < r^{\alpha+\delta} + r'^{\alpha'+\delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}.$$

Nach Satz 17 folgt nämlich aus der vorausgesetzten Gleichung die Ungleichung (8) für beliebige positive ε, ε' und daraus a fortiori die behauptete Ungleichung.

§ 2. Beziehungen, welche aus der Existenz einer unteren Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x,y)$ von nicht-unendlicher Ordnung folgen.

Den sechs Sätzen des ersten Paragraphen lassen sich völlig entsprechende an die Seite stellen, indem man von denjenigen Ungleichungen ausgeht, welche das Anwachsen des absoluten Betrages der Funktion $g(x, y)$ nach unten hin beschränken.

Satz 20. Hat eine ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung

$$g(x, y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^{(\nu)} x^\mu y$$

Digitized by Google

die Eigenschaft, daß für irgend ein System positiver Werte α, α', γ, γ' bei beliebigen positiven ε, ε' die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r,r') > (\gamma-\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2$$

gilt, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_{\mu}^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} \geqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

wenn s, s' irgendwelche positive ganze und c, c' irgendwelche positive Zahlen sind, für welche

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, und A den gemeinsamen Wert dieser beiden Ausdrücke bezeichnet.

Wäre nämlich dieser obere Limes $< A^{\frac{1}{ss'}}$, so wäre er auch noch $\leqq A_1^{\frac{1}{ss'}}$, wenn

$$A_1 = c\left(\alpha(\gamma-\eta)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma'-\eta')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

ist, wo η, η' passende positive Zahlen sind; damit wäre nach Satz 15 für alle positiven ε, ε':

$$\lg \bar{g}(r,r') < (\gamma-\eta+\varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma'-\eta'+\varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2+r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'}.$$

Wählt man

$$\varepsilon \leqq \frac{\eta}{2}, \quad \varepsilon' \leqq \frac{\eta'}{2},$$

so wird

$$\gamma-\eta+\varepsilon \leqq \gamma-\frac{\eta}{2}, \quad \gamma'-\eta'+\varepsilon' \leqq \gamma'-\frac{\eta'}{2},$$

also

$$\lg \bar{g}(r,r') < \left(\gamma-\frac{\eta}{2}\right) r^{\alpha} + \left(\gamma'-\frac{\eta'}{2}\right) r'^{\alpha'} \text{ für } r^2+r'^2 > R^2_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Umgekehrt: Satz 21. Haben die Koeffizienten $a_{\mu}^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x,y)$ die Eigenschaft, daß es positive Zahlen α, α', γ, γ', c, c' und positive ganze Zahlen s, s' gibt, welche den Relationen genügen:

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} (= A),$$

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_{\mu}^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} \geqq A^{\frac{1}{ss'}},$$

Digitized by Google

so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$\lg \bar{g}(r, r') > (\gamma - \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \varepsilon') r'^{\alpha'}$ für gewisse bel. große $r^2 + r'^2$.

Wäre nämlich für ein Wertepaar ε, ε'

$\lg \bar{g}(r, r') \leqq (\gamma - \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' - \varepsilon') r'^{\alpha'}$ für alle $r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}$,

so träfe dies für zwei Werte

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon, \quad \varepsilon_1' \leqq \varepsilon'$$

um so mehr zu. Zwei solche Werte ε_1, ε_1' sollen nun so gewählt werden, daß

$$c\left(\alpha(\gamma - \varepsilon_1)\right)^{\frac{s}{\alpha}} = c'\left(\alpha'(\gamma' - \varepsilon_1')\right)^{\frac{s'}{\alpha'}} = A_1$$

ist. Da dann um so mehr die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') < \left(\gamma - \frac{\varepsilon_1}{2}\right) r^{\alpha} + \left(\gamma' - \frac{\varepsilon_1'}{2}\right) r'^{\alpha'}$$

besteht, die sich in der Form

$$\lg \bar{g}(r, r') < \left((\gamma - \varepsilon_1) + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) r^{\alpha} + \left((\gamma' - \varepsilon_1') + \frac{\varepsilon_1'}{2}\right) r'^{\alpha'}$$

schreiben läßt, so folgt nach Satz 14:

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A_1^{\frac{1}{ss'}}.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, da $A_1 < A$ ist.

Satz 22. Hat die ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zu einem Paare positiver Zahlen α, α' keine zwei Zahlen C, C' gibt, so daß

$$\lg \bar{g}(r, r') < C r^{\alpha} + C' r'^{\alpha'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2$$

ist, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty,$$

wobei s, s' beliebige ganze positive Zahlen sind.

Wäre nämlich dieser obere Limes nicht größer als eine endliche Zahl $A^{\frac{1}{ss'}}$, so könnte man zwei positive Zahlen γ, γ' so bestimmen, daß

$$(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = (\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} = A$$

Digitized by Google

wäre; dann würde nach Satz 15 folgen:

$$\lg \bar{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'},$$

gegen die Voraussetzung.

Satz 23. Haben die Koeffizienten $a_{\mu}^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, so daß für irgendwelche positive ganze Zahlen s, s' die Gleichung

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty$$

besteht, so gibt es keine zwei endlichen Zahlen C, C', so daß man hätte:

$$\lg \bar{g}(r, r') < C r^{\alpha} + C' r'^{\alpha'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2.$$

Gäbe es nämlich zwei solche Zahlen C, C', so gäbe es auch zwei Zahlen γ, γ', welche der Gleichung

$$(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = (\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} (= A)$$

genügten und für die bei beliebigen positiven ε, ε' die Ungleichung bestünde:

$$\lg \bar{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

Damit wäre nach Satz 14 im Widerspruch mit der Voraussetzung:

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} \leqq A^{\frac{1}{ss'}}.$$

Satz 24. Hat die ganze Funktion von nicht-unendlicher Ordnung $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß für ein Paar positiver Werte α, α' und beliebige positive δ, δ' die Ungleichung

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2$$

gilt, so ist für beliebige positive δ, δ' und ganze positive s, s':

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[\left| a_{\mu}^{(\nu)} \right| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty.$$

Wäre nämlich dieser obere Limes nicht größer als eine endliche Zahl $A^{\frac{1}{ss'}}$, so könnte man zwei Zahlen γ, γ' so bestimmen, daß

$$\left((\alpha - \delta)\gamma\right)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} = \left((\alpha' - \delta')\gamma'\right)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} = A$$

wäre; daraus ergäbe sich nach Satz 15 die Ungleichung:

$$\lg \bar{g}(r, r') < (\gamma + \varepsilon) r^{\alpha - \delta} + (\gamma' + \varepsilon') r'^{\alpha' + \delta'} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\varepsilon, \varepsilon'}.$$

Digitized by Google

Anderseits liefert die Voraussetzung, die für alle Werte δ, δ', also auch etwa für $\frac{\delta}{2}$, $\frac{\delta'}{2}$ gilt, das widersprechende Resultat:

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha - \frac{\delta}{2}} + r'^{\alpha' - \frac{\delta'}{2}} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2.$$

Satz 25. Haben die Koeffizienten $a_\mu^{(\nu)}$ einer Funktion $g(x, y)$ die Eigenschaft, daß es zwei positive Zahlen α, α' gibt, derart, daß für beliebige positive δ, δ'

$$\overline{\lim_{s'\mu + s\nu = \infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| \, (\mu!)^{\frac{1}{\alpha - \delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha' - \delta'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu + s\nu}} = \infty$$

st, wobei s, s' irgendwelche positive ganze Zahlen sind, so ist für beliebige positive δ, δ':

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für gewisse bel. große } r^2 + r'^2.$$

Nach Satz 23 gibt es nämlich in dem vorausgesetzten Falle keine zwei Zahlen C, C', so daß man hätte:

$$\lg \bar{g}(r, r') < C r^{\alpha - \delta} + C' r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2;$$

damit kann auch die folgende Relation nicht bestehen:

$$\lg \bar{g}(r, r') \leqq r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'} \text{ für alle } r^2 + r'^2 > R^2,$$

d. h. für gewisse beliebig große Werte von $r^2 + r'^2$ erhält man immer wieder:

$$\lg \bar{g}(r, r') > r^{\alpha - \delta} + r'^{\alpha' - \delta'}.$$

§ 3. Beziehungen zwischen den Ordnungspaaren bezw. den Ordnungspaaren und dem zugehörigen Typus einer ganzen Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Koeffizienten.

Indem man die Sätze des vorigen Paragraphen paarweise zusammenfaßt, ergeben sich unmittelbar die in den folgenden Sätzen ausgesprochenen umkehrbaren Beziehungen zwischen dem infinitären Verhalten der Koeffizienten einer ganzen Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung und einerseits ihren Ordnungspaaren im allgemeinen, anderseits ihren Ordnungspaaren und dem zugehörigen Typus.

Aus den Sätzen 18 und 24, deren Voraussetzungen zusammengenommen das Wertepaar α, α' gerade als Ordnungspaar der Funktion $g(x, y)$ charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (19 u. 25) folgt:

Digitized by Google

Satz 26. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher [1]) Ordnung $g(x, y)$, so ist für irgendwelche positive δ, δ' und positive ganze s, s':

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'-\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = \infty,$$

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0$$

und umgekehrt.

Ebenso folgt aus den Sätzen 14 und 20, bezw. aus deren Umkehrungen (Satz 15 und 21):

Satz 27. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion vom Normaltypus in bezug auf dieses Ordnungspaar und γ, γ' ein zugehöriges Typuspaar, so ist

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} c^{\frac{\mu}{s}} c'^{\frac{\nu}{s'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = A^{\frac{1}{ss'}},$$

wenn c, c' irgendwelche positive und s, s' irgendwelche positive ganze Zahlen sind, für welche gilt:

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}} = A,$$

und umgekehrt.

Aus den Sätzen 16 und 24, deren Voraussetzungen den eigentlichen [2]) Minimaltypus der Funktion $g(x, y)$ in bezug auf α, α' als Ordnungspaar charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (17 und 25) folgt:

Satz 28. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion in bezug auf dieses Ordnungspaar vom eigentlichen Minimaltypus, so ist:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0,$$

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| (\mu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'-\delta'}}\right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = \infty$$

und umgekehrt.

[1]) Diese Voraussetzung ist hier notwendig; sie vertritt die frühere, daß α, α' positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen).

[2]) Im Falle des uneigentlichen Minimaltypus ergibt sich keine derartige Relation, was von vornherein daraus hervorgeht, daß die Gleichung

$$c(\alpha\gamma)^{\frac{s}{\alpha}} = c'(\alpha'\gamma')^{\frac{s'}{\alpha'}}$$

für endliche Zahlen nicht erfüllt sein kann, wenn von den Zahlen γ, γ' die eine verschwindet, die andere dagegen nicht. Diese scheinbare Ausnahme entspricht in diesem Zusammenhange dem Umstande, daß z. B. im Falle $\gamma = 0$, $\gamma' \neq 0$ die angeführte Gleichung durch $s = \infty$, $s' \neq \infty$ befriedigt wird, was einer Anordnung der in Frage kommenden Doppelfolge in die Reihe der Kolonnen entspricht.

Digitized by Google

Aus den Sätzen 18 und 22, deren Voraussetzungen den Maximaltypus der Funktion $g(x, y)$ in bezug auf α, α' als Ordnungspaar charakterisieren, bezw. aus den Umkehrungen dieser Sätze (19 und 23) folgt schließlich:

Satz 29. Ist α, α' Ordnungspaar der ganzen Funktion endlicher Ordnung $g(x, y)$, und ist die Funktion in bezug auf dieses Ordnungspaar vom Maximaltypus, so ist:

$$\lim_{s'\mu+s\nu=\infty} \left[|a_\mu^{(\nu)}| \, (\mu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'+\delta'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = 0,$$

$$\overline{\lim_{s'\mu+s\nu=\infty}} \left[|a_\mu^{(\nu)}| \, (\mu!)^{\frac{1}{\alpha}} (\nu!)^{\frac{1}{\alpha'}} \right]^{\frac{1}{s'\mu+s\nu}} = \infty$$

und umgekehrt.

III. Abschnitt.

Beziehungen zwischen dem Verhalten gewisser spezieller ganzer transzendenter Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen und der Art ihres Verschwindens.

§ 1. Allgemeine Produktdarstellung ganzer Funktionen $g(x,y)$; daraus entspringende Einteilung dieser Funktionen.

Die Art des Verschwindens einer ganzen Funktion kommt in ihrer Darstellung durch ein endliches oder unendliches Produkt unmittelbar zum Ausdruck.

Bei der allgemeinen von Herrn H. Hahn[1]) angegebenen Produktdarstellung ganzer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen erscheinen als Faktoren gewisse „Primfunktionen", nämlich ganze Funktionen von x, y, die höchstens für solche Wertepaare x, y verschwinden, wie sie durch eine einzige, nur einfach zu rechnende[2]) analytische Funktion $y = f(x)$ (die endlich- oder unendlichvieldeutig sein kann) geliefert werden. Diese Primfunktionen von zwei Veränderlichen können dann von zweierlei Art sein:

1. Von der Form $g_n(x, y) . e^{\gamma(x,y)}$, wobei g_n eine irreduzible ganze rationale Funktion ist (speziell auch eine Konstante oder nur von x oder y allein abhängig, dann notwendig linear), γ eine ganze rationale oder transzendente Funktion (speziell auch eine Konstante oder nur von x oder y allein abhängig);

2. von der Form $g(x, y) . e^{\gamma(x,y)}$, wobei g eine ganze transzendente Funktion ist, γ wieder von der vorigen Art.

---

[1]) H. Hahn, Über Funktionen zweier komplexer Veränderlicher, Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 16 (1905),

[2]) D. h. die Primfunktion darf die durch $y = f(x)$ gelieferten Wertepaare x, y nur als einfache Nullstellen haben.

Digitized by Google

Herr H. Hahn hat nun den Satz bewiesen:

Jede ganze Funktion von zwei Veränderlichen läßt sich darstellen als endliches oder unendliches Produkt von Primfunktionen.

Diese Darstellung führt zur Unterscheidung folgender fünf Grundtypen von ganzen Funktionen zweier Veränderlicher:

1. Produkte von endlich vielen Primfunktionen der ersten Form;

2. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der ersten Form, bei welchen der Grad der irreduziblen ganzen rationalen Funktion unter einer endlichen Schranke bleibt;

3. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der ersten Form, bei welchen der Grad der irreduziblen ganzen rationalen Funktion ins Unendliche wächst;

4. Produkte von endlich vielen Primfunktionen der zweiten Form;

5. Produkte von unendlich vielen Primfunktionen der zweiten Form.

Alle weiteren ganzen Funktionen zweier Veränderlichen können als Produkte von je zweien dieser Grundtypen angesehen werden, und zwar sind die möglichen Kombinationen: Typus 1 mit 4, 1 mit 5, 2 mit 4, 2 mit 5, 3 mit 4, 3 mit 5.

Der erste der angeführten Grundtypen stellt die ganzen rationalen Funktionen mit einem Exponentialfaktor vor; auf diesen einfachsten Typus wird hier nicht weiter eingegangen. Nur der zweite Grundtypus soll im folgenden näher untersucht werden. Die zu ihm gehörigen Funktionen werden kurz als „Funktionen der zweiten Art" bezeichnet.

§ 2. Eine spezielle Produktdarstellung der ganzen Funktionen zweiter Art.

Zur Untersuchung der ganzen Funktionen zweiter Art ist eine spezielle Form der Hahnschen Produktdarstellung zweckmäßig, die der Weierstraßschen Produktdarstellung ganzer Funktionen einer Veränderlichen völlig analog ist. Diese ist im wesentlichen in dem folgenden Satze von O. Biermann[1]) enthalten:

Wenn $g_\varkappa(x, y)$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ unendlich viele ganze rationale Funktionen sind, die im Nullpunkt einen Wert $a_{00}^{(\varkappa)} \neq 0$ haben und die Eigenschaft besitzen, daß in jedem im Endlichen gelegenen Kreisgebiet nur endlich viele von ihnen Nullstellen haben, so ist eine ganze Funktion, deren Nullstellen mit denen der Funktionen $g_\varkappa(x, y)$ zusammenfallen, in der Form darstellbar:

$$G(x, y) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ \frac{g_\varkappa(x, y)}{a_{00}^{(\varkappa)}} \cdot e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{g_\varkappa(x,y) - a_{00}^{(\varkappa)}}{-a_{00}^{(\varkappa)}} \right)^\lambda} \right\};$$

[1]) O. Biermann, Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen, Wiener Sitzungsberichte, Bd. 89 (1884).

Digitized by Google

$p_\varkappa$ ist dabei von der Art zu wählen, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} \left| \frac{g_\varkappa(x,y) - a_{00}^{(\varkappa)}}{-a_{00}^{(\varkappa)}} \right|^{p_\varkappa+1}$ für alle Wertsysteme x, y konvergiert, was stets möglich ist, da unter allen Umständen die Wahl $p_\varkappa = \varkappa - 1$ genügt.

Die eben ausgesprochene Eigenschaft der Funktionen $g_\varkappa(x,y)$, in jedem endlichen Kreisgebiet nur in endlicher Anzahl zu verschwinden, ist, wie Herr H. Hahn beim Beweise seines oben zitierten Satzes zeigt, eine notwendige und hinreichende Eigenschaft der Primfunktionen ganzer Funktionen von zwei Veränderlichen. Im folgenden wird nun wieder die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgesucht, daß unendlich viele ganze rationale Funktionen. deren Grad unter einer endlichen Schranke bleibt, diese Eigenschaft haben, also Primfunktionen für eine Funktion zweiter Art sind. Zu diesem Zweck werden die beiden Hilfssätze vorausgeschickt:

Hilfssatz 1. Jede von den unendlich vielen ganzen rationalen Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_{n-1}^{(\varkappa)} x^{n-1} + a_n^{(\varkappa)} x^n \; (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

hat wenigstens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) endlichen Schranke liegt, wenn

$$|a_0^{(\varkappa)}| < G, \quad |a_n^{(\varkappa)}| > g$$

ist, wo G und g positive Zahlen sind, während die Koeffizienten $a_1^{(\varkappa)}, \ldots a_{n-1}^{(\varkappa)}$ ganz beliebig sind, auch den Wert Null haben oder ins Unendliche wachsen oder gegen Null konvergieren können, wenn $\varkappa$ ins Unendliche wächst.

Sind nämlich $x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}, \ldots x_n^{(\varkappa)}$ die Nullstellen von

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots a_n^{(\varkappa)} x^n,$$

so ist

$$|x_1^{(\varkappa)} . x_2^{(\varkappa)} \ldots x_n^{(\varkappa)}| = \frac{|a_0^{(\varkappa)}|}{|a_n^{(\varkappa)}|} < \frac{G}{g};$$

daraus folgt, daß der absolute Betrag mindestens einer der Nullstellen kleiner als $\frac{G}{g}$ sein muß.

Hilfssatz 2. Jede von den unendlich vielen ganzen rationalen Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + \cdots + a_{n-1}^{(\varkappa)} x^{n-1} + a_n^{(\varkappa)} x^n \; (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

Digitized by Google

hat wenigstens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer (von $\varkappa$ unabhängigen) endlichen Schranke liegt, wenn

$$|a_0^{(\varkappa)}| < G, \quad |a_m^{(\varkappa)}| > g,$$

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{m+1}^{(\varkappa)} = 0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} a_{m+2}^{(\varkappa)} = 0, \ldots \lim_{\varkappa=\infty} a_n^{(\varkappa)} = 0$$

ist, wo $m = 1, 2, \ldots n$ sein kann [1]).

Nach dem 1. Hilfssatz hat nämlich jede der Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m$$

mindestens eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer endlichen Schranke Γ bleibt. Man faßt nun diese Funktionen als Funktionen n^{ten} Grades auf, indem man sie in der Form

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + 0 . x^{m+1} + \cdots + 0 . x^n$$

denkt. Da die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetige Funktionen der Koeffizienten sind, so ändern sich die Nullstellen dieser Funktionen beliebig wenig, die absoluten Beträge der oben hervorgehobenen Nullstellen bleiben also jedenfalls etwa kleiner als 2Γ, wenn man die Koeffizienten hinreichend wenig ändert, demnach auch wenn man die Funktionen

$$a_0^{(\varkappa)} + a_1^{(\varkappa)} x + \cdots + a_m^{(\varkappa)} x^m + a_{m+1}^{(\varkappa)} x^{m+1} + \cdots + a_n^{(\varkappa)} x^n$$

an die Stelle der obigen setzt, falls die Funktionen nur von einem so großen $\varkappa$ an, etwa für $\varkappa \geqq K$, betrachtet werden, daß die Koeffizienten $a_{m+1}^{(\varkappa)}, \ldots a_n^{(\varkappa)}$ entsprechend wenig von Null sich unterscheiden. Die endlich vielen Funktionen für $\varkappa < K$ haben aber jedenfalls je eine Nullstelle unter einer endlichen Schranke Γ'; ist also Γ'' die größere der beiden Zahlen 2Γ und Γ', so haben alle Funktionen der vorausgesetzten Art mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter Betrag kleiner als Γ'' ist.

$g_\varkappa(x, y)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ seien nun unendlich viele ganze rationale Funktionen, deren Grad unter einer endlichen Schranke bleibt. Jede dieser Funktionen kann in der Form angenommen werden:

$$g_\varkappa(x, y) = a_{00}^{(\varkappa)} + a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda,\lambda}^{(\varkappa)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Sollen nun diese Funktionen die Eigenschaft haben, daß in jedem Kreisgebiet um den Nullpunkt nur endlich viele von ihnen Nullstellen besitzen, so können nur endlich viele Koeffizienten $a_{00}^{(\varkappa)}$ den

[1]) Für $m = n$ ergibt sich Hilfssatz 1, der also nur ein spezieller Fall des zweiten ist.

Digitized by Google

Wert Null haben, da in diesem Falle stets der Nullpunkt Nullstelle ist. Die Funktionen $g_\varkappa(x, y)$ mit verschwindendem $a_{00}^{(\varkappa)}$ sollen als Funktionen $\overline{\gamma}_\varkappa$ von den anderen getrennt werden; diese können dann in der Form geschrieben werden:

$$g_\varkappa(x, y) = 1 - \gamma_\varkappa(x, y),$$

wobei

$$\gamma_\varkappa(x,y) = a_{10}^{(\varkappa)} x + a_{01}^{(\varkappa)} y + \cdots + a_{s0}^{(\varkappa)} x^s + \cdots + a_{s-\lambda,\lambda}^{(\varkappa)} x^{s-\lambda} y^\lambda + \cdots + a_{0s}^{(\varkappa)} y^s.$$

Nunmehr läßt sich die gesuchte Bedingung in dem Satze aussprechen:

Satz 30. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in jedem endlichen Kreisgebiet nur endlich viele von den Funktionen $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ Nullstellen haben, ist:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)} = 0 \text{ für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots s \\ \nu = 0, 1, \ldots s \end{cases} (\mu, \nu = 0, 0 \text{ ausgeschl.}).$$

Um die Bedingung als hinreichend zu erweisen, wird gezeigt, daß für alle Punkte x, y eines beliebig vorgelegten Kreisgebietes um den Nullpunkt mit den Radien R, R'

$$|\gamma_\varkappa(x, y)| < 1$$

bleibt von einem hinreichend großen $\varkappa$ ab.

Die Anzahl der Glieder in $\gamma_\varkappa(x, y)$ ist

$$\frac{s.(s+3)}{2} = q;$$

man wählt nun K so groß, daß für $\varkappa \geqq K$ gilt:

$$|a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{q\, R^\mu\, R'^\nu} \text{ für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots s \\ \nu = 0, 1, \ldots s \end{cases} (\mu, \nu = 0, 0 \text{ ausg.}).$$

Dann ist für $|x| \leqq R$, $|y| \leqq R'$:

$$|\gamma_\varkappa(x,y)| \leqq |a_{10}^{(\varkappa)} x| + |a_{01}^{(\varkappa)} y| + \cdots + |a_{s0}^{(\varkappa)} x^s| + \cdots + |a_{0s}^{(\varkappa)} y^s|$$
$$< \frac{R}{q\,R} + \frac{R'}{q\,R'} + \cdots + \frac{R^s}{q\,R^s} + \cdots + \frac{R'^s}{q\,R'^s} = 1.$$

Als notwendig wird die Bedingung erwiesen, indem sukzessive gezeigt wird, daß, wenn ein $\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}$ nicht existierte oder von Null

Digitized by Google

verschieden wäre, $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ für unendlich viele $\varkappa$ in einem für alle diese $\varkappa$ festen endlichen Kreisgebiet verschwinden müßte.

Setzt man

$$y = x^{s-1},$$

so geht $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$ in der Weise in eine ganze rationale Funktion von x über, daß die Glieder der ursprünglichen Funktion lauter Glieder mit verschiedenen Potenzen von x in der neuen Funktion liefern; man erhält, nach Potenzen von x geordnet:

$$\mathfrak{g}_\varkappa(x) = 1 - a_{10}^{(\varkappa)} x - a_{20}^{(\varkappa)} x^2 - \cdots - a_{s0}^{(\varkappa)} x^s - a_{01}^{(\varkappa)} x^{s+1} - \cdots$$
$$- a_{0,s-1}^{(\varkappa)} x^{s^2-1} - a_{1,s-1}^{(\varkappa)} x^{s^2} - a_{0s}^{(\varkappa)} x^{s^2+s}.$$

Ist x_0 eine Nullstelle dieser Funktion, so ist $x = x_0$, $y = x_0^{s+1}$ eine Nullstelle der Funktion $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$. Da mit $|x_0|$ auch $|x_0|^{s+1}$ unter einer endlichen Schranke bleibt, genügt es, zu zeigen, daß unendlich viele Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ Nullstellen hätten, deren absolute Beträge unter einer endlichen Schranke blieben, falls irgend einer der Grenzwerte $\lim_{\varkappa=\infty} a_{\mu\nu}^{(\varkappa)}$ nicht existierte oder von Null verschieden wäre. Dies gelingt mittels der vorausgeschickten Hilfssätze. Wäre nämlich nicht

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{0s}^{(\varkappa)} = 0,$$

so wäre

$$|a_{0s}^{(\varkappa)}| > g > 0 \text{ für unendlich viele } \varkappa.$$

Die diesen Werten $\varkappa$ entsprechenden Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ hätten dann nach dem ersten Hilfssatz mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter Betrag unter einer endlichen Schranke läge. Es muß also sein

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{0s}^{(\varkappa)} = 0.$$

Wäre nun nicht

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_{1,s-1}^{(\varkappa)} = 0,$$

sondern

$$|a_{1,s-1}^{(\varkappa)}| > g > 0 \text{ für unendlich viele } \varkappa,$$

so hätten die diesen Werten $\varkappa$ entsprechenden Funktionen $\mathfrak{g}_\varkappa(x)$ nach dem zweiten Hilfssatz mindestens je eine Nullstelle, deren absoluter

Digitized by Google

Betrag unter einer endlichen Schranke läge; es muß also sein

$$\lim_{\varkappa=\infty} a^{(\varkappa)}_{1,s-1} = 0.$$

Fährt man so fort, so erweisen sich sukzessive alle angegebenen Bedingungen als notwendig.

Nach dem oben angeführten Biermannschen Satze stellt das folgende unendliche Produkt eine ganze Funktion dar, deren Nullstellen zusammenfallen mit den Nullstellen der ganzen rationalen Funktionen $1 - \gamma_\varkappa(x, y)$:

$$G(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1 - \gamma_\varkappa(x,y)] . e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} (\gamma_\varkappa(x,y))^\lambda} \right\};$$

die allgemeine Form der ganzen Funktionen zweiter Art erhält man hieraus durch Hinzunahme von endlich vielen im Nullpunkt verschwindenden ganzen rationalen Funktionen sowie eines Exponentialfaktors. Dieses Resultat faßt der folgende Satz zusammen:

Satz 31. Jede ganze Funktion zweiter Art hat die Form:

$$G(x,y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} \bar{\gamma}_\varkappa(x,y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1 - \gamma_\varkappa(x,y)] e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda} (\gamma_\varkappa(x,y))^\lambda} \right\};$$

dabei ist $g(x,y)$ eine ganze rationale oder transzendente Funktion,

$$\bar{\gamma}_\varkappa(x,y) = c^{(\varkappa)}_{10} x + c^{(\varkappa)}_{01} y + \cdots + c^{(\varkappa)}_{r0} x^r + \cdots + c^{(\varkappa)}_{0r} y^r,$$

$$\gamma_\varkappa(x,y) = a^{(\varkappa)}_{10} x + a^{(\varkappa)}_{01} y + \cdots + a^{(\varkappa)}_{s0} x^s + \cdots + a^{(\varkappa)}_{0s} y^s,$$

und zwar haben die Koeffizienten $a^{(\varkappa)}_{\mu\nu}$ notwendig die Eigenschaft:

$$\lim_{\varkappa=\infty} a^{(\varkappa)}_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots s \\ \nu = 0, 1, \ldots s \ (\mu, \nu = 0, 0 \text{ ausg.}); \end{cases}$$

$p_\varkappa$ ist von der Art, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\gamma_\varkappa(x,y)|^{p_\varkappa+1}$ für alle x, y konvergiert.

Fehlt der äußere Exponentialfaktor, so werden die Funktionen „primitiv“ genannt; reicht ein endliches $p_\varkappa = p$ zur Konvergenz der Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\gamma_\varkappa(x,y)|^{p_\varkappa+1}$ hin, so werden die Funktionen als solche „von endlichem Range“ bezeichnet.

Digitized by Google

§ 3. Ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen.

Ein Versuch, die allgemeinen Funktionen zweiter Art im Anschluß an die entsprechenden Untersuchungen im Gebiete der Funktionen einer Veränderlichen weiter zu betrachten, führt auf erhebliche Schwierigkeiten; diese sind, wie sich im folgenden zeigen wird, nicht so sehr durch das Hinzutreten einer zweiten Veränderlichen an sich bedingt, als durch die Existenz nicht-linearer irreduzibler Polynome von zwei Veränderlichen. Es wird daher von hier ab der spezielle Fall der Funktionen zweiter Art weiter behandelt, bei welchem diese Schwierigkeiten nicht vorhanden sind: diejenigen ganzen Funktionen zweiter Art, bei welchen die rationalen Faktoren die Primfunktionen linear sind. Sie werden als „ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen" bezeichnet. Nach Satz 31 ist ihre allgemeine Form, wenn $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $c_\varkappa$, $d_\varkappa$ statt $a_{10}^{(\varkappa)}$, $a_{01}^{(\varkappa)}$, $c_{10}^{(\varkappa)}$, $c_{01}^{(\varkappa)}$ geschrieben wird:

$$G(x,y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} \left\{ [1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)] e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)^\lambda} \right\}; \quad (1)$$

dabei ist

$$\lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} b_\varkappa = 0;$$

$p_\varkappa$ ist so zu wählen, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p_\varkappa+1}$ für alle x, y konvergiert.

Funktionen dieser Art, die von endlichem Range sind, werden genauer als solche „vom mittleren [1]) Range p" bezeichnet, wenn $p_\varkappa = p$ die kleinste Zahl ist, für welche die eben angeführte Summe konvergiert.

In diesem Falle läßt sich die Bedingung der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y durch eine gleichwertige ersetzen:

Satz 32. Die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y ist gleichwertig mit der gleichzeitigen Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$.

[1]) Diese Bezeichnung wird sich später (§ 8) rechtfertigen.

Digitized by Google

Aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y ergibt sich nämlich diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$, indem man für x, y speziell 1, 0 bezw. 0, 1 setzt [1]).

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$ diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y und hieraus, wie leicht zu sehen [2]), diejenige von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa x| + |b_\varkappa y|)^{p+1}$ und umsomehr von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y.

Für später mag hier noch bemerkt werden, daß auch die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa x| + |b_\varkappa y|)^{p+1}$ für alle x, y, sowie die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} (|a_\varkappa| + |b_\varkappa|)^{p+1}$ mit der Konvergenz von $\sum_{=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y äquivalent ist.

§ 4. Beziehungen zwischen ganzen Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen, die von endlicher Ordnung, und solchen, die von endlichem Range sind.

Für die nun gewonnenen speziellen Funktionen läßt sich der folgende Satz beweisen:

Satz 33. Eine ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlichem Range, wenn sie von endlicher Ordnung ist.

---

[1]) Dies gilt auch für mit x ins Unendliche wachsende $p_\varkappa$.

[2]) Durch vollständige Induktion ergibt sich nämlich der folgende Satz: Sind $u_\nu, v_\nu, \ldots t_\nu$ und s positive Zahlen, so folgt aus der gleichzeitigen Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^s$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu^s, \ldots \sum_{\nu=1}^{\infty} t_\nu^s$ diejenige von $\sum_{\nu=1}^{\infty} (u_\nu + v_\nu + \cdots + t_\nu)^s$ und umgekehrt.

Digitized by Google

Die Funktionen der zu betrachtenden Art sind von der Form, wie sie Gleichung (1) in § 3 angibt. Setzt man daselbst $y = 0$, so wird

$$G(x, o) = e^{g(x,o)} x^k \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} c_\varkappa \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1 - a_\varkappa x)\, e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x)^\lambda} \text{ [1)]},$$

also eine ganze Funktion von x in der Weierstraßschen Produktform, da die Zahlen $a_\varkappa$ gegen Null konvergieren und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ konvergiert (vergl. die erste Fußnote zu Satz 32). Da aber $G(x, o)$ mit $G(x, y)$ von endlicher Ordnung ist,[2]) ist es nach einem Satze über ganze Funktionen einer Veränderlichen auch von endlichem Range, d. h. es konvergiert $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ für ein endliches $p_\varkappa = p_1$.

Ebenso ergibt sich aus der Betrachtung der Funktion $G(o, y)$ die Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p_\varkappa+1}$ für ein endliches $p_\varkappa = p_2$.

Ist p die größere der beiden Zahlen p_1, p_2, so konvergieren die Reihen $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$ gleichzeitig und damit nach Satz 32 die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa x + b_\varkappa y|^{p+1}$ für alle x, y, d. h. $G(x, y)$ ist von endlichem Range.

---

[1]) Sind unter den Zahlen $c_\varkappa$ solche mit dem Werte Null vorhanden, so erhält man dasselbe Resultat durch Herausnahme der betreffenden Faktoren, die durchaus unwesentlich sind. Der Satz könnte ja etwas umfassender so formuliert werden: Eine ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlichem Range, wenn das letzte Produkt ihrer Darstellung von endlicher Ordnung ist.

[2]) $\underset{|x|=r}{\text{Max}} |G(x, o)| \equiv \underset{\substack{|x|=r \\ |y|=o}}{\text{Max}} |G(x, y)| < \underset{\substack{|x|=r \\ |y|=r' \neq o}}{\text{Max}} |G(x, y)|$

$< e^{r^a + r'^b}$ im Falle der Endlichkeit der Ordnung von $G(x, y)$,

$< e^{r^A}$ für $A > a$ und hinreichend große r.

Eingehende Untersuchungen über die Ordnung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen, die aus einer ganzen Funktion zweier Veränderlichen hervorgeht, indem man einer Veränderlichen einen konstanten Wert erteilt, finden sich bei J. Sire, Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, t. 31 (1911).

Digitized by Google

Während der eben bewiesene Satz für primitive und nichtprimitive ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen gilt, werden von jetzt ab nur primitive Funktionen dieser Art betrachtet.

Zur Auffindung weiterer Beziehungen zwischen Rang und Ordnung dienen die beiden folgenden Hilfssätze [1]), welche die Abschätzung des absoluten Betrages einer Primfunktion bezw. eines endlichen Produktes von Primfunktionen gestatten:

Hilfssatz 1. Ist

$$E_p(u) = (1-u)\, e^{\sum_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda} u^\lambda} \qquad (p \geqq 1),$$

so hat man für jedes von Null verschiedene u und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$:

$$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} |u|^{p+\alpha}},$$

wo $c_{p,\alpha}$ eine lediglich von p und α abhängige positive Zahl bedeutet.

Hilfssatz 2. Ist

$$E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = \begin{cases} 1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y) & \text{für } p = 0 \\ [1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\sum_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)^\lambda} & \text{für } p \geqq 1, \end{cases}$$

so hat man, wenn δ, δ', ε, ε' irgendwelche positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen):

$$\left| \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{m} E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y) \right| > e^{\varepsilon |x|^{p+\delta} + \varepsilon' |y|^{p+\delta'}}$$

für $|x|^2 + |y|^2 > R^2$.

Beweis für den Fall $p = 0$: Nach Satz 4 ist für $n > k$:

$$\left| \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \right| < |x|^n + |y|^n \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_n^2.$$

Anderseits kann zu allen positiven Zahlen ε, ε', δ, δ' und n eine Zahl R' so bestimmt werden, daß man für $|x|^2 + |y|^2 > R'^2$ hat:

$$|x|^n + |y|^n < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^\delta + \frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \text{ [2])}.$$

---

[1]) Vergl. A. Pringsheim, a. a. O. p. 299, 300; Hilfssatz 1 ist wörtlich übernommen, daher sein Beweis nicht angeführt.

[2]) Zum Beweise unterscheidet man die Fälle *a)* $|x| \geqq |y|$, *b)* $|x| \leqq |y|$. Da zu allen positiven Werten ε, δ, n eine untere Schranke für $|x|$ bestimmt werden kann, von welcher ab

$$e^{\varepsilon |x|^\delta} > |x|^n$$

Digitized by Google

Ist also R'' die größere der beiden Zahlen R_n, R', so ist:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x+d_\varkappa y)\right|<e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^\delta+\frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R''^2. \quad (1)$$

In derselben Weise findet man eine Zahl R''', so daß man hat:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{m}E_p(a_\varkappa x+b_\varkappa y)\right|<e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|^\delta+\frac{\varepsilon'}{2}|y|^{\delta'}} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R'''^2. \quad (2)$$

Ist R die größere der beiden Zahlen R'', R''', so erhält man durch Multiplikation der Ungl. (1) und (2) die Behauptung im Falle $p=0$.

Beweis für den Fall $p\geqq 1$: Man zerlegt:

$$\prod_{\varkappa=1}^{m}E_p(a_\varkappa x+b_\varkappa y)=P_m(x,y).e^{g_p(x,y)},$$

wo

$$P_m(x,y)=\prod_{\varkappa=1}^{m}[1-(a_\varkappa x+b_\varkappa y)],$$

$$g_p(x,y)=\sum_{\varkappa=1}^{m}\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}(a_\varkappa x+b_\varkappa x)^\lambda.$$

Nun bestimmt man ähnlich wie oben R_1 so, daß man hat:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x+d_\varkappa y)\right|<e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta}+\frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R_1^2, \quad (3)$$

R_2 so, daß man hat:

$$|P_m(x,y)|<e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta}+\frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \text{ für } |x|^2+|y|^2>R_2^2, \quad (4)$$

---

ist, so läßt sich im Falle *a*) P_1 so bestimmen, daß

$$e^{\varepsilon|x|^\delta}>2|x|^n\geqq|x|^n+|y|^n \text{ für } |x|>P_1;$$

im Falle *b*) läßt sich P_2 so bestimmen, daß

$$e^{\varepsilon'|y|^{\delta'}}>2|y|^n\geqq|x|^n+|y|^n \text{ für } |y|>P_2.$$

Ist R' das $\sqrt{2}$-fache der größeren der beiden Zahlen P_1, P_2, so gilt für $|x|^2+|y|^2>R'^2$:

$$|x|^n+|y|^n<\begin{Bmatrix}e^{\varepsilon|x|^\delta} & \text{im Falle } a)\\ e^{\varepsilon'|y|^{\delta'}} & \text{im Falle } b)\end{Bmatrix} \text{ also } <e^{\varepsilon|x|^\delta+\varepsilon'|y|^{\delta'}} \text{ in beiden Fällen.}$$

Digitized by Google

endlich nach Satz 4, Zus. 1 R_3 so, daß man hat:

$$|g_p(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}$$

also

$$|e^{g_p(x,y)}| \leqq e^{|g_p(x,y)|} < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{p+\delta}+\frac{\varepsilon'}{3}|y|^{p+\delta'}} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R_3^2. \quad (5)$$

Ist R die größte der drei Zahlen R_1, R_2, R_3, so ergibt sich die Behauptung durch Multiplikation der Ungl. (3), (4), (5).

Mittels der beiden Hilfssätze ergibt sich der folgende Satz, der eine Ausdehnung eines Satzes von Poincaré[1]) auf Funktionen von zwei Veränderlichen vorstellt:

Satz 34. Ist

$$P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x + d_\varkappa y)\prod_{\varkappa=1}^{\infty}E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

wo $E_p(a_\varkappa x + b_\varkappa y)$ wieder die im letzten Hilfssatz angegebene Bedeutung hat, eine primitive ganze Funktion vom mittleren Range $p \geqq 0$, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$|P(x,y)| < e^{\varepsilon|x|^{p+1}+\varepsilon'|y|^{p+1}} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R^2.$$

Der Beweis wird hier unterlassen, da später (§ 9) ein allgemeinerer Satz auf verallgemeinerter Grundlage abgeleitet werden wird.

Aus dem Satze 34 ergibt sich unmittelbar der folgende:

Satz 35. Eine primitive ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen ist von endlicher Ordnung, wenn sie von endlichem Range ist.

§ 5. Eine Klasse von Funktionen zweiter Art, die sich auf Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen zurückführen lassen.

Auf ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen lassen sich primitive ganze Funktionen zweiter Art $G(x,y)$ zurückführen von folgender Form:

$$G(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k}[c_\varkappa P(x)+d_\varkappa Q(y)]\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\Big\{\Big(1-[a_\varkappa P(x)+b_\varkappa Q(y)\Big)e^{\sum_{\lambda=1}^{p_\varkappa}\frac{1}{\lambda}[a_\varkappa P(x)+b_\varkappa Q(y)]^\lambda}$$

wo $P(x)$ und $Q(y)$

[1]) H. Poincaré, Sur les fonctions entières, Bull. de la soc. math. de France, T. 11 (1883) p. 136.

Die etwas abweichende Formulierung im Texte entspricht genau derjenigen, welche A. Pringsheim a. a. O. p. 301 dem betr. Satz gegeben hat.

Digitized by Google

Polynome in x bezw. y sind und $p_\varkappa$ von der Art, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa P(x) + b_\varkappa Q(y)|^{p_\varkappa+1}$$

für alle x, y konvergiert.

Mit Benützung von I § 4 ergibt sich:

Satz 36. Die Funktion $G(x, y)$ ist von endlichem Range, wenn sie von endlicher Ordnung ist, und umgekehrt.

§ 6. Über allgemeine Diagonalen von Doppelreihen.

Die Untersuchungen des nächsten Paragraphen erfordern einige Betrachtungen über Diagonalen von Doppelreihen, welche unter irgendwelchen Winkeln verlaufen.

Es wird das nachfolgende Schema zu Grunde gelegt:

$$\begin{aligned}
&a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + a_3^{(0)} + \cdots\cdots a_\mu^{(0)} + \cdots \\
&+ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \cdots \\
&+ a_0^{(2)} + a_1^{(2)} + \cdots \\
&+ a_0^{(3)} + \cdots \\
&+ \cdots \\
&+ \cdot\cdot \\
&+ a_0^{(\nu)} + \cdots \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

Unter einer Diagonale wird die Reihe von Gliedern $a_\mu^{(\nu)}$ verstanden, deren Indices μ, ν der Gleichung

$$n\mu + m\nu = l \qquad (1)$$

genügen, wo n, m positive ganze Zahlen sind, die stets relativ prim angenommen werden, l eine weitere positive ganze Zahl.[1]) Die durch n, m, l (in dieser Reihenfolge) festgelegte Diagonale wird mit $d^{(n,m,l)}$ bezeichnet.

[1]) Eine Diagonale braucht nicht gerade ein Element der ersten Zeile mit einem solchen der ersten Kolonne zu verbinden; Diagonalen dieser Art haben in obiger Bezeichnung die Form $d^{(n,m,l)}$, wo l sowohl m wie n als Faktor enthält; speziell erhalten die unter 45° verlaufenden Diagonalen die Form $d^{(1,1,l)}$.

Digitized by Google

Nach Gleichung (1) haben die Glieder der Diagonale $d^{(n,m,l)}$ die Form

$$a_\mu^{(\nu)} = a_\mu^{\left(\frac{l-n\mu}{m}\right)};$$

wenn festgesetzt wird, daß dieses Zeichen stets den Wert Null bedeutet, so oft $\frac{l-n\mu}{m}$ keine ganze Zahl ist, hat man:

$$d^{(n,m,l)} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{l}{n}\right]} a_\mu^{\left(\frac{l-n\mu}{m}\right)},$$

wo $\left[\frac{l}{n}\right]$ die größte ganze Zahl in $\frac{l}{n}$ bedeutet. Die Summe aller Glieder, welche durch $d^{(n,m,l)}$ (dessen Glieder eingeschlossen) von dem Schema abgetrennt werden, ist (nach parallelen Diagonalen geordnet):

$$\sum_{\lambda=0}^{l} d^{(n,m,l)} = \sum_{\lambda=0}^{l} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} a_\mu^{\left(\frac{\lambda-n\mu}{m}\right)}.$$

Für später ist noch die Bedeutung der Zahlen $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ in dem Schema wichtig. Denkt man sich in dieses auch Terme $a_\mu^{(\nu)}$ mit gebrochenen Indices eingeordnet, derart, daß die Werte der Indices μ, ν den senkrechten Abständen des Punktes, den der Term einnimmt, von der ersten Kolonne bezw. Zeile proportional sind, so ergibt die analytisch-geometrische Auffassung der Gleichung (1), daß $d^{(n,m,l)}$ vom Term $a_{\frac{l}{n}}^{(0)}$ zum Term $a_0^{\left(\frac{l}{m}\right)}$ läuft. Durch $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ist also eine Diagonale ihrer Lage nach unmittelbar charakterisiert.

§ 7. Verallgemeinerung der Produktdarstellung ganzer Funktionen endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen.

Um bei ganzen Funktionen zweier Veränderlichen mit wesentlich linearen Primfunktionen das eigentliche Analogon zum Range, sowie das Analogon zum Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen zu gewinnen, muß die bisherige Biermannsche Produktdarstellung verallgemeinert werden.

Digitized by Google

Die Konvergenz des unendlichen Produktes [1])

$$\prod_{\varkappa=1}^{\infty}(1-\gamma_\varkappa)\, e^{\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda}$$

für alle x, y ergab sich so: Zu jedem endlichen Kreisgebiet existiert eine Zahl k, so daß $1-\gamma_\varkappa$ für $\varkappa > k$ nicht mehr verschwindet und somit in die Form gesetzt werden kann:

$$1-\gamma_\varkappa = e^{-\Gamma_\varkappa},$$

wo

$$\Gamma_\varkappa = \gamma_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa^2 + \frac{1}{3}\gamma_\varkappa^3 + \cdots \tag{1}$$

ist. Der Exponent $\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda$ des beigefügten Exponentialfaktors trennt von $-\Gamma_\varkappa$ so viele Glieder ab, daß Konvergenz eintritt.

Man kann nun $\Gamma_\varkappa$ in eine Doppelreihe anordnen:

$$\begin{aligned}\Gamma_\varkappa = 0 \quad &+ a_\varkappa x \quad + \frac{1}{2}a_\varkappa^2 x^2 + \frac{1}{3}a_\varkappa^3 x^3 + \cdots\\ &+ b_\varkappa y \quad + a_\varkappa b_\varkappa x y + a_\varkappa^2 b_\varkappa x^2 y + \cdots\\ &+ \frac{1}{2}b_\varkappa^2 y^2 + a_\varkappa b_\varkappa^2 x y^2 + \cdots\\ &+ \frac{1}{3}b_\varkappa^3 y^3 + \cdots\\ &+ \cdots\end{aligned} \tag{2}$$

Eine unter 45^0 verlaufende Diagonale trennt von $\Gamma_\varkappa$ die Glieder ab, welche $\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{1}{\lambda}\gamma_\varkappa^\lambda$ enthält.[2]) Es zeigt sich aber, daß auch

[1]) $\gamma_\varkappa$ soll dabei die bisherige Bedeutung haben:

$$\gamma_\varkappa = a_\varkappa x + b_\varkappa y.$$

[2]) Darin, daß bei Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen, also bei linearem $\gamma_\varkappa$ jedes Glied $\frac{1}{n}\gamma_\varkappa^n$ der Reihe (1) gerade die Terme einer unter 45^0 verlaufenden Diagonale der Doppelreihe (2) liefert, liegt im wesentlichen die einfache und für die gegenwärtigen Untersuchungen günstige Natur dieser speziellen Art von Funktionen. Anderseits bereitet eben schon bei Funktionen mit unendlich vielen quadratischen Primfunktionen der Umstand die Hauptschwierigkeit, daß bei der Ausbreitung der Reihe (1) in eine Doppelreihe ein Term dieser letzteren im allgemeinen aus Beiträgen mehrerer Glieder der Reihe (1) sich zusammensetzt.

Digitized by Google

durch andere Diagonalen Funktionen von $\Gamma_\varkappa$ abgetrennt werden können, welche, an Stelle von $\sum_{\lambda=1}^{p} \frac{1}{\lambda} \gamma_\varkappa^\lambda$ in das unendliche Produkt gesetzt, Konvergenz desselben herbeiführen.

Das dem Glied $a_\mu^{(\nu)}$ im Schema des vorigen Paragraphen entsprechende Glied der Doppelreihe (2) erhält die Gestalt:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}(a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu;$$

daher ist in der Bezeichnung des vorigen Paragraphen:

$$d^{(n,m,l)} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{l}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu}\binom{\mu+\nu}{\nu}(a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu,$$

wo

$$\nu = \frac{l - n\mu}{m}$$

ist, und alle Glieder gleich Null zu setzen sind, bei welchen ν nicht ganzzahlig ist.

Für die durch $d^{(n,m,l)}$ von der Doppelreihe abgetrennte ganze rationale Funktion $\sum_{\lambda=1}^{l} d^{(n,m,\lambda)}$ wird im folgenden die Bezeichnung $\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}$ gebraucht.

Satz 37. Ist

$$\gamma_\varkappa = a_\varkappa x + b_\varkappa y, \quad \lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} b_\varkappa = 0$$

und sind n, m, l derart bestimmte positive ganze Zahlen, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

konvergieren, so konvergiert das unendliche Produkt

$$P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1-\gamma_\varkappa)\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}}$$

unbedingt und gleichmäßig in jedem im Endlichen gelegenen Bereich.

Ein Radius R sei beliebig gewählt; dann wird die unbedingte und gleichmäßige Konvergenz des unendlichen Produktes in dem Kreisgebiet $|x| < R$, $|y| < R$ nachgewiesen.

Digitized by Google

Man bestimmt k so groß (was wegen $\lim_{\varkappa=\infty} a_\varkappa = 0$, $\lim_{\varkappa=\infty} b_\varkappa = 0$ möglich ist), daß für $\varkappa > k$ innerhalb des gewählten Kreisgebietes die Ungleichung erfüllt ist:

$$|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < \vartheta < 1. \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$|a_\varkappa x + b_\varkappa y| < 1\ ^{1}). \tag{4}$$

Demnach ist

$$\prod_{\varkappa=k+1}^{\infty} (1-\gamma_\varkappa)\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}} = \prod_{\varkappa=k+1}^{\infty} e^{-\Gamma_\varkappa + \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}} = e^{-\sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} (\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)})},$$

wobei $\Gamma_\varkappa$ wieder die Bedeutung hat:

$$\Gamma_\varkappa = \gamma_\varkappa + \frac{1}{2}\gamma_\varkappa^2 + \frac{1}{3}\gamma_\varkappa^3 + \cdots$$

Da im oben angegebenen Sinne

$$\gamma_\varkappa^{(m,n,l)} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu$$

ist, so erhält man:

$$\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(m,n,l)} = \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (a_\varkappa x)^\mu (b_\varkappa y)^\nu.$$

Durch die Substitution

$$a_\varkappa = \alpha_\varkappa^n,\ x = \xi^n,\ b_\varkappa = \beta_\varkappa^m,\ y = \eta^m \tag{5}$$

---

[1]) Ungl. (3) kann nämlich nur dadurch erfüllt sein, daß

$$|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} < \sigma,\ |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < 1-\sigma$$

ist, wo $\sigma < 1$ ist. Daher ist:

$$|a_\varkappa x| \leqq |a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}},\ \text{da } n \geqq 1,$$

$$|b_\varkappa y| \leqq |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}},\ \text{da } m \geqq 1,$$

also

$$|a_\varkappa x + b_\varkappa y| \leqq |a_\varkappa x| + |b_\varkappa y| \leqq |a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}} < 1.$$

Digitized by Google

ergibt sich:

$$|\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| = \left| \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} (\alpha_\varkappa \xi)^{n\mu} (\beta_\varkappa \eta)^{m\nu} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} \frac{1}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu}{\nu} |\alpha_\varkappa \xi|^{n\mu} |\beta_\varkappa \eta|^{m\nu} <$$

$$< \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{\lambda}{n}\right]} 1 \cdot \binom{n\mu+m\nu}{m\nu} |\alpha_\varkappa \xi|^{n\mu} |\beta_\varkappa \eta|^{m\nu}.$$ [1])

Indem man alle zur $(n\mu + m\nu)^{\text{ten}}$, d. h., λ^{ten} Potenz fehlenden Glieder ergänzt und sodann Bedingung (3) beachtet, ergibt sich weiter:

$$|\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \sum_{\lambda=l+1}^{\infty} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda$$

$$= (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^{l+1} \cdot \frac{1}{1-(|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)} <$$

$$< (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^{l+1} \cdot \frac{1}{1-\vartheta}.$$

Folglich ist:

$$\sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} |\Gamma_\varkappa - \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \frac{1}{1-\vartheta} \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^{l+1} <$$

$$< \frac{1}{1-\vartheta} \sum_{\varkappa=k+1}^{\infty} \left(|\alpha_\varkappa| R^{\frac{1}{n}} + |\beta_\varkappa| R^{\frac{1}{m}} \right)^{l+1}.$$

Damit ist die nachzuweisende unbedingte und gleichmäßige Konvergenz auf die Konvergenz der letzten Summe zurückgeführt. Diese Summe konvergiert aber nach einem bereits angeführten Satze über Reihen (siehe zweite Fußnote zu Satz 32), da

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\alpha_\varkappa|^{l+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$$

[1]) Es gilt nämlich, wie leicht zu beweisen ist, für $n \geqq 1$, $m \geqq 1$:

$$\binom{\mu+\nu}{\nu} \leqq \binom{n\mu+m\nu}{m\nu}.$$

Digitized by Google

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |\beta_\varkappa|^{l+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

als konvergent vorausgesetzt sind.

Der bewiesene Satz liefert sofort den folgenden, der die angekündigte Verallgemeinerung der Biermannschen Produktdarstellung im Falle wesentlich linearer Primfunktionen angibt:

Satz 38. Die allgemeinste ganze Funktion endlichen Ranges mit den Primfunktionen

$$1 - \gamma_\varkappa = 1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)$$

und

$$\bar{\gamma}_\varkappa = c_\varkappa x + d_\varkappa y$$

läßt sich in der Form darstellen:

$$G(x,y) = e^{g(x,y)} \prod_{\varkappa=1}^{k} \bar{\gamma}_\varkappa \prod_{\varkappa=1}^{\infty} (1-\gamma_\varkappa)\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}};$$

dabei sind n, m, l so zu bestimmende positive ganze Zahlen, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} \quad \text{und} \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$$

konvergieren.

§ 8. Analoga zum Range und Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen; Rangsystem und Grenzwinkel.

Von allen Wertsystemen n, m, l, welche den im letzten Satze angegebenen Bedingungen genügen, sollen diejenigen ausgewählt werden, bei welchen n, m noch beliebig (relativ prim) sind, l aber die kleinste ganze Zahl ist, für die die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} \quad \text{und} \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}} \tag{1}$$

konvergieren. Für jedes solche Wertsystem n, m, l betrachtet man die beiden Zahlen $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$. Die Gesamtheit aller dieser Zahlenpaare $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ wird als „Rangsystem“ der ganzen Funktion bezeichnet; sie stellt das Analogon zum Range bei ganzen Funktionen einer Veränderlichen vor.

Digitized by Google

Das Rangsystem einer ganzen Funktion enthält natürlich stets das Zahlenpaar p, p, wenn p ihr mittlerer Rang ist; denn wählt man $n = 1$, $m = 1$, so hat die kleinste Zahl l, für welche die beiden Reihen (1) konvergieren, den Wert p, da der mittlere Rang als die kleinste ganze Zahl p definiert ist, für welche

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{p+1}$$

konvergieren.

Bei ganzen Funktionen einer Veränderlichen mit den reziproken Nullstellen $a_\varkappa$ wird ausgehend vom Range p, der durch die Eigenschaft definiert ist, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^p$ divergiert, $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{p+1}$ konvergiert, unter Aufgabe des ganzzahligen Charakters der Grenzexponent ρ durch die Eigenschaft definiert, daß für jedes positive ε $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho-\varepsilon}$ divergiert, $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho+\varepsilon}$ konvergiert.

Das analoge Verfahren ist hier folgendes: Man bestimmt zu jedem von allen möglichen positiven Wertepaaren m, n, die nun nicht mehr notwendig ganzzahlig sind, eine positive Zahl s derart, daß die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{s}{n}+\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{s}{m}+\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ konvergieren, während von den Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{s}{n}-\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{s}{m}-\varepsilon}$$

wenigstens eine divergiert. Die so gefundenen Zahlen $\frac{s}{n}$, $\frac{s}{m}$ werden mit ρ bezw. ρ' bezeichnet. Die Gesamtheit aller Zahlenpaare ρ, ρ' stellt das Analogon zum Grenzexponenten der Funktionen einer Veränderlichen vor. Die dadurch definierte Funktion $\rho' = \varphi(\rho)$ hätte man der bisherigen Bezeichnungsweise folgend als Grenzexponentenfunktion, ihr geometrisches Bild als Grenzexponentenkurve zu bezeichnen. Es zeigt sich aber unmittelbar, daß diese Gebilde ausgearteter Natur sind; die Grenzexponentenkurve ist stets ein rechter Winkel mit parallel zu den Achsen verlaufenden Schenkeln. Daher wird weiterhin die kürzere Bezeichnung „Grenzwinkel“ gebraucht. Der Scheitel des Grenzwinkels ist ein Punkt

Digitized by Google

ρ_0, ρ_0', dessen Koordinaten durch die Eigenschaft definiert sind, daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0-\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\varrho_0'-\varepsilon}$$

divergieren, dagegen die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0+\varepsilon} \text{ und } \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\varrho_0'+\varepsilon}$$

konvergieren [1]).

Rangsystem und Grenzwinkel stehen in folgender Beziehung, die sich am einfachsten geometrisch formulieren läßt:

Satz 39. Die Punkte, welche die Wertepaare des Rangsystems repräsentieren, $\left(\text{Punkte mit den Koordinaten } \frac{l}{n}, \frac{l}{m}\right)$ liegen, vom Anfang aus gesehen, diesseits des Grenzwinkels oder auf ihm, die Punkte, welche die Wertepaare $\frac{l+1}{n}, \frac{l+1}{m}$ repräsentieren, dagegen jenseits des Grenzwinkels oder auf ihm. [2])

Ist nämlich $\frac{l}{n} > \rho_0$, so konvergiert $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l}{n}}$, es muß also $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l}{m}}$ divergieren, da l die kleinste Zahl ist, für welche $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$ konvergieren.

Wenn aber $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l}{m}}$ divergiert, ist $\frac{l}{m} \leqq \rho_0'$. Ebenso ergibt sich $\frac{l}{n} \leqq \rho_0$, wenn $\frac{l}{m} > \rho_0'$ ist.

Anderseits muß aber $\frac{l+1}{n} \geqq \rho_0$, $\frac{l+1}{m} \geqq \rho_0'$ sein, weil $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}}$ und $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}$ konvergieren.

---

[1]) Das Wertepaar ρ_0, ρ_0' läßt sich natürlich von vornherein bestimmen, und daraus können alle möglichen Wertepaare ρ, ρ' gewonnen werden; die obige Darstellung ist gewählt, um die Analogie mit den Verhältnissen bei Funktionen einer Veränderlichen deutlicher hervortreten zu lassen.

[2]) Der Satz stellt das Analogon zur Beziehung $p \leqq \rho \leqq p+1$ zwischen dem Range p und dem Grenzexponenten ρ einer Funktion einer Veränderlichen vor.

Digitized by Google

§ 9. Beziehungen zwischen der Ordnungskurve einer ganzen Funktion endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen und dem Rangsystem bezw. Grenzwinkel dieser Funktion.

Nach den vorausgegangenen Vorbereitungen soll die Lösung der eigentlichen Aufgabe dieses Abschnittes, die schon in § 4 begonnen wurde, fortgesetzt werden. Zunächst ergibt sich in einfacher Weise die folgende Beziehung zwischen Grenzwinkel und Ordnungskurve.

Satz 40. Die Ordnungskurve einer ganzen Funktion $G(x, y)$ endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen kann, vom Anfang aus gesehen, nur jenseits des Grenzwinkels verlaufen oder mit ihm zusammenfallen.

Ein beliebiges Ordnungspaar der Funktion $G(x, y)$ sei α, α', der Scheitel ihres Grenzwinkels Punkt ρ_0, ρ_0'. Dann ist zu zeigen, daß

$$\alpha \geqq \rho_0, \quad \alpha' \geqq \rho_0'$$

ist. Um etwa die erste Relation abzuleiten, betrachtet man die Funktion $G(x, o)$; deren Ordnung sei $\bar{\alpha}$, ihr Grenzexponent $\bar{\rho}$. Man hat nun zunächst:

$$\alpha \geqq \bar{\alpha}; \tag{1}$$

denn aus der Ungleichung, welche α, α' als Ordnungspaar von $G(x, y)$ definiert:

$$\overline{G}(r, r') < e^{r^{\alpha+\delta}+r'^{\alpha'+\delta'}} \text{ für } r^2 + r'^2 > R^2_{\delta,\delta'}$$

folgt:

$$\overline{G}(r, o) < e^{r^{\alpha+\delta}} \text{ für } r^2 > R^2_{\delta,\delta'} \text{ oder } r > R_{\delta,\delta'}.$$

Sodann hat man, da die Ordnung einer ganzen Funktion einer Veränderlichen nicht kleiner ist als ihr Grenzexponent:

$$\bar{\alpha} \geqq \bar{\rho}. \tag{2}$$

Endlich ist

$$\bar{\rho} = \rho_0; \tag{3}$$

denn $\bar{\rho}$ ist durch dieselbe Eigenschaft definiert wie ρ_0, nämlich dadurch, daß $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{-\bar{\varrho}+\varepsilon}$ konvergiert, $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{-\bar{\varrho}-\varepsilon}$ divergiert[1]). Aus den Relationen (1), (2), (3) folgt die erste der behaupteten Relationen. In derselben Weise ergibt sich die zweite.

[1]) Dies ergibt sich, in dem man die Darstellung von $G(x, o)$ betrachtet, welche aus der im Satz 38 angegebenen Darstellung von $G(x, y)$ folgt.

Digitized by Google

Hieran ließe sich möglicherweise der Nachweis schließen, daß für eine primitive ganze Funktion endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen der Grenzwinkel vollständig mit der Ordnungskurve zusammenfällt, falls vorausgesetzt wird, daß die Ordnungskurve ein rechter Winkel ist. Allein die Entscheidung der Frage, wann dies zutrifft, oder ob es etwa von selbst aus der vorausgesetzten wesentlich linearen Natur der Primfunktionen folgt, scheint große Schwierigkeiten zu bieten.

Es soll hier ein anderer Weg betreten werden, um — wenigstens unter gewissen Umständen — die Identität von Grenzwinkel und Ordnungskurve festzustellen. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich nämlich zeigen, daß die dazu nötige Ergänzung des Satzes 40 gilt, nämlich daß die Ordnungskurve vom Anfang aus gesehen stets diesseits des Grenzwinkels liegt oder mit ihm zusammenfällt. Allerdings sind hiezu ziemlich umfangreiche Vorbereitungen notwendig; es müssen die Untersuchungen, wie sie in § 4 begonnen wurden, der verallgemeinerten Produktdarstellung (§ 7) angepaßt werden. Zunächst soll dies mit den beiden in § 4 angeführten Hilfssätzen geschehen.

Hilfssatz 1. Ist

$$E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}(x,y)},$$

so hat man für $0 < \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} \leqq 1$ [1] und $|x|^2 + |y|^2 > R^2$:

$$|E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y)| < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{l+\alpha}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{l+\beta}{m}}}.$$

Es ist nämlich

$$|1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)| \leqq 1 + |a_\varkappa x| + |b_\varkappa y| < (1 + |a_\varkappa x|)(1 + |b_\varkappa y|). \quad (4)$$

Da nun allgemein für positive und hinreichend große u die Beziehung

$$1 + u < e^{u^\varepsilon}$$

besteht, so ist

$$1 + |a_\varkappa x| < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } |x| > R_1,\ 1 + |b_\varkappa y| < e^{|b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |y| > R_2,$$

also

$$(1 + |a_\varkappa x|)(1 + |b_\varkappa y|) < e^{|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |x| > R_1,\ |y| > R_2. \quad (5)$$

[1]) Darin, daß hier das Gleichheitszeichen ausgeschlossen wird, liegt eine wesentliche Beschränkung dieses Satzes gegenüber dem entsprechenden früheren. Doch reicht diese Form für die folgenden Anwendungen hin.

Digitized by Google

Ist $|y| \leqq R_2$, so gilt

$$1 + |b_\varkappa y| < 1 + |a_\varkappa x| \text{ für } |x| > R_1';$$

also ist

$$(1 + |a_\varkappa x|)(1 + |b_\varkappa y| < e^{2|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}}} \text{ für } |x| > \begin{cases} R_1 \\ R_1' \end{cases}, \; y \leqq R_2. \quad (6)$$

Ebenso ergibt sich:

$$(1+|a_\varkappa x|)(1+|b_\varkappa y|) < e^{2|b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}} \text{ für } |x| \leqq R_1, \; |y| > \begin{cases} R_2 \\ R_2' \end{cases}. \quad (7)$$

Aus den Relationen folgt:

$$|1-(a_\varkappa x + b_\varkappa y)| < e^{\left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > \overline{R}^2,$$

wenn $\overline{R}^2$ die größte der drei Zahlen $R_1^2 + R_2^2$, $R_1'^2 + R_2^2$, $R_1^2 + R_2'^2$ ist.

Anderseits ist nach dem Beweise des Satzes 37 wenn die dortige Substitution (5) eingeführt wird:

$$|\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}| < \sum_{\lambda=1}^{l} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda,$$

folglich

$$|E_{n,m,l}| < e^{2(|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|) + \sum_{\lambda=1}^{l} (|\alpha_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > \overline{R}^2.$$

Der Exponent der rechten Seite ist eine ganze rationale Funktion l^{ten} Grades in $|\alpha_\varkappa \xi|$ und $|\beta_\varkappa \eta|$; unter Anwendung des Satzes 4 folgt daher

$$|E'_{n,m,l}| < e^{|\alpha_\varkappa \xi|^{l+\alpha} + |\beta_\varkappa \eta|^{l+\beta}},$$

wenn

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 + |\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2. \quad (8)$$

Damit aber ist die Behauptung erwiesen, da sich zeigen läßt, daß die Ungl. (8) stets erfüllt ist, wenn $|x|^2 + |y|^2 > R^2$ ist bei hinreichend großem R. Diese letzte Ungleichung bedingt nämlich, daß entweder 1. $|x|^2 \geqq \frac{R^2}{2}$ oder 2. $|y|^2 \geqq \frac{R^2}{2}$ ist.

Im Falle 1 ist

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 = |\alpha_\varkappa|^2 |x|^{\frac{2}{n}} \geqq |\alpha_\varkappa|^2 \left(\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{1}{n}} > P^2 \text{ für hinreichend großes } R;$$

Digitized by Google

im Falle 2 ist ähnlich

$$|\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2$$

und somit allgemein

$$|\alpha_\varkappa \xi|^2 + |\beta_\varkappa \eta|^2 > P^2 \text{ für hinreichend großes } R.$$

Hilfssatz 2. Ist

$$E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = \begin{cases} 1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y) & \text{für } l = 0 \\ [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}(x,y)} & \text{für } l \geqq 1, \end{cases}$$

so hat man, wenn δ, δ', ε, ε' positive Zahlen sind (Null ausgeschlossen):

$$\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x + d_\varkappa y)\prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) < e^{\varepsilon|x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \varepsilon'|y|^{\frac{l+\delta'}{m}}}$$

$$\text{für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Für $l = 0$ gilt der Beweis, wie er im Hilfssatz 2 von § 4 für den Fall $p = 0$ geführt wurde.

Es sei also $l \geqq 1$. Man zerlegt:

$$\prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y) = P_M \,.\, e^{S_M},$$

wo

$$P_M = \prod_{\varkappa=1}^{M} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)],$$

$$S_M = \sum_{\varkappa=1}^{M} \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}$$

ist. Nun bestimmt man wie früher (§ 4, Ungl. (3) bezw. (4)) R_1 so, daß man hat:

$$\left|\prod_{\varkappa=1}^{k}(c_\varkappa x + d_\varkappa y)\right| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{\frac{l+\delta'}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2 \quad (9)$$

und R_2 so, daß man hat:

$$|P_M| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|x|^{\frac{l+\delta}{n}} + \frac{\varepsilon'}{3}|y|^{\frac{l+\delta'}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_2^2. \quad (10)$$

Digitized by Google

Endlich ist

$$|e^{S_M}| \leqq e^{\sum_{\varkappa=1}^{M} |\gamma_\varkappa^{(n,m,l)}|}$$

oder nach dem Beweis des Satzes 37 mit Benützung der dortigen Substitution (5)

$$|e^{S_M}| < e^{\sum_{\varkappa=1}^{M} \sum_{\lambda=1}^{l} (|a_\varkappa \xi| + |\beta_\varkappa \eta|)^\lambda}.$$

Weil nun der Exponent der rechten Seite eine ganze rationale Funktion höchstens vom Grade l in $|\xi|$ und $|\eta|$ ist, folgt nach Satz 4, Zusatz 1:

$$|e^{S_M}| < e^{\frac{\varepsilon}{3}|\xi|^{l+\delta} + \frac{\varepsilon'}{3}|\eta|^{l+\delta'}} \text{ für } |\xi|^2 + |\eta|^2 > \overline{R}^2 \qquad (11)$$

oder[1]) für $|x|^2 + |y|^2 > R_3^2$ bei hinreichend großem R_3. Aus den Ungl. (9), (10), (11) folgt die Behauptung, wenn R die größte der Zahlen R_1, R_2, R_3 ist.

Mittels der beiden Hilfssätze läßt sich Satz 34 verallgemeinern:

Satz 41. Ist

$$P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

wo $E_{n,m,l}$ dieselbe Bedeutung hat wie im letzten Hilfssatz, eine primitive ganze Funktion, deren Rangsystem das Wertepaar $\frac{l}{n}, \frac{l}{m}$ enthält, so ist bei beliebigen positiven ε, ε'

$$|P_{(x,y)}| < e^{\varepsilon |x|^{\frac{l+1}{n}} + \varepsilon' |y|^{\frac{l+1}{m}}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2.$$

Zum Beweise zerlegt man:

$$P(x,y) = P_{k,M} \cdot R_M,$$

wo

$$P_{k,M} = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_M = \prod_{\varkappa=M+1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y).$$

[1]) Vergl. den Schluß des Beweises des Hilfssatzes 1.

Digitized by Google

Nun ist nach Hilfssatz 1 für $\alpha = \beta = 1$:

$$|R_M| < e^{\sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} \left(|a_\varkappa x| \frac{l+1}{n} + |b_\varkappa y| \frac{l+1}{m}\right)} \quad \text{für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2$$

$$= e^{|x| \frac{l+1}{n} \sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |a_\varkappa| \frac{l+1}{n} + |y| \frac{l+1}{m} \sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |b_\varkappa| \frac{l+1}{m}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2.$$

Da $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ein Wertepaar des Rangsystems sein soll, konvergieren die Reihen

$$\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa| \frac{l+1}{n}, \quad \sum_{\varkappa=1}^{\infty} |b_\varkappa| \frac{l+1}{m},$$

es kann also M so groß angenommen werden, daß man hat:

$$\sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |a_\varkappa| \frac{l+1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{\varkappa=M+1}^{\infty} |b_\varkappa| \frac{l+1}{m} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

und daher:

$$|R_M| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x| \frac{l+1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}|y| \frac{l+1}{m}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2. \tag{12}$$

Ferner ist nach Hilfssatz 2, wenn dort $\delta = \delta' = 1$ gewählt wird:

$$|P_{k,M}| < e^{\frac{\varepsilon}{2}|x| \frac{l+1}{n} + \frac{\varepsilon'}{2}|y| \frac{l+1}{m}} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_2^2. \tag{13}$$

Aus den Ungl. (12) und (13) folgt die Behauptung, wenn R die größere der beiden Zahlen R_1, R_2 ist.

Ein genaueres Resultat ergibt sich, wenn man statt $\frac{l+1}{n}$, $\frac{l+1}{m}$ zwei passend definierte kleinere Zahlen einführt:

Satz 42. $P(x, y)$ habe dieselbe Bedeutung wie im Satze 41, $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ sei wieder ein Wertepaar des Rangsystems; existieren dann zwei Zahlen σ, τ, welche den Bedingungen genügen:

$$\frac{l}{n} < \sigma < \frac{l+1}{n}, \quad \frac{l}{m} < \tau < \frac{l+1}{m}, \tag{14}$$

$$|a_\varkappa|^\sigma \leqq \frac{1}{\varkappa}, \quad |b_\varkappa|^\tau \leqq \frac{1}{\varkappa} \text{ für } \varkappa > M, \tag{15}$$

Digitized by Google

so ist

$$|P(x,y)| < e^{C_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R^2,$$

wo $C_{\sigma,\tau}$ eine nur von σ, τ abhängige positive Zahl ist.

Zum Beweise zerlegt man:

$$P(x,y) = P_{k,M} \cdot R_{M,N} \cdot R_N,$$

wo

$$P_{k,M} = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{M} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_{M,N} = \prod_{\varkappa=M+1}^{N} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y),$$

$$R_N = \prod_{\varkappa=N+1}^{\infty} E_{n,m,l}(a_\varkappa x + b_\varkappa y).$$

Nach Hilfssatz 2 (für $\varepsilon = \varepsilon'$) ist unter Benützung der Voraussetzung (14)

$$|P_{k,M}| < e^{\varepsilon(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_1^2. \tag{16}$$

$R_{M,N}$ zerlegt man weiter in folgender Weise:

$$R_{M,N} = R'_{M,N} \cdot e^{S_{M,N}},$$

wo

$$R'_{M,N} = \prod_{\varkappa=M+1}^{N} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)], \quad S_{M,N} = \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \gamma_\varkappa^{(n,m,l)}.$$

Für $l = 0$ ist $S_{M,N} = 0$; für $l \geqq 1$ aber gilt nach dem Beweise des Satzes 37:

$$|S_{N,M}| < \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \sum_{\lambda=1}^{l} \left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)^\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(|a_\varkappa x|^{\frac{1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{1}{m}}\right)^\lambda.$$

N sei so bestimmt, daß man hat:

$$N - 1 < |x|^\sigma + |y|^\tau \leqq N; \tag{17}$$

dann ist

$$|x|^\sigma \leqq N, \; |y \quad \leqq N \text{ oder } |x| \leqq N^{\frac{1}{\sigma}}, \; |y| \leqq N^{\frac{1}{\tau}}; \tag{18}$$

Digitized by Google

ferner ist, da der kleinste Wert, den x in der betrachteten Summe annimmt, $M+1$ ist, nach Voraussetzung (15):

$$|a_\varkappa| \leqq \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad |b_\varkappa| \leqq \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau}};$$

folglich wird

$$|S_{M,N}| < \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left[\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} + \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}\right]^\lambda = N.s_l^{(\sigma,\tau)}(N),$$

wobei

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \frac{\left[\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} + \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}\right]^\lambda}{N}.$$

Nun wird gezeigt, daß $s_l^{(\sigma,\tau)}(N)$ für alle endlichen N unter einer von N unabhängigen Schranke $S_l^{(\sigma,\tau)}$ bleibt, so daß man hat:

$$|S_{M,N}| < N.S_l^{(\sigma,\tau)}. \tag{19}$$

Es sei etwa $\sigma n \leqq \tau m$, also weil $\frac{N}{\varkappa} \geqq \frac{N}{N} = 1$ ist:

$$\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}} \geqq \left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau m}}.$$

Demnach ist

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) < \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \frac{\left[2\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma n}}\right]^\lambda}{N} = \sum_{\lambda=1}^{l} \left[2^\lambda N^{\frac{\lambda}{\sigma n}-1} \sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{\lambda}{\sigma n}}\right];$$

da $\lambda \leqq l$, $\sigma n > l$, also $\frac{\lambda}{\sigma n} < 1$ ist, hat man [1]):

$$\sum_{\varkappa=M+1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{\lambda}{\sigma n}} < \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\sigma n}} . N^{1-\frac{\lambda}{\sigma n}},$$

[1]) Es ist nämlich für $0 < \vartheta < 1$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{N} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{1-\vartheta} < \frac{1}{\vartheta} N^\vartheta;$$

eine elementare Ableitung dieser Relation gibt A. Pringsheim a. a. O. p. 304, Fußn.

Digitized by Google

folglich

$$s_l^{(\sigma,\tau)}(N) < \sum_{\lambda=1}^{l} \frac{2^\lambda}{1-\frac{\lambda}{\sigma n}};$$

die rechte Seite dieser Ungleichung ist eine von N unabhängige Zahl, welche also als die gesuchte Schranke $S_l^{(\sigma,\tau)}$ betrachtet werden kann.

Weiterhin hat man:

$$|R'_{M,N}| \leqq \prod_{\varkappa=M+1}^{N} [1+|a_\varkappa x|+|b_\varkappa y|] < \prod_{\varkappa=1}^{N} \left[1+\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\sigma}}+\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\tau}}\right];$$

bezeichnet ω die kleinere der beiden Zahlen σ, τ, so wird

$$|R'_{M,N}| < \prod_{\varkappa=1}^{N} \left[1+2\left(\frac{N}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right] = \prod_{\varkappa=1}^{N} \frac{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}+2N^{\frac{1}{\omega}}}{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}}$$

$$< \prod_{\varkappa=1}^{N} \frac{3N^{\frac{1}{\omega}}}{\varkappa^{\frac{1}{\omega}}} = \left[\frac{(3^\omega N)^N}{N!}\right]^{\frac{1}{\omega}} < e^{\frac{3^\omega N}{\omega}}.$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf Ungl. (19) bezw. (17):

$$|R_{M,N}| < e^N\left(s_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}\right)$$

$$< e^{(|x|^\sigma+|y|^\tau+1)\left(s_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}\right)}$$

$$< e^{(|x|^\sigma+|y|^\tau)\left(s_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}+\delta\right)} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R_2^2,$$

wenn R_2 so gewählt wird, daß

$$\frac{s_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}}{|x|^\sigma+|y|^\tau} < \delta$$

ist, was stets möglich ist, da mit $|x|^2+|y|^2$ auch $|x|^\sigma+|y|^\tau$ beliebig groß wird. Setzt man

$$s_l^{(\sigma,\tau)}+\frac{3^\omega}{\omega}+\delta = c_{\sigma,\tau},$$

so erhält man:

$$|R_{M,N}| < e^{c_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma+|y|^\tau)} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R_2^2. \qquad (20)$$

Digitized by Google

Für das Produkt R_N gilt nach Hilfssatz 1 (für $\alpha = \beta = 1$), wenn $|x|^2 + |y|^2 > R_3^2$ ist bei entsprechendem R_3:

$$
\begin{aligned}
|R_N| &< e^{\sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(|a_\varkappa x|^{\frac{l+1}{n}} + |b_\varkappa y|^{\frac{l+1}{m}}\right)} \\
&= e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\frac{l+1}{n}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} |b_\varkappa|^{\frac{l+1}{m}}} \\
&< e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{l+1}{\sigma n}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{\frac{l+1}{\tau m}}} \\
&\overset{1)}{<} e^{|x|^{\frac{l+1}{n}} \frac{1}{\left(\frac{l+1}{n\sigma}-1\right) N^{\frac{l+1}{n\sigma}-1}} + |y|^{\frac{l+1}{m}} \frac{1}{\left(\frac{l+1}{m\tau}-1\right) N^{\frac{l-1}{m\tau}-1}}} \\
&< e^{\frac{|x|^\sigma}{\frac{l+1}{n\sigma}-1}\left(\frac{|x|^\sigma}{N}\right)^{\frac{l+1}{n\sigma}-1} + \frac{|y|^\tau}{\frac{l+1}{m\tau}-1}\left(\frac{|y|^\tau}{N}\right)^{\frac{l+1}{m\tau}-1}} \\
&< e^{\frac{|x|^\sigma}{\frac{l+1}{\sigma n}-1} + \frac{|y|^\tau}{\frac{l+1}{m\tau}-1}}
\end{aligned}
$$

nach den Rel. (18), da $\frac{l+1}{n\sigma} - 1$ und $\frac{l+1}{m\tau} - 1$ nach Voraussetzung (14) positiv sind. Bezeichnet man die kleinere dieser beiden Zahlen mit $\frac{1}{c'_{\sigma,\tau}}$, so hat man:

$$|R_N| < e^{c'_{\sigma,\tau}(|x|^\sigma + |y|^\tau)} \text{ für } |x|^2 + |y|^2 > R_3^2. \tag{21}$$

Aus den Ungl. (16), (20), (21) folgt die Behauptung, wenn

$$C_{\sigma,\tau} = \varepsilon + c_{\sigma,\tau} + c'_{\sigma,\tau}$$

und R die größte der drei Zahlen R_1, R_2, R_3 ist.

Aus dem letzten Satze läßt sich folgende Beziehung zwischen der Ordnungskurve der betrachteten Funktion und dem Scheitel des Grenzwinkels gewinnen:

Satz 43. Hat eine primitive ganze Funktion mit wesentlich linearen Primfunktionen

$$P(x,y) = \prod_{\varkappa=1}^{k} (c_\varkappa x + d_\varkappa y) \prod_{\varkappa=1}^{\infty} [1 - (a_\varkappa x + b_\varkappa y)]\, e^{\gamma_\varkappa^{(n,m,\mathfrak{d})}(x,y)}$$

---

1) $$\sum_{\varkappa=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\varkappa}\right)^{1+\vartheta} < \frac{1}{\vartheta N^\vartheta} \text{ für } \vartheta > 0$$

(Elementarer Beweis von A. Pringsheim a. a. O. p. 305, Fußnote).

Digitized by Google

die Eigenschaft, daß man für alle positiven δ hat:

$$\varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} \leqq 1,\ \varkappa\,|b_\varkappa|^{\varrho_0'+\delta} \leqq 1 \text{ für } \varkappa > K,^{1})$$

wo ϱ_0, ϱ_0' die Koordinaten des Scheitels des Grenzwinkels sind, so gibt es stets ein Ordnungspaar α, α' der Funktion $P(x, y)$, so daß

$$\alpha \leqq \varrho_0,\ \alpha' \leqq \varrho_0'$$

ist.[2])

Nach Voraussetzung ist nämlich

$$|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} \leqq \frac{1}{\varkappa},\ |b_\varkappa|^{\varrho_0+\delta'} \leqq \frac{1}{\varkappa} \text{ für } \varkappa > K;$$

ist nun $\frac{l}{n}$, $\frac{l}{m}$ ein Wertepaar des Rangsystems, so daß

$$\varrho_0 < \frac{l+1}{n},\ \varrho_0' < \frac{l+1}{m}$$

ist und damit (Satz 39)

$$\frac{l}{n} < \varrho_0 + \delta < \frac{l+1}{n},\ \frac{l}{m} < \varrho_0' + \delta' < \frac{l+1}{m}$$

für hinreichend kleine, sonst beliebige δ, δ', so kann man $\varrho_0 + \delta$ und $\varrho_0' + \delta'$ als die Zahlen σ bezw. τ des letzten Satzes auffassen und erhält durch Anwendung dieses Satzes:

$$|P(x,y)| < e^{C_{\varrho_0+\delta,\,\varrho_0'+\delta'}(|x|^{\varrho_0+\delta}+|y|^{\varrho_0'+\delta'})} \text{ für } |x|^2+|y|^2 > R^2;$$

zunächst gilt diese Ungleichung für hinreichend kleine, damit aber für alle positiven δ, δ'. Nach der Definition der Ordnungspaare ist damit der Satz bewiesen.

Satz 44. Für die im letzten Satz charakterisierte Klasse von Funktionen fällt die Ordnungskurve vollständig mit dem Grenzwinkel zusammen.

---

[1]) Eine dieser beiden Bedingungen ist stets erfüllt, z. B. die erste, indem man die Faktoren des unendlichen Produktes nach monoton abnehmenden $|a_\varkappa|$ geordnet denkt; denn aus der Konvergenz von $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} |a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta}$ und der Monotonie der Zahlen $|a_\varkappa|$ folgt:

$$\lim_{\varkappa=\infty} \varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} = 0, \text{ also } \varkappa\,|a_\varkappa|^{\varrho_0+\delta} < \varepsilon < 1 \text{ für } \varkappa > K.$$

Die andere Bedingung ist sicher erfüllt, wenn zugleich die Zahlen $|b_\varkappa|$ monoton abnehmen, sie kann aber auch noch in anderen Fällen erfüllt sein und ist es in der Tat bei den naheliegenden Funktionen.

[2]) Wenn zwei Zahlen $\frac{l+1}{n}$, $\frac{l+1}{m}$ mit ϱ_0 bezw. ϱ_0' zusammenfallen, folgt dieser Satz sehr einfach aus dem Satze 41.

Digitized by Google

Nach Satz 40 nämlich liegt die Ordnungskurve, vom Anfang aus betrachtet, jenseits des Grenzwinkels oder fällt mit ihm zusammen. Dies widerspricht dem letzten Satze nur dann nicht, wenn dort

$$\alpha = \rho_0, \quad \alpha' = \rho_0'$$

ist. Damit fällt ein Punkt der Ordnungskurve in den Scheitel des Grenzwinkels; als monotone Kurve muß aber dann (wegen Satz 40) die ganze Ordnungskurve mit dem Grenzwinkel zusammenfallen.

Die allgemeine Identität der Ordnungskurve mit dem Grenzwinkel im Falle primitiver Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen ist zwar sehr wahrscheinlich, bleibt aber dahingestellt.

Weit weniger wahrscheinlich ist es, daß sich für ganze Funktionen zweier Veränderlichen mit unendlich vielen Primfunktionen höheren als ersten Grades oder für solche der weiteren § 1 angegebenen Klassen auf einem ähnlichen Wege analoge Resultate gewinnen lassen, zumal sich schon einer Übertragung der Grundlagen dieser Untersuchungen außerordentliche Schwierigkeiten entgegenstellen, wie ja oben (§ 7) erwähnt wurde.

Dagegen scheinen einer Ausdehnung der geführten Untersuchungen auf ganze Funktionen von n komplexen Veränderlichen mit analogen speziellen Eigenschaften keine prinzipiellen Hindernisse im Wege zu stehen.

Digitized by Google

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 5

I. Über das Verhalten ganzer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen.

§ 1. Über das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion $g(x, y)$ in einem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r'$ 9

§ 2. Einige Sätze über das Verhalten ganzer rationaler Funktionen $g(x, y)$ im Unendlichen 11

§ 3. Das Verhalten ganzer transzendenter Funktionen $g(x, y)$ im Unendlichen; Ordnungsfunktion und Typusfunktion 15

§ 4. Der Einfluß gewisser Transformationen einer ganzen transzendenten Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung auf ihre Ordnungsfunktion 22

II. Beziehungen zwischen dem Unendlichwerden ganzer transzendenter Funktionen zweier komplexer Veränderlichen von nichtunendlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Reihenkoeffizienten.

§ 1. Beziehungen, welche aus der Existenz einer oberen Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x, y)$ von nichtunendlicher Ordnung folgen 23

§ 2. Beziehungen, welche aus der Existenz einer unteren Schranke für das Anwachsen des absoluten Betrages einer Funktion $g(x, y)$ von nichtunendlicher Ordnung folgen 32

§ 3. Beziehungen zwischen den Ordnungspaaren bezw. den Ordnungspaaren und dem zugehörigen Typus einer ganzen Funktion $g(x, y)$ von endlicher Ordnung und dem infinitären Verhalten ihrer Koeffizienten 36

III. Beziehungen zwischen dem Verhalten gewisser spezieller ganzer transzendenter Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen im Unendlichen und der Art ihres Verschwindens.

§ 1. Allgemeine Produktdarstellung ganzer Funktionen $g(x, y)$; daraus entspringende Einteilung dieser Funktionen 38

§ 2. Eine spezielle Produktdarstellung der ganzen Funktionen zweiter Art 39

§ 3. Ganze Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen 45

§ 4. Beziehungen zwischen ganzen Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen, die von endlicher Ordnung, und solchen, die von endlichem Range sind 46

§ 5. Eine Klasse von Funktionen zweiter Art, die sich auf Funktionen mit wesentlich linearen Primfunktionen zurückführen lassen 50

§ 6. Über allgemeine Diagonalen von Doppelreihen 51

§ 7. Verallgemeinerung der Produktdarstellung ganzer Funktionen endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen 52

§ 8. Analoga zum Range und Grenzexponenten der ganzen Funktionen einer Veränderlichen; Rangsystem und Grenzwinkel 57

§ 9. Beziehungen zwischen der Ordnungskurve einer ganzen Funktion endlichen Ranges mit wesentlich linearen Primfunktionen und dem Rangsystem bezw. Grenzwinkel dieser Funktion 60

Digitized by Google

Über Mannheimsche Flächen.

Von L. Braude in Bierstadt.

1. Besteht für eine ebene Kurve Γ zwischen der Bogenlänge s und dem Krümmungsradius R die Beziehung $f(s, R) = 0$, die man die „natürliche Gleichung" von Γ nennt,[1]) und läßt man Γ auf der Abszissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems abrollen, so ist der Ort des ersten Krümmungszentrums des jeweiligen Berührungspunktes die „Mannheimsche Kurve" von Γ mit der kartesischen Gleichung[2]) $f(x, y) = 0$. Deutet man ferner die Neigung ω der Normalen von Γ gegen eine feste Richtung als Polarwinkel und den Krümmungsradius als Radiusvektor, so erhält[3]) man die „Radiale" von Γ. Endlich hat Verfasser[4]) als „Zwischenevoluten" einer ebenen Kurve den Ort der Punkte definiert, die die Krümmungsradien von Γ in konstantem Verhältnis teilen und eine Reihe von Beziehungen zwischen diesen drei abgeleiteten Kurven nachgewiesen. Im folgenden sollen nun diese drei Begriffe in entsprechender Weise auf Flächen angewandt werden; dabei ergeben sich verschiedene Sätze, die fast alle gewissen Eigenschaften ebener Kurven entsprechen.

2. Es seien die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes P der Fläche F als Funktionen der beiden Parameter u, v gegeben, wobei die Krümmungslinien Parameterkurven sein sollen; dann ist[5]) nach Gaußscher Bezeichnung:

$$F = 0, \quad D' = 0. \tag{1}$$

[1]) E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von G. Kowalewski, Leipzig, 1901; auch etwa Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, S. Schubert, Leipzig 1908, S. 171 ff.

[2]) A. Mannheim, Liouvilles Journal (4) 1859, S. 93—104 oder Géometrie cinématique, Gauthier-Villars, Paris, 1894, S. 500 ff. Siehe auch des Verfassers Dissertation: „Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve", Heidelberg 1911, Einleitung.

[3]) Wieleitner, loc. cit. (1), Seite 362; G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte, autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Leipzig, zweite Auflage 1911, Band II, S. 289.

[4]) Vgl. dessen Dissertation, loc. cit. (2), S. 11; auch G. Loria, loc. cit., Band II, S. 272.

[5]) Vgl. etwa V. und K. Kommerell, Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, S. Schubert, Leipzig 1903, Band II, S. 19.

Digitized by Google

Sind ferner die beiden Hauptkrümmungsradien

$$R_1 = \frac{E}{D}, \quad R_2 = \frac{G}{D''} \tag{2}$$

als Funktionen von u und v bekannt, so können wir durch

$$s_1 = \int \sqrt{E}\, du, \quad s_2 = \int \sqrt{G}\, dv$$

die auf beiden Scharen von Krümmungslinien gemessenen Bogenlängen s_1 und s_2 als neue Parameter einführen; es sei alsdann

$$R_1 = f_1(s_1, s_2), \quad R_2 = f_2(s_1, s_2). \tag{4}$$

Wir wollen nun (4) als „natürliche Gleichungen" von F bezeichnen [1]).

Ist die Funktionaldeterminante von (4), nämlich

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial s_2} - \frac{\partial R_1}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial s_1}$$

identisch Null, so liegt eine Weingartensche (W-) Fläche [2]) vor.

Lassen wir nun F so auf der (xy)-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems abrollen, daß sich die beiden Scharen von Krümmungslinien parallel zur x-, bezw. y-Achse abwickeln, so hat der Ort der beiden Hauptkrümmungszentren des jeweiligen Berührungspunktes die kartesische Gleichung

$$\left.\begin{aligned} z &= f_1(x, y) \quad \text{bezw.} \\ z &= f_2(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Wir wollen ihn die „Mannheimsche Fläche" von F nennen und seine beiden Mäntel mit $\mathfrak{M}_1$ bezw. $\mathfrak{M}_2$ bezeichnen. Ferner tragen wir von einem festen Punkte aus Strecken ab, die den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 gleich und gleich gerichtet sind. Sind a, b, c die Richtungskosinus der Normalen von F, so werden die Koordinaten der beiden Mäntel $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ der „Radialenfläche":

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R_1 a, \quad y_1 = R_1 b, \quad z_1 = R_1 c \\ x_2 &= R_2 a, \quad y_2 = R_2 b, \quad z_2 = R_2 c \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

[1]) Siehe loc. cit. (5), vorige Seite, S. 119.

[2]) Siehe die Dissertation von S. Keller, Untersuchungen über die natürl. Gl. krummer Flächen, Kiel, 1904.

Digitized by Google

Sind die Parameterkurven von F noch allgemein, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= a\frac{\partial R_1}{\partial u} + R_1\frac{\partial a}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = a\frac{\partial R_1}{\partial v} + R_1\frac{\partial a}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} &= a\frac{\partial R_2}{\partial u} + R_2\frac{\partial a}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = a\frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2\frac{\partial a}{\partial v} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

nebst analogen Gleichungen für y_1, y_2, z_1, z_2; sind es im besonderen Krümmungslinien, so wird unter Anwendung der Gleichungen von Rodrigues:[1])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= a\frac{\partial R_1}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = a\frac{\partial R_1}{\partial v} - \frac{R_1}{R_2}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} &= a\frac{\partial R_2}{\partial u} - \frac{R_2}{R_1}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = a\frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned}\right\}. \tag{6'}$$

Ferner sind im allgemeinen Falle, wenn wir die bekannten Gleichungen[2])

$$\left.\begin{aligned} &\sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2 = hD - kE, \quad \sum\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} = hD' - kF, \quad \sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\right)^2 = hD'' - kG \\ &h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad k = \frac{1}{R_1 R_2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

benützen, die Fundamentalgrößen von $\mathfrak{R}_1$

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 + R_1^2(hD - kE) \\ F_1 &= \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v} + R_1^2(hD' - kF) \\ G_1 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + R_1^2(hD'' - kG) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

während die von $\mathfrak{R}_2$ werden:

$$\left.\begin{aligned} E_2 &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2 + R_2^2(hD - kE) \\ F_2 &= \frac{\partial R_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial R_2}{\partial v} + R_2^2(hD' - kF) \\ G_2 &= \left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2 + R_2^2(hD'' - kG) \end{aligned}\right\}. \tag{8'}$$

[1]) V. und K. Kommerell, loc. cit., S. 13–14.
[2]) Ebenda, S. 22.

Digitized by Google

Da nun, wie sich weiter unten zeigen wird, $\mathfrak{R}_1$ auf $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ auf $\mathfrak{M}_2$ abwickelbar ist, so sind (8) und (8′) zugleich die entsprechenden Größen für $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Sind im besonderen die Parameterkurven von F Krümmungslinien, so wird

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 + E, \quad E_2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2 + E, \\ F_1 &= \frac{\partial R_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad F_2 = \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}, \\ G_1 &= \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + G, \quad G_2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2 + G, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

so daß das Bogenelement von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die höchst einfache Form annimmt:

$$\left.\begin{aligned} ds_1^2 &= ds^2 + dR_1^2 \\ ds_2^2 &= ds^2 + dR_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

in bester Übereinstimmung mit den entsprechenden Größen für ebene Kurven.[1]) Für die W-Flächen $R_1 \pm R_2 = c$ sind wie aus (9) folgt, die entsprechenden Größen für $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, also auch für $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gleich, demnach beide Mäntel der Mannheimschen und der Radialenfläche aufeinander abwickelbar. Das Flächenelement von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ ist endlich

$$dO_1 = du\,dv\sqrt{E\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 + EG}, \tag{11}$$

das von $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{M}_2$:

$$dO_2 = du\,dv\sqrt{E\left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2 + GE} \tag{11′}$$

3. Als „Resultantenkurve“ zweier ebener Kurven K_1 und K_2 hat Aoust[2]) diejenige Kurve K bezeichnet, deren Krümmungsradius gleich der Summe der gleichgerichteten Krümmungsradien der „Komponentenkurven“ K_1 und K_2 ist. Es scheint jedoch bisher nicht beobachtet worden zu sein, daß eine geometrische Definition mit Anführung der wichtigsten Eigenschaften sich schon dreißig Jahre früher bei Jakob Steiner vorfindet.[3]) Herr Paul

[1]) H. Wieleitner, loc. cit., S. 368.

[2]) Siehe dessen „Analyse infinitésimale des courbes planes“. Paris, Gauthier-Villars, 1873, S. 53 ff.

[3]) J. Steiner, Über Lehrsätze, von welchen die bekannten Sätze über parallele Kurven besondere Fälle sind. Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band XXXII, 1846, S. 75—79.

Digitized by Google

Ernst[1]) hat unter Anwendung der Tangentengleichung

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - f(\varphi) = 0 \tag{12}$$

verschiedene bemerkenswerte Eigenschaften derselben abgeleitet, aus denen Verfasser Beziehungen zwischen Rollkurven gewann.[2])

Es sei nun die Tangentialebene von F dargestellt durch

$$ax + by + cz - f(a, b, c) = o \tag{13}$$

wobei

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{14}$$

Ist f eine ganze rationale Funktion, deren Glieder sämtlich von paarem oder unpaarem Grade sind, so können wir dieselbe auf Grund von (14) stets als homogen voraussetzen; lineare Glieder können durch Parallelverschiebung beseitigt werden. Durch partielle Differentiation von (13) nach a, b, c unter Berücksichtigung von (14) folgt $\left(f_1 = \frac{\partial f}{\partial a} \text{ etc.}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1 - \lambda a, \\ y &= f_2 - \lambda b, \\ z &= f_3 - \lambda c, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wobei, wie durch Komponieren von (15) mit a, b, c folgt:

$$\lambda = af_1 + bf_2 + cf_3 - f. \tag{15'}$$

Somit hat (13) die Parameterdarstellung:

$$\left.\begin{aligned} x &= (1 - a^2)f_1 - abf_2 - acf_3 + af, \\ y &= -abf_1 + (1 - b_2)f_2 - bcf_3 + bf, \\ z &= acf_1 - bcf_2 + (1 - c^2)f_3 + cf \end{aligned}\right\}. \tag{16}$$

Ist f homogen vom Grade n, so wird einfacher:

$$\left.\begin{aligned} x &= (1 - n)af + f_1, \\ y &= (1 - n)bf + f_2, \\ z &= (1 - n)cf + f_3 \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Die Fußpunktfläche von F in bezug auf den Anfangspunkt hat die Polargleichung

$$\rho = f(a, b, c), \tag{18}$$

[1]) P. Ernst, Die Aoustsche Resultantenkurve, Jahresbericht der k. k. Staatsoberrealschule XV, Wien, 1909.

[2]) Rend. Circ. Mat. Palermo, XXXIV, 1912, S. 280—287.

Digitized by Google

die kartesischen Koordinaten sind also:

$$\left.\begin{aligned} x &= af, \\ y &= bf, \\ z &= cf \end{aligned}\right\}. \tag{18'}$$

Für die weiteren Untersuchungen seien nun $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ die unabhängigen Variablen; alsdann können wir die Gaußschen Bezeichnungen anwenden. Ist die Gleichung der Tangentialebene von F:

$$z = px + qy - f(p,q), \tag{19}$$

— die ja durch Division mit $\sqrt{1+p^2+q^2}$ auf die Form (13) gebracht werden kann —, so wird die Parameterdarstellung von $F\left(f_1 = \frac{\partial f}{\partial p},\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial q}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1, \\ y &= f_2, \\ z &= pf_1 + qf_2 - f \end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Ist wieder f eine homogene Funktion n^{ten} Grades, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1, \\ y &= f_2, \\ z &= (n-1)f \end{aligned}\right\}. \tag{21'}$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} r = \frac{f_{22}}{\Delta},\ s = \frac{f_{12}}{\Delta},\ t = \frac{f_{11}}{\Delta}, \\ \Delta = f_{11}f_{22} - f_{12}^2, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

während die Richtungscosinus nach bekannten Regeln:

$$a = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad b = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad c = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{21'}$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung werden:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= f_{11}^2(1+p^2) + 2pqf_{11}f_{12} + f_{12}^2(1+q^2), \\ F_0 &= f_{11}f_{12}(1+p^2) + pq(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) + f_{12}f_{22}(1+q^2), \\ G_0 &= f_{12}^2(1+p^2) + 2pqf_{12}f_{22} + f_{22}^2(1+q^2) \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Digitized by Google

Ist f homogen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= f_{11}^2 + f_{12}^2 + (n-1)^2 f_1^2, \\ F_0 &= f_{11} f_{12} + f_{12} f_{22} + (n-1)^2 f_1 f_2, \\ G_0 &= f_{12}^2 + f_{22}^2 + (n-1)^2 f_2^2 \end{aligned}\right\}. \tag{23'}$$

Somit ist

$$E_0 G_0 - F_0^2 = (1 + p^2 + q^2)^2 \Delta^2. \tag{24}$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung werden:

$$\left.\begin{aligned} D_0 &= \frac{-f_{11}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ D_0' &= \frac{-f_{12}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ D_0'' &= \frac{-f_{22}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Da also

$$\left.\begin{aligned} D_0 D_0'' - D_0'^2 &= \frac{\Delta}{1+p^2+q^2}, \\ E_0 D_0'' - 2 F_0 D_0' + G_0 D_0 &= \frac{\Delta}{\sqrt{1+p^2+q^2}} [(1+p^2) f_{11} - 2 p q f_{12} \\ &\qquad + (1+q^2) f_{22}] \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

so sind die mittlere und Totalkrümmung

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{f_{11}(1+p^2) + 2 p q f_{12} + f_{22}(1+q^2)}{\Delta (1+p^2+q^2)^{3/2}} \\ k &= \frac{1}{\Delta (1+p^2+q^2)^2} \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Für Minimalflächen ($h = 0$) folgt also die Differentialgleichung:

$$f_{11}(1+p^2) + 2 p q f_{12} + f_{22}(1+q^2) = 0. \tag{28}$$

Die Parameterkurven sind konjugierte Kurven, falls $D_0' = 0$ ist; somit folgt:

Hat die Tangentialebene von F die Gleichung

$$z = p x + q y + f(p) + \varphi(q)$$

Digitized by Google

so sind die Kurven konstanter p und q, d. h. konstanter x und y konjugierte Kurven; die kartesische Gleichung hat dann die Form

$$z = \psi(x) + \omega(y). \tag{30}$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe der beiden Kurven

$$z_1 = 2\psi(x) \text{ und } z_2 = 2\omega(y) \tag{31}$$

eine Konstruktion, die ganz der Lieschen Erzeugung der Minimalflächen [1]) entspricht; (30) ist nämlich Ort der Mittelpunkt aller Sehnen, die zwischen beliebigen Punkten der ersten und zweiten Kurve (31) gezogen werden.

Die Parameterkurven sind ferner Asymptotenlinien, wenn

$$D_0 = D_0'' = 0 \tag{32}$$

d. h.:

$$f_{11} = f_{22} = 0, \tag{33}$$

das gemeinsame Integral ist alsdann:

$$f = a_1 pq + a_2 p + a_3 q + a_4 \tag{34}$$

sodaß wir schließen:

Für das hyperbolische Paraboloid

$$az = xy \tag{35}$$

sind die Kurven konstanter x und y Asymptotenlinien.

Die parabolische Kurve ($k = 0$) ist bestimmt durch

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0, \tag{36}$$

für Kreispunkte ist:

$$\frac{f_{11}}{1+p^2} = \frac{f_{12}}{pq} = \frac{f_{22}}{1+q^2}. \tag{37}$$

Es sei nun $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ zwei durch

$$\left.\begin{aligned} z &= px + qy - f^{(1)}(p,q) \\ z &= px + qy - f^{(2)}(p,q) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dargestellte Flächen. Dann heiße die durch

$$z = px + qy - [f^{(1)}(p,q) + f^{(2)}(p,q)] \tag{39}$$

[1]) Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, Math. Annalen 1878, S. 334.

Digitized by Google

bestimmte Fläche F die „Resultantenfläche" der beiden „Komponentenflächen" $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$. Sind nun

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{f^{(1)}(p,q)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\\ \rho_2 &= \frac{f^{(2)}(p,q)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

die Fußpunktflächen von $F^{(1)}$ bezw. $F^{(2)}$ in bezug auf den Anfangspunkt des Koordinatensystems, so folgt aus (38)—(40):

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \tag{41}$$

d. h.:

I. Die Fußpunktfläche der Resultantenfläche ist Kissoidenfläche der Fußpunktflächen der Komponentenflächen.

Ferner ergibt sich aus (20), (38), (39) der Satz:

II. Die kartesischen Koordinaten der Resultantenfläche sind gleich der Summe oder Differenz der entsprechenden Koordinaten der Komponentenflächen.

Somit erhält man auch folgende Erzeugung der Resultantenfläche:

II*a*. Sind $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ zwei Punkte auf $F^{(1)}$ bezw. $F^{(2)}$, deren Normalen stets parallel laufen, so beschreibt der Punkt $P(x, y, z)$, der die Strecke $P_1 P_2$ in konstantem Verhältnis teilt, eine Resultantenfläche, deren Komponentenflächen $F^{(1)}$ bezw. $F^{(2)}$ ähnlich sind.

Ist das Teilverhältnis λ, sodaß

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{\lambda x_1 + x_2}{1+\lambda},\\ y &= \frac{\lambda y_1 + y_2}{1+\lambda},\\ z &= \frac{\lambda z_1 + z_2}{1+\lambda},\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

so ergibt sich für $\lambda = 1$ die auf die Hälfte verkleinerte, durch Addition entsprechender Koordinaten definierte Resultantenfläche.

Setzen wir jedoch (ein analoger Übergang findet sich nochmals im folgenden):

$$x(1+\lambda) = x', \quad y(1+\lambda) = y', \quad z(1+\lambda) = z' \tag{43}$$

Digitized by Google

und alsdann $\lambda = -1$, so wird

$$x' = x_1 - x_2, \quad y' = y_1 - y_2, \quad z' = z_1 - z_2. \tag{44}$$

Diese Fläche können wir nun bezeichnen als Ort der Endpunkte der Strecken, die von einem festen Punkte ausgehend, den Entfernungen entsprechender Punkte von $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ gleich und gleichgerichtet sind. Auch sie kann als Resultantenfläche von $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ bezeichnet werden; ihre Definition nach (44) findet sich ebenfalls bei Steiner[1]).

Wählen wir nun zu Parameterkurven die Krümmungslinien, so seien ds_1 und ds_2, ds_1' und ds_2' entsprechende Bogenelemente auf denselben; alsdann folgt sofort:

III. Der erste bezw. zweite Hauptkrümmungsradius der Resultantenfläche ist gleich der Summe der entsprechenden Hauptkrümmungsradien der Komponentenflächen.

IV. Jeder Mantel der Radialenfläche der Resultantenfläche ist Kissoidenfläche der entsprechenden Mäntel der Radialenflächen der Komponentenflächen.

V. Ein beliebiger Bogen auf der Resultantenfläche ist gleich der Summe oder Differenz der entsprechenden Bogen der Komponentenflächen.

Sind demnach auf allen Komponentenflächen durch eine bestimmte Gleichung

$$\varphi(p, q) = 0 \tag{45}$$

geodätische Linien bestimmt, so gilt dies im allgemeinen auch für die durch Addition entsprechender Krümmungsradien gebildete Resultantenfläche.

Lassen wir nun beliebig viele Komponentenflächen

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots F^{(n)}$$

zu (wo natürlich alle bisher aufgestellten Sätze erhalten bleiben), und sind E_i, F_i, G_i die Fundamentalgrößen erster Ordnung von $F^{(i)}$, E, F, G die der Resultantenfläche, so ist nach V:

$$\sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2} = \Sigma_i \sqrt{E_i\,dp^2 + 2F_i\,dp\,dq + G_i\,dq^2} \tag{46}$$

woraus sich leicht ableiten läßt:

$$\sqrt{E} = \Sigma\sqrt{E_i}, \quad \sqrt{F} = \Sigma\sqrt{F_i}, \quad \sqrt{G} = \Sigma\sqrt{G_i}. \tag{47}$$

[1]) loc. cit. Nr. 3, oder Gesammelte Werke, Berlin, Reimer, 1882, Band II.

Digitized by Google

Ferner folgt aus (25) und (39)

$$D = \Sigma D_i, \quad D' = \Sigma D_i', \quad D'' = \Sigma D_i'', \tag{48}$$

so daß also die Fundamentalgrößen der Resultantenfläche sich sehr einfach durch die der Komponentenflächen ausdrücken lassen.

Nach (48) werden D, D' und D'' gleichzeitig für die Komponenten- und Resultantenflächen verschwinden, somit folgt:

VI. Konjugierten Kurven oder Asymptotenkurven der Komponentenflächen entsprechen solche der Resultantenfläche.

Das erste Hauptkrümmungszentrum hat die Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= x + a R_1, \\ \eta_1 &= y + b R_1, \\ \xi_1 &= z + c R_1 \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Ist nun F eine Resultantenfläche, so addieren sich die kartesischen Koordinaten, sowie die Hauptkrümmungsradien der F_i bei gleicher Normalenrichtung; somit folgt:

VII. Die ersten bezw. zweiten Mäntel der Zentraflächen beliebiger Ordnung einer Resultantenfäche sind Resultantenflächen der entsprechenden Mäntel der Komponentenflächen.

VIII. Ist für alle Komponentenflächen $E_i = G_i$, $F_i = D_i' = 0$, können sie also durch die Krümmungslinien in Quadrate zerlegt werden[1]), so hat auch die Resultantenfläche diese Eigenschaft.

XI. Sind alle Komponentenflächen Minimalflächen, so ist auch die Resultantenfläche eine solche.

X. Die Resultantenfläche von Rotationsflächen mit paralleler Achse ist wieder eine Rotationsfläche, deren Meridianschnitt die Resultantenkurve der Meridianschnitte der Komponentenflächen ist.

Ist im besonderen bei zwei Komponentenflächen eine derselben eine Kugel, so wird die Resultantenfläche eine Parallelfläche der anderen Komponentenfläche. Mit Hilfe der sphärischen Abbildung lassen sich die meisten der obigen Sätze in eine besonders anschauliche Form bringen. Für die Fußpunkt- und Radialenflächen gehen dabei die Kissoidenflächen in Konchoidenflächen über, d. h. in Flächen, die durch Vergrößern oder Verkleinern der Radienvektoren um ein konstantes Stück entstehen. Endlich sei noch

[1]) Siehe etwa Weingarten, Sitzungsberichte der Berliner Akademie XLIII, 1883. „Über die Flächen, die durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden können".

Digitized by Google

bemerkt, daß die Resultantenfläche der beiden im Abstande $\pm d$ konstruierten Parallelflächen von F doppelt so groß wie F ist [1]).

4. Analog der vom Verfasser in seiner Dissertation gegebenen Definition der „allgemeinen Mannheimschen Kurve" möge nun eine Fläche F auf einer beliebigen anderen, auf ihr abwickelbaren Fläche Φ abrollen; die beiden Hauptkrümmungszentren des jeweiligen Berührungspunktes durchlaufen dann eine aus zwei Mänteln bestehende Fläche, die man „Mannheimsche Fläche von F in bezug auf Φ" nennen könnte. Auch könnte man auf den Normalen von F Strecken abtragen, die als bestimmte Funktionen von u und v gegeben sind; der Endpunkt würde eine soeben definierte Fläche beschreiben. Im besonderen können nun diese Strecken den beiden Hauptkrümmungsradien von Φ proportional sein, dann erhalten wir eine aus zwei Mänteln bestehende „Zwischenevolutenfläche", den Ort der Punkte, die die beiden Hauptkrümmungsradien von Φ in konstantem Verhältnis teilen. Wählen wir auf F und Φ zu Parameterkurven die Krümmungslinien, so ist die Beziehung analytisch dadurch ausgedrückt, daß

$$\left.\begin{aligned} E_F &= E_\Phi, \quad G_F = G_\Phi, \\ D_F &= \mu_1 D_\Phi, \quad D''_F = \mu_2 D_\Phi, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

wo μ_1 und μ_2 zwei beliebige Konstanten sind.

Die beiden Flächen F und Φ, wie übrigens alle durch Variation von μ_1 und μ_2 in

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \mu_1 f_1(s_1, s_2), \\ R_2 &= \mu_2 f_2(s_1, s_2) \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

entstehenden Flächen, mögen als „Flächen proportionaler Krümmung" bezeichnet werden [2]). Die Mannheimschen Flächen derselben sind zueinander in bezug auf die xy-Ebene affin.

Im folgenden sei nun stets $\mu_1 = \mu_2$. Setzen wir dann:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{1}{1+\lambda},$$

so ist λ der gemeinsame Wert des Teilverhältnisses, wobei $\lambda = \infty$ der Fläche F selbst, $\lambda = 0$ den beiden Mänteln der Zentralfläche entspricht. Sind wieder a, b, c die Richtungscosinus der Normalen,

[1]) Eine Beziehung zwischen den Flächenstücken findet sich bei Steiner, loc. cit.

[2]) Analoge Benennung für Kurven in der Dissertation des Verfassers, S. 12.

Digitized by Google

so sind die Koordinaten der beiden Teilpunkte (λ):

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= x + \mu a R_1,\\ \eta_1 &= y + \mu b R_1,\\ \zeta_1 &= z + \mu c R_1,\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

bezw.

$$\left.\begin{aligned}\xi_2 &= x + \mu a R_2,\\ \eta_2 &= y + \mu b R_2,\\ \zeta_2 &= z + \mu c R_2\end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Wir wollen nun (52) und (53) ersten bezw. zweiten Mantel der Zwischenevolutenfläche (λ) von F nennen und mit $F_\lambda^{(1)}$ bezw. $F_\lambda^{(2)}$ bezeichnen. Ist F eine algebraische Fläche, so ist die Ordnung von $F_\lambda^{(1)}$ oder $F_\lambda^{(2)}$ gleich der des entsprechenden Mantels der Zentralfläche.

Setzen wir in (52) oder (53)

$$\xi_i(1+\lambda) = \xi_i', \quad \eta_i(1+\lambda) = \eta_i', \quad \zeta_i(1+\lambda) = \zeta_i', \quad (i = 1, 2) \tag{54}$$

wodurch ja eine Ähnlichkeitstransformation bestimmt ist, und lassen dann $\lambda = -1$ werden, so ergeben sich die durch (5) definierten Mäntel der Radialenfläche [1]), mithin hat auch letztere für algebraische Flächen die Ordnung der Zentrafläche [2]).

Nach (52) ist nun, wenn wieder die Krümmungslinien Parameterkurven sind:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u} + a \frac{\partial R_i}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = \frac{1}{1+\lambda}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial v} + a \frac{\partial R_i}{\partial v}\right) (i=1,2) \tag{55}$$

nebst entsprechenden Gleichungen für η_i und ζ_i. Demnach werden die Fundamentalgrößen erster Ordnung von $F_\lambda^{(1)}$ und $F_\lambda^{(2)}$

$$\left.\begin{aligned}E_i &= \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 E + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 \left(\frac{\partial R_i}{\partial u}\right)^2\\ F_i &= \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 \frac{\partial R_i}{\partial u}\frac{\partial R_i}{\partial v}\\ G_i &= \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2 G + \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2 \left(\frac{\partial R_i}{\partial v}\right)^2 (i=1,2)\end{aligned}\right\}. \tag{56}$$

[1]) Entsprechende Ableitung der Radialen für ebene Kurven ebenda, S. 17. Durch entsprechende Anwendung auf (56) erhält man (9).

[2]) Für ebene Kurven ist die Ordnung der Radialen im allgemeinen gleich der der Evolute, G. Loria, loc. cit., Band II, S. 292—293.

Digitized by Google

Aus (56) schließen wir zunächst:

XI. Vergrößert man $F_\lambda^{(1)}$ im Verhältnis $1:1+\lambda$, $F_{-\lambda}^{(1)}$ im Verhältnis $1:1-\lambda$, so sind die beiden Flächen aufeinander abwickelbar; das gleiche gilt natürlich auch für $F_\lambda^{(2)}$ und $F_{-\lambda}^{(2)}$. Insbesondere ist jeder Mantel der Radialenfläche ($\lambda=-1$) auf dem aufs doppelte vergrößerten entsprechenden Mantel der für $\lambda=1$, d. h. beim Halbieren der Hauptkrümmungsradien entstehenden „Mittelevolutenfläche" abwickelbar. Für die Weingartenschen Flächen

$$R_1 \pm R_2 = c, \tag{57}$$

insbesondere für die Minimalflächen ($h=0$) ist $F_\lambda^{(1)}$ auf $F_\lambda^{(2)}$ abwickelbar; ist

$$R_1 = c R_2, \tag{58}$$

so sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zueinander affin, ferner fällt jede $F^{(1)}$ mit einer bestimmten $F^{(2)}$ zusammen; endlich sind für Minimalflächen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zueinander symmetrisch.

Für Rotationsflächen ist der eine Hauptkrümmungsradius zugleich Krümmungsradius des Meridianschnittes der andere gleich der Normalen des letzteren. $F^{(1)}$ und $F^{(2)}$ sind alsdann ebenfalls Rotationsflächen, deren Meridianschnitte Zwischenevoluten des Meridianschnittes von F sind, bezw. Ort des Punktes, der die Normalen desselben in konstantem Verhältnis teilt. Ist der Meridianschnitt im besonderen eine Ribaucoursche Kurve (z. B. für das Katenoid eine Kettenlinie), so ist Gleichung (58) erfüllt.

Ist F eine geradlinige Fläche, z. B. $R_1=\infty$, so gehen alle $F^{(1)}$, ferner $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ in die unendlich ferne Ebene über; ist

$$R_1 . R_2 = a^2, \tag{59}$$

hat F also konstante Totalkrümmung, so ist $\mathfrak{R}_1$ eine Inverse von $\mathfrak{R}_2$. Ist endlich F eine Fläche, deren mittlere Krümmung konstant ist, so ist die Inverse von $\mathfrak{R}_1$ eine Konchoide der Inversen von $\mathfrak{R}_2$; dies gilt beispielsweise [1]) für die Rotationsflächen der Delaunayschen Kurven.

Weiter folgt aus (56) für das Bogenelement auf $F_\lambda^{(i)}$:

$$ds_\lambda^{(i)} = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\lambda^2 ds^2 + dR_i^2}, \quad (i=1,2) \tag{60}$$

in bester Übereinstimmung mit dem entsprechenden Ergebnis für ebene Kurven; dort ist nämlich

$$ds = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\lambda^2 ds^2 + dR^2}. \tag{60'}$$

[1]) Siehe etwa H. Wieleitner, loc. cit., S. 279.

Digitized by Google

Demnach ergibt sich die Doppelproportion:

$$s_\lambda^{(1)} : s_{-\lambda}^{(1)} = s_\lambda^{(2)} : s_{-\lambda}^{(2)} = 1 - \lambda : 1 + \lambda \tag{61}$$

und wir schließen:

XII. Sind zwei Flächen $F_\lambda^{(1)}$ und $F_{-\lambda}^{(1)}$ oder $F_\lambda^{(2)}$ und $F_{-\lambda}^{(2)}$ als Zwischenevolutenflächen ($\pm\lambda$) in bezug auf R_1 oder R_2 einer bestimmten Fläche F aufzufassen und durchlaufen zwei Punkte dieselben auf entsprechenden Kurven mit Geschwindigkeiten, die sich wie $1-\lambda : 1+\lambda$ verhalten, so ist die Rückkehrkante der Einhüllenden ihrer Verbindungsgeraden die entsprechende Kurve auf dem zugehörigen Mantel der Zentrafläche von F.

Auch dieser Satz, der eine ∞^2-fache Erzeugung aller Flächen gestattet, entspricht einer analogen Erzeugung der ebenen Kurven mit Hilfe der Zwischenevoluten [1]).

Herr Wieleitner hat eine Kurve mit der Gleichung

$$R = f(s) + c \tag{62}$$

eine „natürliche Konchoide" der Kurve

$$R = f(s) \tag{62'}$$

genannt [2]); analog wollen wir alle durch Variation von c_1 und c_2 in

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= f_1(s_1, s_2) + c_1 \\ R_2 &= f_2(s_1, s_2) + c_2 \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

gebildeten Flächen „natürliche Konchoidenflächen" von (4) nennen.

Für (63) ist natürlich

$$E_1 = E, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = G \tag{64}$$

während sich die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung ergeben als:

$$D_1 = \frac{ED}{E - c_1 D}, \quad D_1' = 0, \quad D_1'' = \frac{G D''}{G - c_2 D''}. \tag{65}$$

Aus (60) folgt nun leicht:

XIII. Entsprechende Zwischenevolutenflächen von (4) und (63) sind aufeinander abwickelbar; insbesondere gilt dies für die Radialflächen [3]).

[1]) Dissertation des Verfassers, S. 14.

[2]) H. Wieleitner, „Über eine Verallgemeinerung des Begriffes der Mannheimschen Kurve", Math.-nat. Mitt. Württbg. (2), (IX), 1907; Spez. Eb. Kurven, S. 320.

[3]) Für ebene Kurven siehe Dissertation des Verf., S. 19.

Digitized by Google

Setzen wir ferner in (50)

$$c_1 = c_2 = \gamma,$$

so folgt:

XIV. Entsprechende Mäntel der Zwischenevolutenfläche (λ) von (4) und der Zwischenevolutenfläche ($\lambda\gamma$) von (50) sind aufeinander abwickelbar [1]).

Für entsprechende Flächenstücke auf $F_\lambda^{(i)}$ und $F_{-\lambda}^{(i)}$ gelten die Proportionen

$$F_\lambda^{(1)} : F_{-\lambda}^{(1)} = F_\lambda^{(2)} : F_{-\lambda}^{(2)} = (1-\lambda)^2 : (1+\lambda)^2.$$

Entspricht einer geschlossenen Kurve K auf F die Kurve $K_\lambda^{(1)}$ auf $F_\lambda^{(1)}$ so schließen $K_\lambda^{(1)}$, die Normalen von F längs K sowie der erste Mantel der Zentralfläche ein Volumen ein, das bestimmt ist durch

$$V_\lambda^{(1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^3 \iint_{(K)} \frac{\sqrt{EG.E}}{D} \cdot du\,dv. \tag{67}$$

Für $\lambda = -1$ wird der entsprechende Raum der Radialenfläche $\mathfrak{R}_1$:

$$V_1 = \frac{1}{3} \iint_{(K)} \frac{\sqrt{EG.E}}{D}\, du\,dv, \tag{68}$$

während für $\mathfrak{M}_1$:

$$V_1' = \iint_{(K)} \frac{\sqrt{EG.D}}{D}\, du\,dv. \tag{69}$$

Daraus folgt:

XV. Entsprechende Teile des von der Mannheimschen Fläche und der Basisebene, oder der Radialenfläche und den Radienvektoren begrenzten Raumes verhalten sich wie 3 : 1; letzterer ist ferner gleich dem Raume der von F, dem entsprechenden Mantel der Zentrafläche und den Normalen längs K begrenzt wird [2]).

Da der Radiusvektor von $\mathfrak{R}_i$ und die (gleiche) z-Koordinate von $\mathfrak{M}_i$ unter gleichen Winkeln gegen die entsprechende Tangentialebene geneigt sind, so folgt auf Grund der Gleichheit entsprechender Bogen [3]):

XVI. Rollt ein Mantel der Radialenfläche auf dem zugehörigen Mantel der Mannheimschen Fläche ab, so durchläuft der Pol die Basisebene oder die Fläche Φ,

[1]) Dissertation, S. 19.

[2]) Für ebene Kurven siehe Mannheim, Géom. ciném. S. 501, dem letzteren Teile entspricht eine Bemerkung von P. Ernst, Archiv der Math. und Physik, (3), XIV, 1909, S. 94—98. „Die Radiale einer ebenen Kurve“ oder loc. cit. Nr. 3.

[3]) Für ebene Kurven siehe Dissertation des Verf., S. 45.

Digitized by Google

von der die Mannheimsche Fläche Äquidistante ist in Bezug auf die Basisebene; ferner ist Φ Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Mannheimschen Fläche liegen und die die x-y-Ebene berühren.

XVII. Rollt umgekehrt die Mannheimsche Fläche auf der Radialenfläche ab, so dreht sich die Basisebene um den Pol der letzteren oder sie hüllt die aufs doppelte vergrößerte Fußpunktfläche der Radialenfläche ein; diese Fläche ist zugleich Einhüllende aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Radialenfläche liegen und die durch den Pol gehen.

Allgemein gilt der Satz:

XVIII. Rollt eine Fläche F auf einer anderen Fläche F_1 ab und hüllt dabei eine mit F fest verbundene Ebene E die Fläche Φ ein, so geht jede Normale von Φ durch den momentanen Berührungspunkt von F und F_1.

Daraus folgt wieder:

XIX. Rollt die Mannheimsche Fläche von F auf einer anderen Fläche F_1 ab, so hüllt ihre (xy)-Ebene dieselbe Fläche Φ ein, die sich bei analogem Abrollen der Radialenfläche als Bahn des Poles der letzteren ergibt.

Hieraus folgt:

XX. Beschreibt beim Abrollen der Radialen von F auf F_1 auf F_1 der Pol die Fläche Φ, so durchläuft beim Abrollen der Radialen einer natürlichen Konchoide der Fläche F der Pol eine Parallelfläche von Φ.

Ist beispielsweise F eine Kugel, so wird die Mannheimsche Fläche eine (doppelt zu zählende) Ebene parallel der (xy)-Ebene, während die Radialenfläche aus zwei, F kongruenten Kugeln besteht. Rollt nun F auf einer beliebigen Fläche F_1 ab, so beschreibt der Mittelpunkt dieselbe Parallelfläche zu F_1, die sich beim Abrollen der einen Ebene als Einhüllende der anderen ergibt.

Aus (60) folgt ferner:

Entsprechende Bogen auf $F_\lambda^{(1)}$ einer Fläche

$$f_1(s_1, s_2, R_1) = 0, \quad f_2(s_1, s_2, R_2) = 0 \tag{70}$$

und dem ersten Mantel der Mannheimschen oder Radialenfläche von

$$f_1(s_1, s_2, \lambda R_1) = 0, \quad f_2(s_1, s_2, \lambda R_2) = 0 \tag{71}$$

verhalten sich wie $1 : 1 + \lambda$.

Da ferner die Ordinate (Radiusvektor) der Mannheimschen-(Radialen-)fläche von (71) gegen die Tangentialebene von (70)

Digitized by Google

unter demselben Winkel geneigt ist wie die Normale von (70) gegen die Tangentialebene von F_λ, so folgt:

XXI. Rollen auf $F_1^{(1)}$ oder $F_1^{(2)}$ die ersten oder zweiten Mäntel der Mannheimschen- oder Radialenfläche der Fläche proportionaler Krümmung

$$\left.\begin{aligned} f_1\left(s_1\frac{(1+\lambda)}{\lambda},\ s_2\frac{1+\lambda}{\lambda},\ R_1(1+\lambda)\right)&=0\\ f_2\left(s_2\frac{1+\lambda}{\lambda},\ s_2\frac{1+\lambda}{\lambda},\ R_2(1+\lambda)\right)&=0\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

ab, sie stets in Punkten proportionaler Krümmung berührend, so ist die Einhüllende der Basisebene oder die Bahn des Poles die Fläche F selbst.

Da hiebei λ varieren kann, ferner die Proportionalitätsfaktoren von R_1 und R_2 auch verschieden sein können, so erhalten wir eine ∞^2-fache Erzeugung aller Flächen.

Auf zwei harmonischen Zwischenevolutenflächen rollen dabei ähnliche Flächen ab, auf der Mittelevolutenfläche die auf die Hälfte verkleinerten Mäntel der Radialen- oder Mannheimschen Fläche.

Entsprechend diesem Satze existiert auch für ebene Kurven eine ∞_1-fache Erzeugung als Rollkurven, wobei ebenfalls die Zwischenevoluten Basiskurven sind.[1])

[1]) Der analoge Satz für ebene Kurven findet sich in der Diss. des Verf., Seite 48.

Digitized by Google

Die Drehungsinvarianten einer Fläche zweiter Ordnung.

Von **Roland Weitzenböck** in Graz.

Wir legen dem Folgenden homogene rechtwinklige Koordinaten zu Grunde, d. h. wir setzen, wenn x, y, z gewöhnliche Cartesische Koordinaten im Raume bedeuten:

$$x = \frac{X_1}{X_4}, \quad y = \frac{X_2}{X_4}, \quad z = \frac{X_3}{X_4}.$$

Es ist dann durch $X_4 = 0$ die uneigentliche oder unendlich ferne Ebene dargestellt.

Dann bezeichne D die gemischte, dreigliedrige Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Spiegelungen am Ursprunge $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Eine Fläche zweiter Ordnung ist gegeben durch eine quadratische, quaternäre Form

$$f = \Sigma a'_{ik} X_i X_k = 0$$

in Punktkoordinaten X_i. Es wird im folgenden ein vollständiges Formensystem der Grundform f bezüglich der Gruppe D aufgestellt.

Dies heißt folgendes: Wir fügen der Grundform f eine Linearform $(u' X) = \Sigma u'_i X_i$ in Punktkoordinaten X_i, eine Linearform $(x U') = \Sigma x_i U'_i$ in Ebenenkoordinaten U'_i und schließlich eine dritte Linearform $\Sigma p_{ik} \Pi_{ik}$ in Komplexkoordinaten Π_{ik} hinzu, so daß wir das erweiterte System

$$\Sigma = f, \ (u' X), \ (x U'), \ \Sigma p_{ik} \Pi'_{ik}$$

erhalten.

Eine ganze, rationale, nicht konstante Funktion der a'_{ik}, u'_i, x_i, p_{ik}, die homogen bezüglich jeder einzelnen dieser Größenreihen ist und bezüglich der Gruppe D die Invarianteneigenschaft besitzt, nennen wir dann eine „Drehungsinvariante".

Ein vollständiges Formensystem von Drehungsinvarianten der Grundform f ist dann identisch mit einem vollständigen Invariantensystem der Grundformen von Σ, d. h. mit einem System von Drehungsinvarianten, durch die jede ganze rationale Drehungsinvariante der Formen von Σ ganz und rational ausdrückbar ist.

Digitized by Google

Ein solches vollständiges Formensystem von Drehungsinvarianten der Grundform f enthält dann selbstverständlich auch ein vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten der Grundform f.

Das hier mitgeteilte vollständige Formensystem ist seiner Ableitung nach ein kleinstes, d. h. kann nicht durch weniger Drehungsinvarianten ersetzt werden und besteht aus 2764 Drehungsinvarianten. Unter diesen sind acht Invarianten, die nur die Koeffizienten a'_{ik} von f enthalten und diese acht bilden ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten der Grundform f.

Die Gruppe D ist Untergruppe der Gruppe der Euklidischen Bewegungen und Umlegungen und der sogenannten Hauptgruppe des dreidimensionalen Raumes. Es folgt hieraus, daß sich alle ganzen rationalen (und daher auch alle algebraischen) Invarianten von f und der Formen des Systems Σ durch die 2764 Drehungsinvarianten des vollständigen Formensystems ausdrücken lassen. Mit anderen Worten: Durch die Angabe dieses Formensystems erfolgt zugleich eine erschöpfende Aufzählung derjenigen Ausdrücke, die bei algebraischen Untersuchungen einer Fläche zweiter Ordnung in der Elementargeometrie vorkommen.

Die Herleitung des Formensystems, sowie die Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit der Drehungsinvarianten beruht auf den beiden Fundamentalsätzen der symbolischen Methode, wie sie für die Gruppe D Gültigkeit haben. Ein Beweis dieser Sätze wird demnächst in einer Arbeit erscheinen.[1])

Daß es ferner genügt die Formen des Systems Σ zu betrachten um alle Drehungsinvarianten eines vollständigen Formensystems der Grundform f zu übersehen, beruht auf einem von A. Clebsch bewiesenen Satze.[2])

Die Darstellungsweise ist durchwegs symbolisch. Es ist dies unserer Ansicht nach der einzig gangbare Weg um in den Besitz eines solchen umfangreichen Formensystems zu gelangen.

§ 1.

Es sei

$$f = \Sigma_{ik}\, a'_{ik}\, x_i\, x_k \equiv (a'\,x)^2 \equiv (b'\,x)^2 \equiv (c'\,x)^2 \equiv \cdots \qquad (1)$$

die quaternäre, quadratische Form, die gleich Null gesetzt, unsere Fläche zweiter Ordnung darstellt. Es sind dann a', b', c', ... äquivalente Reihen von gewöhnlichen Symbolen.

[1]) Vgl. Denkschriften der Kaiserl. Ak. d. Wiss., Wien, mathem-naturw. Klasse (1913).

[2]) A. Clebsch, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, Göttinger Nachrichten 1872.

Digitized by Google

Dann bedeute l' die Größenreihe $0:0:0:1$ und

$$(l'x) \equiv x_4 = 0 \tag{2}$$

sei die Gleichung der uneigentlichen Ebene. x und u' bedeuten die Größenreihen $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ bezw. $u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4$.

$p_{ik} = p'_{mn}$ seien die Plücker schen Koordinaten einer Geraden, oder, — was wenig allgemeiner ist — die Koordinaten eines linearen Strahlenkomplexes. Die sechs Größen p_{ik} und ebenso p'_{mn} stellen wir mittels Komplexsymbolen p_i bezw p'_i dar:

$$p_{ik} = p_i p_k, \quad p'_{mn} = p'_m p'_n.$$

Es sollen dann $q, r, \pi, \rho, \ldots$ Reihen von ungestrichelten Komplexsymbolen sein, die mit der Reihe p äquivalent sind; die analoge Bedeutung mögen die gestrichelten Reihen $q', r', \pi', \rho', \ldots$ haben.

Die symbolischen Faktoren, aus denen sich die Invarianten eines vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten aufbauen, werder dann gebildet aus den Symbolreihen:

$$a', b', c', \ldots; l'. \tag{3}$$

Die symbolischen Faktoren, aus denen sich die Invarianten eines vollständigen Formensystems von Drehungsinvarianten aufbauen, werden gebildet aus den Symbolreihen:

$$a', b', c', \ldots; l'; x; u'; p, q, r, \ldots; p', q', r', \ldots. \tag{4}$$

(3) wird von (4) umfaßt und wir gehen im folgenden von den Symbol- und Größenreihen (4) aus.

Jetzt entsteht die Frage nach den verschiedenen Faktorentypen die man aus den Reihen (4) bilden kann. Hiebei rechnen wir zwei symbolische Faktoren zu demselben Typus, wenn der eine aus dem anderen durch Vertauschung äquivalenter Symbolreihen entstehen kann.

Wir schreiben im folgenden die Faktorentypen hin [Vgl. (9)]. Dabei bilden wir zuerst Faktoren erster Art und dann Faktoren zweiter Art und es sind dann die folgenden Umstände zu beachten:

1. Bei den Faktoren erster Art ist $(l'l') = 1$ und (pp), sowie $(p'p')$ verschwinden identisch.

2. Wir können von vornherein solche Faktoren zweiter Art weglassen, in welchen Komplexsymbole vorkommen. Kommt nämlich z. B. eine Reihe von Komplexsymbolen p in einem Klammerfaktor $(pyzt)$ vor, wo y, z, t irgend welche andere Symbol- oder Größenreihen sind, so sei (pv') derjenige Faktor, der die zweite Symbolreihe p enthält. Es ist dann:

$$(pyzt)(pv') \equiv (p'z)(p't)(yv') - (p'y)(p't)(zv') + (p'y)(p'z)(tv') \tag{5}$$

Digitized by Google

und rechter Hand kommen anstatt des Klammerfaktors $(pyzt)$ nur mehr Linearfaktoren vor.

Sind aber beide Symbolreihen p in einem Klammerfaktor $(ppyz) = (p^2yz)$ vereinigt, so hat man direkt:

$$(p^2yz) \equiv 2(p'y)(p'z). \tag{6}$$

Das Duale gilt für gestrichelte Symbolreihen q'.

Wir können uns somit bei solchen Faktoren, in denen Komplexsymbole vorkommen, auf Linearfaktoren beschränken.

3. Wenn ein Klammerfaktor $(yzts)$ die Größenreihe l' nicht enthält, so können wir ihn aus der Untersuchung ausschalten. Wir haben nämlich durch identische Umformung, wegen $(l'l') = 1$:

$$(yzts) \equiv (yzts)(l'l') \equiv (l'zts)(l'y) - (l'yts)(l'z) + (l'yzs)(l't) - (l'yzt)(l's) \tag{7}$$

und hier kommen rechts nur mehr solche Klammerfaktoren vor, die die Größenreihe l' enthalten.

4. Wir haben nur solche Drehungsinvarianten zu bilden, die höchstens einen einzigen Klammerfaktor enthalten, der dann nach 3. und 2. vom Typus $(l'yzt)$ ist, wo y, z und t keine Komplexsymbole sind. Wir können nämlich das Produkt von zwei Klammerfaktoren $(yzts)$ und $(abcd)$ immer mit Hilfe der Identität

$$(yzts)(abcd) - \begin{vmatrix} (ay) & (az) & (at) & (as) \\ (by) & (bz) & (bt) & (bs) \\ (cy) & (cz) & (ct) & (cs) \\ (dy) & (dz) & (dt) & (ds) \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{8}$$

durch Linearfaktoren ausdrücken.

Nach diesen Überlegungen bilden wir aus (4) die noch möglichen Faktorentypen. Wir erhalten:

$$\begin{array}{llll} f_1 = (a'a') & f_8 = (l'x) & f_{19} = (pq) & f_{22} = (a'b'c'l') \\ f_2 = (a'b') & f_9 = (l'u') & f_{20} = (pq') & f_{23} = (a'b'l'x) \\ f_3 = (a'l') & f_{10} = (l'p) & f_{21} = (p'q') & f_{24} = (a'b'l'u') \\ f_4 = (a'x) & f_{11} = (l'p') & & f_{25} = (a'l'xu') \\ f_5 = (a'u') & f_{12} = (xx) & & \\ f_6 = (a'p) & f_{13} = (xu') & & \\ f_7 = (a'p') & f_{14} = (xp) & & \\ & f_{15} = (xp') & & \\ & f_{16} = (u'u') & & \\ & f_{17} = (u'p) & & \\ & f_{18} = (u'p') & & \end{array} \tag{9}$$

Digitized by Google

§ 2.

Wir beginnen jetzt mit dem Aufbau der Drehungsinvarianten aus den Faktoren (9) und wenden uns zuerst den Faktoren zweiter Art zu.

Wir verwenden im weiteren oft das Wort „reduzierbar". Wir sagen ein Faktortypus f_i sei auf andere Faktorentypen $f_k, f_j, \ldots$ reduzierbar, wenn die Invariante I, welche f_i enthält, so identisch umgeformt werden kann, daß der Faktortypus f_i nicht mehr auftritt, sondern im Umformungsresultat nur mehr Faktortypen $f_k, f_j, \ldots$ vorkommen. So ist z. B. nach § 1 der Faktorentypus $(a'\,b'\,c'\,d')$ reduzierbar auf die Typen $(a'\,b'\,c'\,l')$ und $(l'\,d')$. [Vgl. Gleichung (7)].

Eine Drehungsinvariante I nennen wir reduzierbar, wenn sie durch schon bekannte, d. h. dem Formensystem angehörige Invarianten ganz und rational ausdrückbar ist.

Hat ein Faktortypus die Eigenschaft, daß jede Drehungsinvariante, die ihn enthält, reduzierbar ist, so heißt dieser Faktor ein „Reduzent".[1])

Wir werden im folgenden vorerst die Faktoren zweiter Art f_{22} bis f_{25} absolvieren. Hiebei setzen wir diejenigen Drehungsinvarianten als bekannt voraus, die sich durch Faktoren erster Art allein darstellen lassen. Unter diesem Gesichtspunkte haben wir den Satz: Der Faktor $(a'\,b'\,c'\,d')$ ist ein Reduzent.

Beweis: Da in einer Drehungsinvariante I höchstens ein Klammerfaktor vorkommt, so haben wir den Ansatz:

$$I = (a'\,b'\,c'\,d')\,(a'\,y)\,(b'\,z)\,(c'\,t)\,(d'\,s)\,I' \tag{10}$$

wo y, z, t und s irgend welche weitere der Reihen $e', f', \ldots, l', x, u', p, p'$ sind. Die Vertauschung der äquivalenten Symbole a', b', c' und d' und nachherige Addition der so entstehenden Gleichungen gibt:

$$24\,I = (a'\,b'\,c'\,d')^2\,(y\,z\,t\,s)\,I'. \tag{11}$$

Es enthält also I den Faktor $(a'\,b'\,c'\,d')^2$, der ganz und rational durch die später aufgezählten Invarianten[2])

$$\left.\begin{aligned} A_1 = (a'\,a'),\ A_2 = (a'\,b')^2,\ A_3 = (a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,a'),\\ A_4 = (a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,d')\,(d'\,a') \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

ausgedrückt werden kann:

$$(a'\,b'\,c'\,d')^2 = A_1^4 - 6\,A_1^2\,A_2 + 8\,A_1\,A_3 + 3\,A_2^2 - 6\,A_4. \tag{13}$$

[Vgl. die Identität (8)].

[1]) Vgl. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie II, p. 140, Leipzig 1887.

[2]) Diese Invarianten sind nichts anderes als die Invarianten der durch $x_i = a_i'\,(a'\,\bar{x})$ dargestellten Kollineation, die sich durch Zusammenfügen der beiden Polaritäten bezüglich $f = (a'\,x)^2 = 0$ und $(x\,x) = 0$ ergibt. Vgl. diese Monatshefte, Bd. XII, (1911), p. 207.

Digitized by Google

Wenn wir die Identität (8) auf das Produkt $(a'b'c'y)(a'b'c'z)$ anwenden, so erhalten wir:

$$(a'b'c'y)(a'b'c'z) \equiv \begin{vmatrix} (a'a') & (a'b') & (a'c') & (a'z) \\ (b'a') & (b'b') & (b'c') & (b'z) \\ (c'a') & (c'b') & (c'c') & (c'z) \\ (ya') & (yb') & (yc') & (yz) \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir diese vierreihige Determinante nach der letzten Spalte und letzten Zeile und berücksichtigen die Vertauschbarkeit der Symbole a', b' und c', so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(a'b'c'y)(a'b'c'z) \equiv\ & 6(ya')(a'b')(b'c')(c'z) - 6A_1(ya')(a'b')(b'z) + \\ & + 3[A_1^2 - A_2](ya')(a'z) - [A_1^3 - 3A_1A_2 + 2A_3](yz).\end{aligned} \tag{14}$$

Die rechts als Koeffizienten auftretenden Invarianten bezeichnen wir der Kürze halber mit α_0, α_1, α_2 und α_3, so daß wir statt (14) die Gleichung haben:

$$\begin{aligned}(a'b'c'y)(a'b'c'z) \equiv\ & \alpha_0(ya')(a'b')(b'c')(c'z) + \\ & + \alpha_1(ya')(a'b')(b'z) + \alpha_2(ya')(a'z) + \alpha_3(yz).\end{aligned} \tag{15}$$

Wir setzen nun:

$$\left.\begin{array}{ll} P_0 = (yz) & Q_0 = z \\ P_1 = (ya')(a'z) & Q_1 = a'(a'z) \\ P_2 = (ya')(a'b')(b'z) & Q_2 = a'(a'b')(b'z) \\ P_3 = (ya')(a'b')(b'c')(c'z) & Q_3 = a'(a'b')(b'c')(c'z) \\ \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} \end{array}\right\}. \tag{16}$$

Diese kettenartigen Bildungen

$$(ya')(a'b')(b'c')\ldots(g'h')(h'z)$$

lassen sich beliebig lange herstellen; wir zeigen jetzt, daß von P_4 an alle weiteren P_i auf P_0, P_1, P_2 und P_3 reduzierbar sind.

Setzen wir nämlich in (15) $z = Q_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, so entsteht links der Ausdruck

$$(a'b'c'd')(a'b'c'y)(d'e')(e'f')\ldots(h'z)$$

der durch identische Umformung von $(a'b'c'y)(d'e')$ auf die Gestalt

$$\frac{1}{4}(a'b'c'd')^2(ye')(e'f')\ldots(h'z) = \frac{1}{4}(a'b'c'd')^2 P_{i-1}$$

Digitized by Google

gebracht werden kann. Wir erhalten so aus (15):

$$\frac{1}{4}(a'b'c'd')^2 P_{i-1} \equiv \alpha_0 P_{i+3} + \alpha_1 P_{i+2} + \alpha_2 P_{i+1} + \alpha_3 P_i,$$

d. h., wenn wir i statt $i+3$ schreiben (i ist dann $\geqq 4$), wegen $\alpha_0 = 6$:

$$6 P_i \equiv -\alpha_1 P_{i-1} - \alpha_2 P_{i-2} - \alpha_3 P_{i-3} + \frac{1}{4}(a'b'c'd')^2 P_{i-4} \quad (i \geqq 4). \quad (17)$$

Diese Identität zeigt, daß P_4, P_5, P_6,... durch die vier Invarianten A_1, A_2, A_3, A_4 und P_0, P_1, P_2 und P_3 ausgedrückt werden können. Wir brauchen also bei den kettenartigen Bildungen P_i und Q_i nur bis zu solchen zu gehen, die die Koeffizienten a'_{ik} von f im dritten Grade enthalten. Die Bemerkung ist für das Folgende von besonderer Wichtigkeit.

§ 3.

Wir nehmen nun an, eine Drehungsinvariante I enthält einen der Faktoren f_{22} bis f_{25}. Dann ordnen wir die Faktoren von I in bestimmter Weise. Sei z. B.

$$I = (a'b'l'x)\, I'.$$

Wir bilden nun von a' ausgehend eine Kette, indem wir an den Faktor $(a'b'l'x)$ denjenigen Faktor, z. B. $(a'c')$ ausschließen, der das zweite Symbol a' enthält; an diesen Faktor $(a'c')$ reihen wir $(c'd')$, etc., so daß wir erhalten

$$I = (a'b'l'x)(a'c')(c'd')\ldots(f'y)\, I''.$$

Dasselbe machen wir mit b':

$$I = (a'b'l'x)(a'c')(c'd')\ldots(f'y)(b'g')(g'h')\ldots(m'z)\, I'''.$$

Die Ketten

$$(a'c')(c'd')\ldots(f'y) \text{ und } (b'g')(g'h')\ldots(m'z)$$

endigen hiebei mit y bezw. z. Wenn schon die erste dieser Ketten $(a'c')(c'd')\ldots(f'y)$ mit b' endigt, wenn also $y = b'$ und

$$I = (a'b'l'x)(a'c')\ldots(f'b')\, I'$$

ist, so ist $I \equiv 0$ wegen der Äquivalenz der Symbolreihen a', b', c', d',...f'. Wir können also $y \neq b'$ und ebenso $z \neq a'$ voraussetzen.

Digitized by Google

Wäre ferner y z. B. $= p$ und $(p\,v')$ der Linearfaktor von I, der die zweite Reihe von Komplexsymbolen p enthält, so hätten wir

$$I = (a'\,b'\,l'\,x)\,(a'\,c')\ldots(f'\,p)\,(p\,v')\ldots \equiv \frac{1}{2}\,(a'\,b'\,l'\,x)\,(p'^2 f'\,v')\ldots$$

und dies gibt nach (8) lauter Linearfaktoren, d. h. I wäre auf Linearfaktoren reduzierbar. Dasselbe gilt, wenn $y = p'$ ist. Wir können also auch voraussetzen, daß y und z keine Komplexsymbole sind.

Nach dem vorigen Paragraph genügt es weiters nur solche Ketten $(a'\,c')\,(c'\,d')\ldots(f'\,y)$ zu betrachten, die die a'_{ik} höchstens im dritten Grade enthalten, also nur solche Ketten wie sie in (16) angeschrieben stehen.

Setzen wir:

$$\left.\begin{array}{lll} Q_0^{l'} = l' & Q_0^{x} = x & Q_0^{u'} = u' \\ Q_1^{l'} = a'\,(a'\,l') & Q_1^{x} = a'\,(a'\,x) & Q_1^{u'} = a'\,(a'\,u') \\ Q_2^{l'} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,l') & Q_2^{x} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,x) & Q_2^{u'} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,u') \\ Q_3^{l'} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,l') & Q_3^{x} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,x) & \\ & & Q_3^{u'} = a'\,(a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,u') \end{array}\right\} \quad (17)$$

so kommt die Untersuchung der Drehungsinvarianten mit Klammerfaktoren auf die Untersuchung der Ausdrücke

$$(Q_i^{\alpha}\,Q_k^{\beta}\,Q_j^{\gamma}\,l') \quad \begin{matrix}(i,\,k,\,j = 0,\,1,\,2,\,3)\\ (\alpha,\,\beta,\,\gamma = l',\,x,\,u')\end{matrix} \qquad (18)$$

hinaus.

Jetzt behandeln wir zuerst solche Drehungsinvarianten, die einen Faktor vom Typus $f_{22} = (a'\,b'\,c'\,l')$ enthalten. Wir haben hier:

$$I = (Q_i^{\alpha}\,Q_k^{\beta}\,Q_j^{\gamma}\,l') \quad \begin{matrix}(i,\,k,\,j = 1,\,2,\,3)\\ (\alpha,\,\beta,\,\gamma = l',\,x,\,u').\end{matrix}$$

Als bekannt setzen wir hiebei Invarianten mit den Faktorentypen f_{23}, f_{24} und f_{25} voraus und nennen I reduzierbar, wenn I auf diese Faktoren und auf Linearfaktoren reduzierbar ist.

Dann gilt der Satz: $I = (Q_i^{\alpha}\,Q_k^{\beta}\,Q_j^{\gamma}\,l')$ ist auf $(Q_1^{l'}\,Q_r^{\beta}\,Q_s^{\gamma}\,l')$ reduzierbar, d. h. es ist:

$$I = (Q_i^{\alpha}\,Q_k^{\beta}\,Q_j^{\gamma}\,l') = \text{Red.} + (Q_1^{l'}\,Q_r^{\beta}\,Q_s^{\gamma}\,l') \quad \begin{matrix}(i,\,k,\,j,\,r,\,s = 1,\,2,\,3)\\ (\beta,\,\gamma = l',\,x,\,u').\end{matrix} \qquad (19)$$

Zum Beweise dieses Satzes unterscheiden wir zwei Fälle:

1. $i = 1$, 2. $i \geqq 2$ d. h. $i = 2$ oder 3.

Digitized by Google

Erster Fall: Ist $i=1$, also $I=(Q_1^\alpha Q_k^\beta Q_j^\gamma l')$, so ist der Satz für $\alpha=l'$ richtig. Wir setzen also jetzt $\alpha \neq l'$, d. h. $\alpha = x$ oder u' voraus. Dann haben wir:

$$I=(a'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(a'\,\alpha). \tag{20}$$

Dies gibt durch identische Umformung:

$$I \equiv (\alpha\,Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(a'\,a') - (\alpha\,a'\,Q_j^\gamma l')\,(Q_k^\beta a') + (\alpha\,a'\,Q_k^\beta l')\,(Q_j^\gamma a') - \\ - (\alpha\,a'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma)\,(l'\,a').$$

$$I \equiv \text{Red.} - (\alpha\,Q_{k+1}^\beta Q_j^\gamma l') + (\alpha\,Q_{j+1}^\gamma Q_k^\beta l') - (\alpha\,Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma). \tag{21}$$

Hier stehen rechts als zweites und drittes Glied zwei Drehungsinvarianten mit Faktorentypen f_{23} oder f_{24}; wir können also schreiben:

$$I=\text{Red.}+(Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma \alpha) \tag{22}$$

und es ist nach Voraussetzung $\alpha \neq l'$. Daher können wir auf $(Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma \alpha)$ die Identität (7) anwenden:

$$(Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma \alpha) \equiv (l'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma \alpha)\,(l'\,Q_1^{l'}) - (l'\,Q_1^{l'} Q_j^\gamma \alpha)\,(l'\,Q_k^\beta) + \\ + (l'\,Q_1^{l'} Q_k^\beta \alpha)\,(l'\,Q_j^\gamma) - (l'\,Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma)\,(l'\,\alpha)$$

d. h. wir haben so wie bei (21):

$$(Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma \alpha) = \text{Red.} + (Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(l'\,\alpha),$$

und daher ist wegen (22) auch:

$$I=\text{Red.}+(Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma l'). \tag{23}$$

Hiemit ist der Satz für $i=1$ bewiesen.

Im zweiten Falle haben wir $i \geq 2$, also ist:

$$I=(a'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(a'\,b')\ldots(c'\,\alpha) \quad \begin{matrix}(k,j=1,2,3)\\(\beta,\gamma=l',x,u').\end{matrix} \tag{24}$$

Hier formen wir das Produkt $(a\,Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(b'\,a')$ identisch um. Wir haben:

$$I \equiv (b'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma l')\,(a'\,a') - (b'\,a'\,Q_j^\gamma l')\,(Q_k^\beta a') + (b'\,a'\,Q_k^\beta l')\,(Q_j^\gamma a') - \\ - (b'\,a'\,Q_k^\beta Q_j^\gamma)\,(l'\,a').$$

$$I \equiv \text{Red.} - (Q_{i-1}^\alpha Q_{k+1}^\beta Q_j^\gamma l') + (Q_{i-1}^\alpha Q_{j-1}^\gamma Q_k^\beta l') - (Q_{i-1} Q_1^{l'} Q_k^\beta Q_j^\gamma).$$

Digitized by Google

Das letzte Glied enthält hier nach (17) und (11) wegen $i > 1$ den Faktor $(a'b'c'd')^2$, somit haben wir:

$$I = \text{Red.} - (Q_{i-1}^{\alpha} Q_{k+1}^{\beta} Q_j^{\gamma} l') - (Q_{i-1}^{\alpha} Q_k^{\beta} Q_{j+1}^{\gamma} l'). \tag{25}$$

Ist hier $k+1$ oder $j+1$ größer als drei, so tritt Reduktion ein [vgl. (17)]. Ist $i = 3$, so wenden wir auf die beiden letzten Glieder in (25) genau dieselbe Reduktion (25) an. Wir kommen also auf jeden Fall zu einer Gleichung:

$$I = \text{Red.} - (Q_1^{\alpha} Q_r^{\beta} Q_s^{\gamma} l') - (Q_1^{\alpha} Q_{\sigma}^{\beta} Q_{\varrho}^{\gamma} l') \tag{26}$$
$$(r, s, \sigma, \varrho = 1, 2, 3).$$

Hiemit sind wir auf den ersten Fall $i = 1$ zurückgelangt, es ist also auch hier I auf

$$(Q_1^{l'} Q_r^{\beta} Q_s^{\gamma} l')$$

reduzierbar, der obige Satz also bewiesen.

Wenn nun β oder γ oder beide von l' verschieden sind, so können wir den obigen Satz auf $(Q_r^{\beta} Q_1^{l'} Q_s^{\gamma} l')$ oder auf $(Q_s^{\gamma} Q_1^{\varkappa} Q_r^{\beta} l')$ anwenden und erhalten schließlich Reduktion auf den Ausdruck

$$(Q_i^{l'} Q_k^{l'} Q_j^{l'} l').$$

Derselbe verschwindet nur dann nicht identisch, wenn $i = 1$, $k = 2$ und $j = 3$ ist. Wir haben somit das Resultat: Enthält eine Drehungsinvariante einen Faktor $(a'b'c'l')$, so ist sie auf die übrigen Faktoren $f_\lambda (\lambda \neq 22)$ und auf die Invariante

$$(Q_1^{l'} Q_2^{l'} Q_3^{l'} l') \equiv (a'b'c'l')(a'l')(b'd')(d'l')(c'e')(e'f')(f'l') \tag{27}$$
$$[1 \text{ Invariante}]$$

reduzierbar.

§ 4.

Nun wenden wir uns den Faktorentypen f_{23} und f_{24} zu und betrachten f_{25} sowie die Linearfaktoren als bekannt. Dann haben wir:

$$I = (Q_i^{\alpha} Q_k^{\beta} y l') \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (\alpha, \beta = l', x, u), \tag{28}$$
$$(y = x, u').$$

Die Invarianten, die sich aus (28) ergeben, lassen sich sofort hinschreiben. Wir haben nur noch ihre gegenseitige Abhängigkeit zu untersuchen, d. h. diejenigen auszuscheiden, die sich durch identische Umformung aus den übrigen ergeben.

Hiezu bemerken wir, das in den Fällen $i \geqq 2$, $k \geqq 2$ solche identische Umformungen zu keinen neuen Drehungsinvarianten

Digitized by Google

führen und das $(Q_i^\alpha Q_i^\alpha y l')$ identisch verschwindet. Wir haben hier die drei Fälle:

$$I = (Q_2^\alpha Q_2^\beta y l'), \quad I = (Q_3^\alpha Q_3^\beta y l'), \quad I = (Q_2^\alpha Q_3^\beta y l').$$

Aus diesen ergeben sich dann wegen

$$(Q_i^\alpha Q_k^\beta y l') = -(Q_k^\beta Q_i^\alpha y l')$$

die folgenden, linear unabhängigen Drehungsinvarianten:

$$(Q_2^\alpha Q_2^\beta x l') = (a' b' x l')(a' c)(c' \alpha)(b' d')(d' \beta) \quad (\alpha, \beta = l', x, u'), \ (\alpha \neq \beta) \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (29\,a)$$

$$(Q_2^\alpha Q_2^\beta u' l') = (a' b' u' l')(a' c')(c' \alpha)(b' d')(d' \beta) \quad (\alpha, \beta = l' x, u'), \ (\alpha \neq \beta) \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (29\,b)$$

$$(Q_3^\alpha Q_3^\beta x l') = (a' b' x l')(a' c')(c' d')(d' \alpha)(b' e')(e' f')(f' \beta) \quad (\alpha, \beta = l', x, u'), \ (\alpha \neq \beta) \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (30\,a)$$

$$(Q_3^\alpha Q_3^\beta u' l') = (a' b' u' l')(a' c')(c' d')(d' \alpha)(b' e')(e' f')(f' \beta) \quad (\alpha, \beta = l', x, u'), \ (\alpha \neq \beta) \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (31\,a)$$

$$(Q_2^\alpha Q_3^\beta x l') = (a' b' x l')(a' c')(c' \alpha)(b' d')(d' e')(e' \beta) \quad (\alpha, \beta = l', x, u') \quad [6 \text{ Invarianten}] \quad (32a)$$

$$(Q_2^\alpha Q_3^\beta u' l') = (a' b' u' l')(a' c')(c' \alpha')(b' d')(d' e')(e' \beta) \quad (\alpha, \beta = l', x, u') \quad [6 \text{ Invarianten}] \quad (32b)$$

Wir haben hierauf jene Invarianten I zu betrachten bei denen auch Q_1^α vorkommt. Hier ist dann wieder keine Reduktion durch identisches Umformen möglich, wenn $\alpha = l'$ ist. Dies gibt die Invarianten:

$$(Q_1^{l'} Q_2^\beta x l') = (a' b' x l')(a' l')(b' c')(c' \beta) \quad (\beta = l', x, u') \quad (3 \text{ Invarianten}) \quad (33\,a)$$

$$(Q_1^{l'} Q_1^\beta u' l') = (a' b' u' l')(a' l')(b' c')(c' \beta) \quad (\beta = l', x, u') \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (33\,b)$$

$$(Q_1^{l'} Q_3^\beta x l') = (a' b' x l')(a' l')(b' c')(c' d')(d' \beta) \quad (\beta = l', x, u') \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (33\,c)$$

$$(Q_1^{l'} Q_3^\beta u' l') = (a' b' u' l')(a' l')(b' c')(c' d')(d' \beta) \quad (\beta = l', x, u') \quad [3 \text{ Invarianten}] \quad (33\,d)$$

Digitized by Google

Hier haben wir dann noch die Fälle zu untersuchen, in denen in (28) $i = 1$ und $k \geqq 2$ ist, dafür aber α von l' verschieden vorausgesetzt wird.

Hier sieht man sogleich, daß bei den zwei Typen $(Q_1^x Q_i^\beta x\, l')$ und $(Q_1^{u'} Q_i^\beta u'\, l')$ keine Reduktion mehr möglich ist. Es bleiben also:

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^x Q_2^\beta x\, l') = (a'\, b'\, x\, l')\,(a'\, x)\,(b'\, c')\,(c'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (34\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^x Q_3^\beta x\, l') = (a'\, b'\, x\, l')\,(a'\, x)\,(b'\, c')\,(c'\, d')\,(d'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (34\,b)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^{u'} Q_2^\beta u'\, l') = (a'\, b'\, u'\, l')\,(a'\, u')\,(b'\, c')\,(c'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (35\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^{u'} Q_3^\beta u'\, l') = (a'\, b'\, u'\, l')\,(a'\, u')\,(b'\, c')\,(c'\, d')\,(d'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (35\,b)$$

Schließlich haben wir im Falle $i = 1$, $k \geqq 2$ noch die beiden Typen:

$$(Q_1^x Q_i^\beta u'\, l') \text{ und } (Q_1^{u'} Q_i^\beta x\, l') \qquad (36)$$

zu untersuchen. Durch identische Umformung von $(Q_1^{u'} Q_i^\beta x\, l') = (a'\, Q_i^\beta x\, l')\,(u'\, a')$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}(a'\, Q_i^\beta x\, l')\,(u'\, a') \equiv{}& (u'\, Q_i^\beta x\, l')\,(a'\, a') - (u'\, a'\, x\, l')\,(Q_i^\beta a') + \\ &+ (u'\, a'\, Q_i^\beta l')\,(x\, a') - (u'\, a'\, Q_i^\beta x)\,(a'\, l') \\ \equiv{}& \text{Red.} - (u'\, Q_{i+1}^\beta x\, l') + (u'\, Q_1^x Q_i^\beta l') - (u'\, Q_1^{l'} Q_i^\beta x).\end{aligned}$$

Hier ist $(u'\, Q_{i+1}^\beta x\, l')$ eine Drehungsinvariante mit einem Faktor f_{25}; $(u'\, Q_1^x Q_i^\beta l')$ ist die andere, bei (25) aufgezählte Invariante; schließlich führt $(u'\, Q_1^{l'} Q_i^\beta x)$ nach (7) auf f_{25} und die bei (33) aufgezählten Invarianten zurück. Es sind also die beiden Typen (36) aufeinander reduzierbar, sodaß wir nur einen von ihnen, z. B. $(Q_1^x Q_i^\beta u'\, l')$ aufzuzählen brauchen. Dies gibt die folgenden Drehungsinvarianten:

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^x Q_2^\beta u'\, l') = (a'\, b'\, u'\, l')\,(a'\, x')\,(b'\, c')\,(c'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (37\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^x Q_3^\beta u'\, l') = (a'\, b'\, u'\, l')\,(a'\, x)\,(b'\, c')\,(c'\, d')\,(d'\, \beta) \\ \qquad (\beta = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (37\,b)$$

Digitized by Google

Schließlich haben wir noch die Invarianten I vom Typus (28) zu untersuchen, für die $i = k = 1$ ist. Dies gibt die sechs Ausdrücke:

$$(Q_1^x Q_1^{l'} x\, l'), \quad (Q_1^{l'} Q_1^{u'} x\, l'), \quad (Q_1^{u'} Q_1^x x\, l')$$
$$(Q_1^x Q_1^{l'} u'\, l'), \quad (Q_1^{l'} Q_1^{u'} u'\, l'), \quad (Q_1^{u'} Q_1^x u'\, l').$$

Nun weist man so wie oben leicht durch identisches Umformen nach, daß man von diesen sechs Drehungsinvarianten nur die zwei folgenden beizubehalten hat:

$$(Q_1^x Q_1^{l'} x\, l') = (a'\, b'\, x\, l')(a'\, x')(b'\, l') \quad [1 \text{ Invariante}] \qquad (38\,a)$$

$$(Q_1^{u'} Q_1^{l'} u'\, l') = (a'\, b'\, u'\, l)(a'\, u')(b'\, l') \quad [1 \text{ Invariante}]. \qquad (38\,b)$$

Hiemit haben wir auch die Faktorentypen f_{23} und f_{24} vollständig erledigt.

Wir kommen schließlich zum letzten Typus f_{25} von Faktoren zweiter Art. Hier erhalten wir nach (17):

$$I = (Q_i^\alpha\, l'\, x\, u'); \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\alpha = l', x, u'). \qquad (39)$$

Hier führen die möglichen identischen Umformungen auf Faktoren f_{23} und f_{24} zurück, bei deren Untersuchung wir aber Invarianten mit dem Faktor f_{25} als bekannt vorausgesetzt haben. Daher tritt hier keine weitere Reduktion ein und wir erhalten die folgenden Drehungsinvarianten:

$$\left.\begin{array}{l}(Q_1^\alpha l'\, x\, u') = (a'\, l'\, x\, u')(a'\, \alpha) \\ (\alpha = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (40\,a)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_2^\alpha l'\, x\, u') = (a'\, l'\, x\, u')(a'\, b')(b'\, \alpha) \\ (\alpha = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (40\,b)$$

$$\left.\begin{array}{l}(Q_3^\alpha l'\, x\, u') = (a'\, l'\, x\, u')(a'\, b')(b'\, c)(c'\, \alpha) \\ (\alpha = l', x, u')\end{array}\right\} \text{[3 Invarianten]} \qquad (40\,c)$$

Hiemit sind die Invarianten mit Faktoren zweiter Art überhaupt erledigt.

§ 5.

Wir gehen nun zur Untersuchung derjenigen Drehungsinvarianten I über, die sich aus Linearfaktoren — und nur aus solchen — aufbauen lassen.

Wir betrachten vorerst jene Fälle in welchen keine Komplexsymbole in I vorkommen. Da sind dann wieder zuerst diejenigen Invarianten des vollständigen Formensystems zu nennen, die keine Koeffizienten a_{ik}' der Grundform f enthalten. Nach (9) ist dies der Fall bei f_8, f_9, f_{12}, f_{13} und f_{16}.

Digitized by Google

Wir haben also die Invarianten:

$$(l'x), (l'u'), (xx), (u'x), (u'u') \quad [5 \text{ Invarianten}]. \tag{41}$$

Nun gehen wir zu jenen Invarianten über, die auch noch durch einen einzigen Linearfaktor dargestellt werden, aber die a'_{ik} im ersten Grade enthalten. Hier haben wir nur eine einzige Drehungsinvariante:

$$A_1 = (a'a') \quad [1 \text{ Invariante}]. \tag{42}$$

Hieran schließen sich die Invarianten vom Typus $(ya')(a'z)$ für $y = b', l', x, u'$. Dies gibt:

$$\left.\begin{array}{c} A_2 = (a'b')^2 \\ (a'l')^2,\ (a'x)^2,\ (a'u')^2 \qquad [7 \text{ Invarianten}] \\ (l'a')(a'x),\ (xa')(a'u'),\ (u'a')(a'l) \end{array}\right\}. \tag{43}$$

Dann kommen die Invarianten vom Typus $(ya')(a'b')(b'z)$:

$$\left.\begin{array}{l} A_3 = (a'b')(b'c')(c'a') \\ (ya')(a'b')(b'y) \\ (ya')(a'b')(b'z) \end{array}\right\} (y, z = l', x, u') \quad [7 \text{ Invarianten}] \Big\}. \tag{44}$$

Schließlich haben wir die Invarianten vom Typus

$$(ya')(a'b')(b'c')(c'z):$$

$$\left.\begin{array}{l} A_4 = (a'b')(b'c')(c'd')(d'a') \\ (ya')(a'b')(b'c')(c'y) \\ (ya')(a'b')(b'c')(c'z) \end{array}\right\} (y, z = l', x, u') \quad [7 \text{ Invarianten}] \Big\}. \tag{45}$$

Nach den Uberlegungen des § 4 brauchen wir bei diesen kettenartigen $(ya')(a'b')(b'c')\ldots$ nur bis zum dritten Grade in den a'_{ik} zu gehen, da darüberhinaus Reduktion eintritt. [Vgl. Gleichung (17)]. Wir haben daher schon alle Drehungsinvarianten aufgezählt, die nur aus Linearfaktoren zusammengesetzt sind und keine Komplexsymbole enthalten.

Nun wenden wir uns auch jenen Drehungsinvarianten I zu, die Komplexsymbole enthalten. Hier machen wir wieder vom Prinzipe der „Kettenbildung" Gebrauch. Dies soll folgendes heißen:

Wenn I einen Faktor (ya') enthält, wo $y = l'$, x oder u' ist, so setzen wir diesen Faktor an die erste Stelle:

$$I = (ya')\ldots.$$

Digitized by Google

An diesen Faktor schließen wir denjenigen Linearfaktor, z. B. $(a'b')$, der das zweite Symbol a' enthält:

$$I = (y\,a')\,(a'\,b')\ldots.$$

Nun kommt der Faktor mit dem zweiten Symbol b':

$$I = (y\,a')\,(a'\,b')\,(b'\,z)\ldots.$$

Ist $z = l'$, x oder u', so gelangen wir zu einer bereits aufgezählten Invariante; ist $z = c'$, so haben wir

$$I = (y\,a')\,(a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,t)\ldots$$

und bezüglich t gelten dieselben Uberlegungen wie bezüglich z. In der kettenartigen Bildung

$$(y\,a')\,(a'\,b')\,(b'\,c')\,(c'\,d')\,(d'\,e')\ldots$$

brauchen wir hiebei wegen (17) immer nur bis zur Symbolreihe c' zu gehen, da sonst Reduktion eintritt.

Ist aber $z = p$ oder p', so haben wir z. B.

$$I = (y\,a')\,(a'\,b')\,(b'\,p)\ldots$$

und jetzt wird die weitere Fortsetzung durch die zweite Symbolreihe p vermittelt, d. h. wir schließen an $(b'p)$ denjenigen Linearfaktor $(p\,v')$ an, der die andere p-Reihe enthäht:

$$I = (y\,a')\,(a'\,b)\,(b'\,p)\,(p\,v')\ldots.$$

Bezüglich v' gelten dann wieder dieselben Überlegungen wie bezüglich z. Wir erhalten so eine „Kette“:

$$I = \underbrace{(y\,a')\ldots(b'\,p)}_{g}\ \underbrace{(p\,c')\ldots(d'\,q)}_{G}\ \underbrace{(q\,e')\ldots(f'\,p')}_{G}\ \underbrace{(p'\,g')}_{G}\ldots\underbrace{(h'\,z)}_{g} \quad (46)$$

in welcher wir g, G als „Kettenglieder“ bezeichnen. g soll dabei ein Kettenglied andeuten, das mit $y = l'$, x oder u' „anfängt“ und mit einem Komplexsymbol p oder p' „endigt“. G soll sein Kettenglied bezeichnen, daß am „Anfang“ und am „Ende“ ein Komplexsymbol enthält.

Kommt in I kein Faktor $(y\,a')$ $(y = l', x, u')$ vor, so beginnen wir I mit einem beliebigen Faktor $(p\,a')$, der eine Reihe p (oder p') enthält. Wir gelangen in diesem Falle zu einer Kette der Gestalt:

$$I = \underbrace{(p\,a')\ldots(b'\,q)}_{G}\ \underbrace{(q\,c')\ldots(d'\,\pi)}_{G}\ \underbrace{(\pi'\,e)}_{G}\ldots\ \ldots\underbrace{(h'\,p)}_{G} \quad (47)$$

Digitized by Google

Dies ist also eine Kette in der nur Kettenglieder G vorhanden sind. Das erste Kettenglied G beginnt mit p, das letzte Kettenglied G endigt mit p.

Die Kettenglieder g, die hier überhaupt in Betracht kommen, sind dann die folgenden, wobei y immer eine der Reihen l', x oder u' bedeutet:

$$\left.\begin{array}{l} g_0 \ldots (yp) \\ g_0' \ldots (yp') \end{array}\right\} \tag{48a}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \ldots (ya')(a'p) \\ g_1' \ldots (ya')(a'p') \end{array}\right\} \tag{48b}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2 \ldots (ya')(a'b')(b'p) \\ g_2' \ldots (ya')(a'b')(b'p') \end{array}\right\} \tag{48c}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3 \ldots (ya')(a'b')(b'c')(c'p) \\ g_3' \ldots (ya')(a'b')(b'c')(c'p') \end{array}\right\}. \tag{48d}$$

Analog haben wie die folgenden Kettenglieder G:

$G_0 \ldots (pq)$, $G_0' \ldots (pq')$, $G_0'' \ldots (p'q')$. (49 a

$G_1 \ldots (pa')(a'q)$, $G_1' \ldots (pa')(a'q')$, $G_1'' \ldots (p'a')(a'q')$. (49 b

$G_2 \ldots (pa')(a'b')(b'q)$, $G_2' \ldots (pa')(a'b')(b'q')$, $G_2'' \ldots (p'a')(a'b')(b'q')$. (49 c

$G_3 \ldots (pa')(a'b')(b'c')(c'q')$, $G_3' \ldots (pa')(a'b')(b'c')(c'q')$, $G_3'' \ldots (p'a')(a'b')(b'c')(c'q')$. (49 d

Aus diesen Kettengliedern g und G setzen sich jetzt die Ketten zusammen. Bevor wir jedoch mit dem Aufbau dieser Drehungsinvarianten beginnen, schicken wir einige allgemeine Sätze über identische Umformungen voraus, die weiterhin zur Reduktion verwendet werden.

§ 6.

Vor allem bemerken wir, daß der symbolische Faktor (pq') ein Reduzent ist. Sei nämlich

$$I = (pq')(pv')(q'y)\ldots$$

so haben wir [1]):

$$I = \frac{1}{4}(pq')^2.(v'y)\ldots$$

d. h. es enthält I den wirklichen Faktor $(pq')^2$, der als Invariante weiter unten zur Aufzählung gelangt.

[1]) Vgl. Komplex-Symbolik, p. 8, Formel (27).

Digitized by Google

Wir können also in (49 *a*) G_0' weglassen. Dasselbe gilt aber auch von G_0 oder G_0'', wenn wir die Drehungsinvariante

$$(pq)^2 = (p'q')^2 = 2\Sigma p_{ik}^2 \tag{50}$$

dem Formensysteme einverleiben. Ist nämlich

$$I = (p'q')(p'x)(q'y)\ldots,$$

so folgt aus der Identität [1]):

$$(pq')(pu')(q'x) \equiv -(p'q)(p'x)(qu') + \frac{1}{2}(pq')^2(u'x),$$

in der p_{ik} und q_{ik} voneinander unabhängige Größenreihen sind:

$$I \equiv -(pq)(py)(qx) + \frac{1}{2}(p'q')^2(u'x) \tag{51}$$

d. h. der Faktorentypus $(p'q')$ wird auf (pq) und $(p'q')^2$ reduzierbar und umgekehrt. Wir behalten im folgenden (pq) und nicht $(p'q')$ bei, d. h. von den Kettengliedern G_0 verwenden wir weiterhin nur $G_0 = (pq)$.

Aus dem bisherigen können wir dann schließen, daß eine Kette, die zwei aufeinanderfolgende Kettenglieder G_0 enthält, was wir durch

$$I = [-G_0 - G_0 -]$$

andeuten wollen, stets reduzierbar ist. Haben wir nämlich

$$I = [-G_0 - G_0 -] = \ldots(yp)(pq)(qr)(rz)\ldots, \tag{52}$$

wobei p, q und r äquivalente Symbolreihen sind, so ergibt die Identität (51) auf $(pq)(py)(qr)$ angewendet:

$$I \equiv \text{Red.} - \ldots(yq')(q'p')(p'r)(rz)\ldots \tag{53}$$

und hier tritt der Reduzent $(p'r)$ auf, also ist $I = \text{Red.}$

In einer Drehungsinvariante von der durch (46) und (47) gegebenen Art hängen je zwei aneinanderstoßende Kettenglieder g und G, bezw. G und G durch Komplexsymbole p oder p' zusammen. Wir wollen, um uns kurz ausdrücken zu können, einen solchen Zusammenhang eine „p-Bindung“ (p'-Bindung) nennen. Beispielsweise haben wir bei

$$(ya')(a'b')(b'p)(pc')(c'q')(q'z)$$

ein p-Bindung zwischen $(b'p)$ und (pc') und eine q'-Bindung zwischen $(c'q')$ und $(q'z)$.

[1]) Vgl. Komplex-Symbolik, p. 8, Formel (26).

Digitized by Google

Nun betrachten wir das Produkt

$$L = (pa)(pb)(qc)(qd) \tag{54}$$

und suchen alle jene identischen Umformungen von L, die wieder auf Ausdrücke führen, die sich durch Linearfaktoren darstellen lassen oder die reduzierbar sind. a, b, c und d mögen dabei irgend welche Größen- oder Symbolreihen bedeuten. Dann sollen p_{ik} und q_{ik} vorläufig voneinander unabhängige Größenreihen darstellen.

Die hier möglichen Umformungen ergeben sich als Spezialfälle der Identität (8), die wir einmal auf das Produkt

$$4L = (p'^2 ab)(q'^2 cd), \tag{55}$$

das andere Mal auf das Produkt

$$2M = (abcd)(p^2 q^2) \tag{56}$$

anwenden.

Im ersten Falle erhalten wir nach (8):

$$4L = (p'^2 ab)(q'^2 cd) = \begin{vmatrix} (p'q') & (p'q') & (p'c) & (p'd) \\ (p'q') & (p'q') & (p'c) & (p'd) \\ (aq') & (aq') & (ac) & (ad) \\ (bq') & (bq') & (bc) & (bd) \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir diese vierreihige Determinante, so erhalten wir [1]):

$$\begin{aligned} L = (pa)(pb)(qc)(qd) = \frac{1}{2}(p'q')^2[(ca)(bd) - (ad)(bc)] - \\ - (p'q')(p'c)[(aq')(bd) - (bq')(ad)] + (p'q')(p'd)[(aq')(bc) - \\ - (bq')(ac)] + (q'a)(q'b)(p'c)(p'd). \end{aligned} \tag{57}$$

Wenn hier p mit q vertauschbar ist, so können wir diese Identität auch so schreiben:

$$L = (pa)(pb)(qc)(qd) = \text{Red.} + (p'q') \ldots + (p'a)(p'b)(q'c)(q'd)$$

oder, da $(p'q')$ auf (pq) reduzierbar ist:

$$(pa)(pb)(qc)(qd) = \text{Red.} + (pq) \ldots + (p'a)(p'b)(q'c)(q'd). \tag{58}$$

Diese Umformung sagt aus, daß wir in einer Kette

$$\ldots (a'p)(pb') \ldots (c'q)(qd') \ldots .$$

[1]) Bezüglich solcher „orientierter Determinanten" vgl. meine Arbeit: Über eine Erweiterung des Determinantenbegriffes, Archiv der Mathem. u. Physik, (1913).

Digitized by Google

die p-Bindung und die q-Bindung zu einer p'-Bindung und einer q'-Bindung umwandeln können, wobei sich dann noch wegen (pq) ein Kettenglied G_0 ergibt. Hievon machen wir später Anwendung.

Gehen wir von

$$L' = (pa)(pb)(q'c)(q'd)$$

aus, so haben wir in (57) nur q statt q' zu setzen.

Hier kommen wir aber nach (57) auf denselben Ausdruck L' zurück, wenn p und q vertauschbar sind. Bei

$$L' = (pa)(pb)(q'c)(q'd) = (qa)(qb)(p'c)(p'd)$$

liefert also die Umformung (57) nichts Neues.

Nun wenden wir uns der Anwendung von (8) auf (56) zu. Wir haben:

$$2M = (abcd)(p^2q^2) = \begin{vmatrix} (pa) & (pb) & (pc) & (pd) \\ (pa) & (pb) & (pc) & (pd) \\ (qa) & (qb) & (qc) & (qd) \\ (qa) & (qb) & (qc) & (qd) \end{vmatrix}$$

und die Entwicklung dieser Determinante ergibt:

$$M \equiv \frac{1}{2}(abcd)(p^2q^2) \equiv (pa)(pb)(qc)(qd) + \\ + (pa)(pc)(qd)(qb) + (pa)(pd)(qb)(qc) + (pb)(pc)(qa)(qd) + \\ + (pc)(pd)(qa)(qb) + (pd)(pb)(qa)(qc). \tag{59}$$

Ist hier p mit q vertauschbar, so haben wir:

$$\frac{1}{4}(abcd)(p^2q^2) \equiv (pa)(pb)(qc)(qd) + \\ + (pa)(pc)(qd)(qb) + (pa)(pd)(qb)(qc).$$

Woraus die Umformung folgt:

$$(pa)(pb)(qc)(qd) \equiv \frac{1}{4}(abcd)(p^2q^2) + \\ + (pa)(pc)(qb)(qd) - (pa)(pd)(qb)(qc). \tag{60}$$

Da $(p^2q^2) = 2(p'q)^2$ bereits eine Invariante ist, so können wir diese, später oft verwendete Gleichung auch so schreiben:

$$(pa)(pb)(qc)(qd) = \text{Red.} + (pa)(pc)(qb)(qd) - (pa)(pd)(qb)(qc). \tag{61}$$

Digitized by Google

Dual hiezu erhalten wir auf demselben Wege:

$$(p'a)(p'b)(q'c)(q'd) = \text{Red.} + (p'a)(p'c)(q'b)(q'd) - (p'a)(p'd)(q'b)(q'c). \quad (62)$$

Wenn wir von dem Ausdrucke

$$L' = (pa)(pb)(q'c)(q'd)$$

ausgehen und also das Produkt

$$2M' = (abcd)(p^2 q'^2)$$

nach (8) bilden, so erhalten wir analog (59) die Identität:

$$\begin{aligned}(pa)(pb)(q'c)(q'd) = \text{Red.} &- (pa)(pc)(q'd)(q'b) - \\ &- (pa)(pd)(q'b)(q'c) - (pb)(pc)(q'a)(q'd) - \\ &- (pc)(pd)(q'a)(q'b) - (pd)(pb)(q'a)(q'c).\end{aligned} \quad (63)$$

§ 7.

Wir wenden uns nun jenen Drehungsinvarianten I zu, die durch Faktoren erster Art darstellbar sind und Komplexsymbole enthalten. Hiezu haben wir nach § 5 aus den Kettengliedern g und G auf alle möglichen Arten Ketten zu bilden.

Wir haben vorerst die beiden Alternativen:

A. I enthält Kettenglieder g.

B. I enthält keine Kettenglieder g.

Zuerst behandeln wir den Fall *A*. Enthält eine irreduzible Drehungsinvariante I ein Kettenglied g, so enthält sie noch ein zweites und hat daher die Gestalt [vgl. Formel (46)]:

$$I = [g - G - G - \ldots - G - g]. \quad (64)$$

Die Anzahl m der Kettenglieder G kann hier 0, 1, 2, ... sein. Wir unterscheiden demgemäß die folgenden Fälle:

1. $m = 0$, also $I = [g - g]$, d. h. zwei Kettenglieder g sind direkt miteinander verbunden.

2. $m = 1$, also $I = [g - G - g]$, d. h. zwischen zwei Kettenglieder g ist ein Glied G eingeschoben.

3. $m \geqq 2$, also $I = [g - G - \ldots - G - g]$.

Im ersten Falle haben wir nach (48 *a*)—(48 *d*) die Drehungsinvarianten vom Typus

$$[g_i - g_k] \text{ und } [g'_i - g'_k]$$

Digitized by Google

zu bilden. $(i, k = 0, 1, 2, 3)$. Dies ergibt:

Typus $[g_0 - g_0]$:

$$(yp)(pz);\ (y \neq z),\ (y, z = l', x, u')\ [3\ \text{Invarianten}]. \qquad (65\,a)$$

Typus $[g_0' - g_0']$:

$$(yp')(p'z);\ (y \neq z),\ (y, z = l', x, u')\ [3\ \text{Invarianten}]. \qquad (65\,b)$$

Analog für $[g_i - g_i]$, $(i = 1, 2, 3)$, die wir summarisch aufzählen:

Typus $[g_i - g_i]$ und Typus $[g_i' - g_i']$, $(i = 1, 2, 3)$:

$$\left.\begin{matrix}(y\,a')\ldots(b'p)\ (pc')\ldots(d'z) \\ (y\,a')\ldots(b'p')\,(p'c')\ldots(d'z)\end{matrix};\ (y \neq z),\ (y, z = l', x, u')\ [18\ \text{Invarianten}]\right\}. \qquad (65\,c)$$

Dann haben wir die Typen $[g_i - g_k]$ und $[g_i' - g_k']$, bei denen $i \neq k$ (also z. B. $i < k$) ist und, wo jetzt auch $y = z$ sein kann:

$$\left.\begin{matrix}\text{Typus } [g_i - g_k] \text{ und Typus } [g_i' - g_k'] \\ (i < k),\ (y, z = l', x, u')\ [72\ \text{Invarianten}]\end{matrix}\right\}. \qquad (65\,d)$$

Hiemit ist der erste Fall erledigt.
Im zweiten Falle haben wir

$$I = [g - G - g].$$

Hier unterscheiden wir zwei Unterfälle:

$\alpha)$ $G = G_0 = (pq)$.

$\beta)$ $G \neq G_0$.

Zu α): Hier haben die Invarianten die Gestalt

$$(y\,a')\ldots(b'p)(pq)(qc')\ldots(d'z) \quad (y, z = l', x, u')$$

und es kann in allen Fällen auch $y = z$ sein, da hier

$$[g_i - G_0 - g_i] \equiv\equiv 0 \text{ wenn } y = z \text{ ist.}$$

Wir haben hier somit:

$$\left.\begin{matrix}\text{Typus } [g_i - G_0 - g_k] \\ (i, k = 0, 1, 2, 3),\ (y, z = l', x, u')\end{matrix}\ [60\ \text{Invarianten}]\right\}. \qquad (66)$$

Digitized by Google

Zu β): Hier ergeben sich die vier folgenden Typen:

$$\left.\begin{array}{ll} g_i - G_k - g_j & (i \leq j) \\ g_i - G'_k - g'_j & (i \gtreqless j) \\ g'_i - G'_k - g_j & (i \gtreqless j) \\ g'_i - G''_k - g'_j & (i \leq j) \end{array}\right\} (i,j = 0, 1, 2\,3), \ (k = 1, 2, 3). \quad (67)$$

Beim vierten Typus $[g'_i - G''_k - g'_j]$ haben wir eine p'- und eine q'-Bindung:

$$I = (y\,a')\ldots(b'\,p')(p'\,c')\ldots(d'\,q')(q'\,e')\ldots(f'\,z).$$

Hier zeigt dann die Umformung (58), daß wir I reduzieren können auf

$$I = \text{Red.} + (p\,q)\ldots + [g_i - G_k - g_j].$$

also auf Invarianten vom Typus (66) und auf den ersten Typus von (67). Wir können uns somit weiterhin auf diesen beschränken. Da dann die durch (62) gegebene Umformung wieder auf denselben Ausdruck $[g_i - G_k - g_j]$ zurückführt, so haben wir für das Formensystem:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Typus } [g_i - G_k - g_j] \\ (i,j = 0, 1, 2, 3), \ (i \leq j), \ (k = 1, 2, 3), \ (y, z = l', x, u') \end{array}\right\} [180 \text{ Invarianten}]. \quad (68)$$

Den dritten Typus $[g'_i - G'_k - g'_j]$ können wir mit dem zweiten Typus $[g_i - G'_k - g'_j]$ gleichzeitig erledigen, wir brauchen ihn nämlich nur verkehrt zu schreiben:

$$[g'_i - G'_k - g_j] \equiv [g_j - G'_k - g_i].$$

Nur müssen wir dann bei $[g_i - G'_k - g'_j]$ auch $i > j$ zulassen, um alle möglichen Fälle zu umspannen. Bei festem y, z und k sind dies wegen $i, j = 0, 1, 2, 3$ zehn Fälle.

I hat hier die Gestalt:

$$I = (y\,a')\ldots(b'\,p)(p\,c')\ldots(d'\,q')(q'\,e')\ldots(f'\,z).$$

Hier führt die Identität (63) zu keiner neuen Invariante, wir haben also für das Formensystem:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Typus } [g_i - G'_k - g'_j] \\ (i,j = 0, 1, 2, 3), \ (k = 1, 2, 3), \ (y, z = l', x, u') \end{array}\right\} [180 \text{ Invarianten}]. \quad (69)$$

Hiemit haben wir auch den zweiten Fall vollständig erledigt.

Digitized by Google

§ 8.

Im dritten Falle ist $m \geqq 2$, also

$$I = [g - G - G - \ldots - G - g].$$

Hier betrachten wir zwei aufeinanderfolgende Kettenglieder G, also das durch

$$[- G_i - G_k -]$$

dargestellte Aggregat. Nach § 6 können wir den Fall $i = k = 0$ ausschließen, da $[- G_0 - G_0 -]$ reduzierbar ist. Da es ferner auf die Reihenfolge i, k oder k, i nicht ankommt, bleiben noch zwei mögliche Fälle, die wir getrennt behandeln:

α) $i \neq 0$, $k \neq 0$, also $I = [- G_i - G_k -]$, $(i, k = 1, 2, 3)$.

β) $i \neq 0$, $k = 0$, also $I = [- G_i - G_0 -]$, $(i = 1, 2, 3)$.

Zu α): Wenn wir die Bindung zwischen G_i und G_k mit B bezeichnen, so sind bei $I = [- G_i - G_k -]$ die folgenden vier schematisch dargestellten Fälle möglich:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & [- p p - B - q q -] \\ 2. & [- p p - B - q' q' -] \\ 3. & [- p' p' - B - q q -] \\ 4. & [- p' p' - B - q' q' -] \end{array}\right\}. \qquad (70)$$

Im vierten Falle wenden wir die Identität (58) an und erhalten, da wegen des Faktors $(p q)$ das Kettenglied G_0 auftritt:

$$[- p' p' - B - q' q' -] = \text{Red.} + [- G_i - G_0 -] + [- p p - B - q q -]. \qquad (71)$$

Wir haben hier rechter Hand den ersten Fall von (70) und den Typus $[- G_i - G_0 -]$, der zum Falle β) gehört und später behandelt wird.

Im dritten Falle bei (70) kann $B = \pi \pi$ sein. Dann wenden wir auf $[- \pi \pi - q q -]$ die Identität (58) an und erhalten

$$[- p' p' - B - q q -] = \text{Red.} + [- G_i - G_0 -] + [- p' p' - \pi' \pi' - q' q' -],$$

also wegen (71):

$$[- p' p' - B - q q -] = \text{Red.} + [- G_i - G_0 -] + [- p p - B - q q -]. \qquad (72)$$

Ist aber in (70, 3.) $B = \pi' \pi'$, so haben wir

$$I = [- p' p' - \pi' \pi' - q q -]$$

Digitized by Google

und hier wenden wir (58) auf $[-p'p' - \pi'\pi' -]$ an und erhalten wieder:

$$[-p'p' - B - qq -] = \text{Red.} + [-G_i - G_0 -] + [-pp - B - qq -].$$

Dasselbe gilt dann vom zweiten Ausdrucke in (70), d. h. wir können uns auf den einzigen Fall

$$I = [-pp - B - qq -] \tag{73}$$

beschränken. Es sei z. B.:

$$I = \ldots(a'p)(pb')\ldots(c'\pi)(\pi d')\ldots(e'q)(qf')\ldots$$

Dann formen wir $(a'p)(pb')(e'q)(qf')$ nach (61) um und erhalten:

$$I = \text{Red.} + (pa')(pe')(qb')(qf') - (pa')(pf')(qb')(qe').$$

$$\begin{aligned} I = \text{Red.} + [\ldots(a'p)(pe')\ldots(\pi c')(\pi d')\ldots(b'q)(qf')\ldots] - \\ - [\ldots(a'p)(pf')\ldots][(qb')\ldots(c'\pi)(\pi d')\ldots(e'q)]. \end{aligned} \tag{74}$$

Das letzte Glied der rechten Seite zerfällt schon in zwei Invarianten, von denen die zweite vom Typus $[G - G]$ ist und weiter unten behandelt wird. Das mittlere Glied der rechten Seite kann durch Vertauschung äquivalenter Symbole auf die Gestalt

$$-[\ldots(a'p)(pd')\ldots(e'\pi)(\pi c')\ldots(b'q)(qf')\ldots] = -[-G_k - G_i -]$$

gebracht werden. Somit haben wir an Stelle von (74):

$$I = [-G_i - G_k -] = \text{Red.} - [-G_k - G_i -] \tag{75}$$

und diese Gleichung gilt für alle vier von den Typen (70).

Das „Red." in Formel (75) bezieht sich auch auf den Fall β), d. h. es ist I auf Invarianten vom Typus $[-G_i - G_0 -]$ durch (75) reduzierbar. [Vgl. (72)]. Wir wenden uns nun diesen Invarianten zu.

Zu β). Hier ist $I = [-G_i - G_0 -]$ $(i = 1, 2, 3)$.

Wir haben demgemäß die beiden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &1. \quad -pp - \pi(\pi q)q - \\ &2. \quad -p'p' - \pi(\pi q)q - \end{aligned} \Big| . \tag{76}$$

Im ersten Falle können wir setzen:

$$I = [\ldots(a'p)(pb')\ldots(\alpha'\pi)(\pi q)(qd')\ldots].$$

Digitized by Google

Hier wenden wir auf das Produkt $(a'p)(pb')(q\pi)(qd')$ die Identität (60) an und erhalten wie oben bei (75):

$$[-pp-\pi(\pi q)q-]=\text{Red.}-[-p(pq)q-\pi\pi-]$$

oder

$$[-G_i-G_0-]=\text{Red.}-[-G_0-G_i]. \tag{77}$$

Im zweiten Falle bei (76) haben wir nach (51):

$$[-p'p'-\pi(\pi q)q-]=\text{Red.}-[-p'p'-\pi'(\pi' q')q'-]$$

und hier machen wir dasselbe wie im ersten Falle, indem wir (62) anwenden, wodurch wir schließlich ebenfalls auf die Identität (77) kommen.

Wir können dann noch (77) und (75) in eine einzige Identität

$$[-G_i-G_k\ ]\equiv\text{Red.}-[-G_k-G_i-] \tag{78}$$

zusammenfassen, die dann für alle $i, k = 0, 1, 2, 3$ Gültigkeit besitzt.

§ 9.

Aus (78) schließen wir jetzt, daß wir in einer Kette

$$I=[g-G-G-\cdots-G-g]$$

irgend zwei nebeneinanderstehende und daher überhaupt irgend zwei Kettenglieder G miteinander vertauschen können. Es entstehen hiedurch Drehungsinvarianten einfacherer Form, die wir in (78) durch das Zeichen „Red." zusammengefaßt haben und gleichzeitig wird bei jeder Vertauschung das Vorzeichen geändert.

Ist ferner in (78) $i=k$, so wird

$$[-G_i-G_i-]=\text{Red.}-[-G_i-G_i-],$$

d. h. $[-G_i-G_i-]$ ist reduzierbar. Wir können somit voraussetzen, daß in einer Kette keine zwei nebeneinanderstehenden und daher überhaupt keine zwei Kettenglieder G mit demselben Index vorkommen. Daher können wir uns auf diejenigen Ketten beschränken, die von den Kettengliedern G_0, G_1, G_2 und G_3 je einen Typus enthalten.

Somit haben wir nebst den schon aufgezählten Drehungsinvarianten noch die folgenden Typen zu untersuchen:

$$\left.\begin{array}{ll}\tau_1)\ [g_r-G_i-G_k-g_s] & (i\neq k)\\ \tau_2)\ [g_r-G_i-G_k-G_j-g_s] & (i,j,k \text{ voneinander verschieden})\\ \tau_3)\ [g_r-G_0-G_1-G_2-G_3-g_s] & \end{array}\right\}. \tag{79}$$

Hiebei ist $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ und $r, s = 0, 1, 2, 3$ zu setzen.

Digitized by Google

Wir behandeln zuerst den Typus τ_1. Hier haben wir die beiden Unterfälle:

$$\tau_1') \ [g_r - G_i - G_k - g_s] \quad (i < k) \quad (i \neq 0, \ k \neq 0)$$
$$\tau_1'') \ [g_r - G_0 - G_i - g_s] \quad (i = 1, 2, 3).$$

Bei τ_1') können wir I nach dem vorigen Paragraphen stets durch Reduktionen auf die Gestalt bringen:

$$I = (y\,a') \ldots (b'\,p)\,(p\,c') \ldots B \ldots (d'\,q)\,(q\,e') \ldots - (f''\,z),$$

wobei sich zwei Fälle ergeben, je nachdem $B = \pi\,\pi$ oder $= \pi'\,\pi'$, also B eine π-Bindung oder eine π'-Bindung ist. Da ferner $i < k$ ist, so sind die drei Anordnungen 12, 13 und 23 möglich. Endlich können r und s die Ziffern 0, 1, 2 und 3 sein und y und z mit l', x oder u' identisch sein.

Da wir nun, wenn wir $[g_r - G_i - G_k - g_s]$ verkehrt hinschreiben, die Identität erhalten:

$$[g_r - G_i - G_k - g_s] \equiv -[g_s - G_k - G_i - g_r] \qquad (80)$$

und demzufolge nach (78) haben:

$$[g_r - G_i - G_k - g_s] \equiv \text{Red.} + [g_s - G_i - G_k - g_r], \qquad (81)$$

so erhalten wir hier im ganzen $2.3.\left(12 + \frac{12.11}{2}\right) = 468$ Invarianten. Wir haben somit:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Typus } [g_r - G_i - G_k - g_s] = [\ldots p\,p \ldots B \ldots q\,q \ldots] \\ (B = \pi\,\pi, \ \pi'\,\pi'), \ (r, s = 0, 1, 2, 3), \ (r \leq s), \ (i < k), \ (i, k = 1, 2, 3) \\ (y, z = l', x, u'). \qquad [468 \text{ Invarianten}]\end{array}\right\} (\ 2$$

Bei τ_1'') haben wir nach § 8, (76) die beiden Typen $[-pp - -\pi(\pi q)\,q -]$ und $[-p'\,p' - \pi(\pi q)\,q -]$; die in $[g_r - G_i - G_0 - g_s]$ zusammengefaßt sind. Wegen $i = 1, 2, 3$ haben wir die drei Anordnungen 01, 02 und 03. Dann schließen wir wie oben, daß sich hier $2.3.\left(12 + \frac{12.11}{2}\right) = 468$ voneinander unabhängige Invarianten ergeben:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Typus } [g_r - G_0 - G_i - g_s] = \left\{\begin{array}{l}[\ldots p\,p \ldots \pi(\pi q)\,q \ldots] \\ [\ldots p'\,p' \ldots \pi(\pi q)\,q \ldots]\end{array}\right. \\ (i = 1, 2, 3), \ (r \leq s), \ (r, s = 0, 1, 2, 3), \ (y, z = l', x, u') \\ [468 \text{ Invarianten}]\end{array}\right\} . \quad (83)$$

Digitized by Google

Wir kommen zum Typus τ_2 von (79). Hier haben wir wieder zwei Unterfälle:

$$\tau_2'): [g_r - G_0 - G_i - G_k - g_s],\ (i<k)$$

$$\tau_2''): [g_r - G_1 - G_2 - G_3 - g_s].$$

Bei τ_2') haben wir für ik die drei Anordnungen 12, 13 und 23. Ferner lassen sich die Bindungen immer auf die drei folgenden Typen zurückführen:

$$\left.\begin{array}{l} -p(pq)q - \pi\pi - \rho\rho - \\ -p(pq)q - \pi\pi - \rho'\rho' - \\ -p(pq)q - \pi'\pi' - \rho\rho - \end{array}\right\}. \tag{84}$$

Weiter können g_r und g_s die Endungen $y, z = l', x, u'$ haben und r, s die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Wir haben, wenn wir

$$I = [g_r - G_0 - G_i - G_k - g_s]$$

verkehrt aufschreiben:

$$I = +[g_s - G_k - G_i - G_0 - g_r], \tag{85}$$

und dies formen wir nach (78) so lange identisch um, bis wir wieder die Anordnung $G_0 - G_i - G_k$ haben. Hiedurch entsteht aus (85):

$$I = [g_r - G_0 - G_i - G_k - g_s] = \text{Red.} - [g_s - G_0 - G_i - G_k - g_r]. \tag{86}$$

Daraus schließen wir, daß I reduzierbar ist für $r = s$, $(y = z)$ und daß wir in den anderen Fällen $r < s$ voraussetzen können. Wegen $(r \leqq s)$, $(r, s = 0, 1, 2, 3)$ gibt dies $\frac{12.11}{2} = 66$ Typen. Wir erhalten somit im ganzen $3.3.66 = 594$ Invarianten. Also kommt zum Formensystem hinzu:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Typus } [g_r - G_0 - G_i - G_k - g_s] \\ = \left\{\begin{array}{l} -p(pq)q - \pi\pi - \rho\rho - \\ -p(pq)q - \pi\pi - \rho'\rho' - \quad [594 \text{ Invarianten}] \\ -p(pq)q - \pi'\pi' - \rho\rho - \end{array}\right. \\ (r \leqq s),\ (r, s = 0, 1, 2, 3),\ (i<k),\ (i, k = 1; 2, 3),\ (y, z = l', x, u') \\ (y \neq z, \text{ wenn } r = s \text{ ist}) \end{array}\right\} \tag{87}$$

Digitized by Google

Bei τ_2'') haben wir analoge Überlegungen. Durch Reduktionen mit Hilfe von (58) können wir alle möglichen Bindungsanordnungen auf die folgenden zurückführen:

$$\left.\begin{array}{l} -pp-qq-\pi\pi-\rho\rho- \\ -pp-qq-\pi\pi-\rho'\rho'- \\ -pp-qq-\pi'\pi'-\rho\rho- \\ -p'p'-qq-\pi'\pi'-\rho\rho- \\ -pp-q'q'-\pi\pi-\rho'\rho'- \end{array}\right\}. \tag{88}$$

Dann gilt auch für den Typus τ_2'' die Formel (86), sodaß wir also hier $5.66 = 330$ Drehungsinvarianten erhalten:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Typus } [g_r - G_1 - G_2 - G_3 - g_s] \\ \text{[Bindungen nach (88)]}, (r \leq s), (r, s = 0, 1, 2, 3) \text{ [330 Invarianten]} \\ (y, z = l', x, u') \\ (y \neq z, \text{ wenn } r = s \text{ ist}) \end{array}\right\}. \tag{89}$$

Schließlich kommen wir zum letzten Typus τ_3 von (79):

$$I = [g_r - G_0 - G_1 - G_2 - G_3 - g_s].$$

Hier haben wir die folgenden vier Bindungsanordnungen, auf die alle übrigen reduzierbar sind:

$$\left.\begin{array}{l} -p(pq)q-\pi\pi-\rho\rho-\sigma\sigma- \\ -p(pq)q-\pi\pi-\rho\rho-\sigma'\sigma'- \\ -p(pq)q-\pi'\pi'-\rho\rho-\sigma'\sigma'- \\ -p(pq)q-\pi\pi-\rho'\rho'-\sigma\sigma- \end{array}\right\}. \tag{90}$$

I gibt, verkehrt angeschrieben:

$$[g_r - G_0 - G_1 - G_2 - G_3 - g_s] = -[g_s - G_3 - G_2 - G_1 - G_0 - g_r]$$

und hieraus folgern wir mittels (78) die Identität:

$$[g_r - G_0 - G_1 - G_2 - G_3 - g_s] = \\ = \text{Red.} - [g_s - G_0 - G_1 - G_2 - G_3 - g_r]. \tag{91}$$

Wir sehen also, daß I für $s = r$, $y = z$ reduzierbar ist und daß wir in den übrigen Fällen $r < s$ voraussetzen dürfen. Somit ergeben sich hier $4 \cdot \frac{12.11}{2} = 264$ Invarianten:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{c}\text{Typus } [g_r - G_0 - G_1 - G_2 - G_3 - g_s] \\ \text{[Bindungen nach (90)]}, \ (r \leq s), (r, s = 0, 1, 2, 3) \text{ [264 Invarianten]} \\ (y \neq z, \text{ wenn } r = s \text{ ist}), \ (y, z = l', x, u')\end{array}\right\} \quad (92)$$

Hiemit haben wir alle Ketten erledigt, die Kettenglieder g enthalten.

§ 10.

Wir kommen nun zum Falle B des § 7, also zur Betrachtung von Ketten, die sich nur aus Kettengliedern G aufbauen. [Vgl. (49 a) bis (49 d)].

Vorerst bemerken wir, daß ein einziges Kettenglied G keine Invariante sein kann.

Bei zwei Kettengliedern haben wir den Typus $[G_i - G_k]$. Im Falle $i = k = 0$ ergeben sich die beiden Invarianten

$$[G_0 - G_0] = (pq)^2 \text{ und } [G_0' - G_0'] = (pq')^2 \text{ [2 Invarianten]}, \quad (93)$$

auf die wir schon in § 6 hingewiesen haben.

$[G_0'' - G_0']$ ist auf diese beiden Drehungsinvarianten reduzierbar.

Ist nur einer der Indices i, $k = 0$, z. B. $i = 0$, $k \neq 0$, so haben wir den Typus $[G_0 - G_i]$ oder

$$[(pq)q - p].$$

Dies gibt für das Formensystem:

$$\text{Typus } [G_0 - G_i], \ (i = 1, 2, 3) \quad \text{[3 Invarianten]}. \quad (94)$$

Schließlich haben wir diejenigen Fälle, in denen sowohl i als auch k von Null verschieden sind.

Hier gibt es die zwei Unterfälle:

α) $i = k$, also $I = [G_i - G_i]$, $(i = 1, 2, 3)$

β) $i \neq k$, also $I = [G_i - G_k]$, $(i < k)$, $(i, k = 1, 2, 3)$.

Im Falle α) haben wir betreffs der Bindungen die folgenden Möglichkeiten:

$$\left.\begin{array}{ll}1. & [p - qq - p] \\ 2. & [p - q'q' - p] \\ 3. & [p' - qq - p'] \\ 4. & [p' - q'q' - p']\end{array}\right\}. \quad (95)$$

Digitized by Google

Der dritte Fall von (95) führt sofort auf den zweiten, wenn wir I mit q beginnen; es ist nämlich:

$$[p' - q\,q - p'] \equiv [q - p'\,p' - q] \equiv [p - q'\,q' - p].$$

Im vierten Falle gibt die Identität (58) die Reduktion auf Invarianten vom Typus (94) und auf den ersten Fall (95). Es bleiben somit nur die Typen $[p - q\,q - p]$ und $[p - q'\,q' - p]$ zu behandeln. Wir erhalten so wegen $i = 1, 2, 3$:

$$\text{Typus } [G_i - G_i],\ (i = 1, 2, 3) \quad [3 \text{ Invarianten}] \qquad (96\,a)$$

$$\text{Typus } [G_i' - G_i'],\ (i = 1, 2, 3) \quad [3 \text{ Invarianten}]. \qquad (96\,b)$$

Im Falle β) haben wir ebenfalls die vier Möglichkeiten (95) betreffs der Bindungen. Die vierte dieser Möglichkeiten wird so wie bei α) auf die erste reduzierbar mit Hilfe von (58).

Da dann weiterhin

$$[G_i - G_k] = [G_k - G_i]$$

ist, so gibt der erste Fall von (95) die Invarianten:

$$\text{Typus } [G_i - G_k],\ (i < k),\ (i, k = 1, 2, 3)\ [3 \text{ Invarianten}]. \qquad (97\,a)$$

Ebenso wie bei α) wird auch der dritte Typus (95) auf den zweiten zurückgeführt, wobei aber jetzt auch $i > k$ in $[G_i' - G_k']$ sein kann. Wir erhalten demgemäß für das Formensystem:

$$\text{Typus } [G_i' - G_k'],\ (i, k = 1, 2, 3),\ (i \neq k)\ [6 \text{ Invarianten}]. \qquad (97\,b)$$

Hiemit sind die Typen $[G - G]$ erledigt.

Wir wenden uns nun jenen Ketten zu, die aus mindestens drei Kettengliedern G bestehen.

Hier kann man so wie im § 9 nachweisen, daß in

$$I = [G_i - G_k - G_j - \ldots - G_r - G_s]$$

sämtliche Indizes $i, k, j, \ldots, r, s$ voneinander verschieden sein müssen, wenn nicht Reduktion möglich sein soll. Da nun diese Indizes nur die Ziffern 0, 1, 2 oder 3 bedeuten können, so besteht die längste dieser zu untersuchenden Ketten I aus vier Kettengliedern G.

Digitized by Google

Wir haben somit noch die beiden folgenden Möglichkeiten zu untersuchen:

α) $I = [G_i - G_k - G_j]$, $(i, k, j,$ voneinander verschieden),

β) $I = [G_0 - G_1 - G_2 - G_3]$.

Im Falle α) können wir $i < k < j$ voraussetzen, da die Umstellung der Linearfaktoren die Gleichungen ergibt:

$$[G_i - G_k - G_j] = -[G_k - G_i - G_j] = \text{etc.}$$

Dann unterscheiden wir die zwei Fälle:

α′) $i = 0$, $(k, j = 1, 2, 3)$, $(k \neq j)$, d. h. $I = [G_0 - G_k - G_j]$;

α″) $i \neq 0$, d. h. $I = [G_1 - G_2 - G_3]$.

Im Falle α″) haben wir die beiden Bindungsanordnungen:

$$[(pq)q - \pi\pi - p] \text{ und } [(pq)q - \pi'\pi' - p].$$

Wir erhalten somit:

Typus $[G_0 - G_k - G_j]$, $(k<j)$, $(k, j = 1, 2, 3)$ [3 Invarianten]. (98 *a*)

Typus $[G_0 - G_k' - G_j']$, $(k<j)$, $(k, j = 1, 2, 3)$ [3 Invarianten]. (98 *b*)

Im Falle α″) ist

$$I = [G_1 - G_2 - G_3].$$

Von den hier möglichen Bindungsanordnungen bleiben nach Reduktionen mit (58) nur die beiden bestehen:

$$[p - qq - \pi\pi - p] \text{ und } [p - qq - \pi'\pi' - p].$$

Wir haben also:

Typus $[G_1 - G_2 - G_3]$ [1 Invariante]. (99 *a*)

Typus $[G_1 - G_2' - G_3']$ [1 Invariante]. (99 *b*)

Wir kommen schließlich zum Falle β).

Hier ist:

$$I = [G_0 - G_1 - G_2 - G_3].$$

Digitized by Google

Hier haben wir als bleibende, d. h. nicht weiter reduzierbare Bindungsanordnungen:

$$(p\,q)\,q - \pi\,\pi - \rho\,\rho - p$$
$$(p\,q)\,q - \pi'\,\pi' - \rho\,\rho - p$$
$$(p\,q)\,q - \pi\,\pi - \rho'\,\rho' - p.$$

Hieraus ergeben sich die Invarianten:

Typus $[G_0 - G_1 - G_2 - G_3]$ [1 Invariante]. (100 *a*)

Typus $[G_0 - G_1' - G_2' - G_3]$ [1 Invariante]. (100 *b*)

Typus $[G_0 - G_1 - G_2' - G_3']$ [1 Invariante]. (100 *c*)

Digitized by Google

Die Drehungsinvarianten eines linearen Komplexes im R_3.

Von **Roland Weitzenböck** in Graz.

In dieser Arbeit wird ein kleinstes vollständiges Formensystem von Drehungsinvarianten eines linearen, dreidimensionalen Strahlenkomplexes aufgestellt. Es besteht aus 83 Invarianten. Bezüglich einiger Begriffsbildungen, sowie der allgemeinen Grundsätze für die Herleitung solcher vollständiger Systeme, sei auf zwei frühere Arbeiten verwiesen. [1])

Am Schlusse geben wir einige Beispiele für das Auftreten der Invarianten dieses vollständigen Formensystems bei metrischen Untersuchungen eines linearen Strahlenkomplexes.

§ 1.

Die Gleichung des zu Grunde gelegten linearen Komplexes K sei

$$K = (a' \Pi)^2 = (a \Pi')^2 = 2 \sum a'_{ik} \Pi_{ik} = 0. \qquad (1)$$

Die sechs Größen Π_{ik} sind hiebei veränderlich gedachte Linienkoordinaten.

Dieser einzigen Grundform K fügen wir jetzt die drei Linearformen

$$(x U') = \sum_1^4 x_i U'_i, \; (u' X) = \sum_1^4 u'_i X_i \text{ und } P = (p \Pi')^2 = (p' \Pi)^2 = 2 \sum p'_{ik} \Pi_{ik} \qquad (2)$$

hinzu. Von den vier so erhaltenen Formen suchen wir ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von Drehungsinvarianten. Dieses ist dann ein kleinstes vollständiges Formensystem von Drehungsinvarianten der Grundform K.

Sind $a, b, c, \ldots$ äquivalente Komplexsymbole von K, $p, q, r, \ldots$ äquivalente Komplexsymbole der Linearform P, bedeutet ferner l' die Größenreihe $0:0:0:1$, so haben wir für die Drehungsinvarianten I die folgenden Symbol- und Größenreihen:

$$a, b, c \ldots; \; a', b', c', \ldots; \; l', x, u'; \; p, q, r \ldots; \; p', q', r' \ldots \qquad (3)$$

Bei Komplexsymbolen können wir Klammerfaktoren immer durch identische Umformung durch Linearfaktoren ausdrücken, wir haben uns also nur solcher bei der Bildung von Drehungsinvarianten zu bedienen. Aus (3) ergeben sich dann die folgenden Faktoren:

[1]) Vgl. die beiden Arbeiten: Über Drehungsinvarianten, Wiener Denkschriften, Bd. 89, (1913). Die Drehungsinvarianten einer Fläche 2. Ordnung, diese Monatshefte (1913).

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r} f_1=(a\,b),\ f_2=(a\,b'),\ f_3=(a\,l'),\ f_4=(a\,x),\ f_5=(a\,u'),\ f_6=(a\,p),\ f_7=(a\,p') \\ f_8=(a'\,b'),\ f_9=(a'\,l'),\ f_{10}=(a'\,x),\ f_{11}=(a'\,u'),\ f_{12}=(a'\,p),\ f_{13}=(a'\,p') \\ [f_{14}=(l'\,l')=1],\ f_{15}=(l'\,x),\ f_{16}=(l'\,u'),\ f_{17}=(l'\,p),\ f_{18}=(l'\,p') \\ f_{19}=(x\,x),\ f_{20}=(x\,u'),\ f_{21}=(x\,p),\ f_{22}=(x\,p') \\ f_{23}=(u'\,u'),\ f_{24}=(u'\,p),\ f_{25}=(u'\,p') \\ f_{26}=(p\,q),\ f_{27}=(p\,q') \\ f_{28}=(p'\,q') \end{array}\right\}\cdot \quad (4)$$

Was nun den Aufbau der Drehungsinvarianten aus diesen Faktoren anbelangt, so gehen wir hierauf nicht ausführlich ein, sondern beschränken uns auf einige diesbezügliche Bemerkungen.

1. f_{15}, f_{16}, f_{19}, f_{20} und f_{23} sind schon wirkliche Drehungsinvarianten.

2. Die Faktoren $(a\,b')$ und $(p\,q')$ sind Reduzenten. Enthält eine Drehungsinvariante I den Faktor $(a\,b')$, so enthält sie den wirklichen Faktor $(a\,b')^2$. Analog für $(p\,q')$.

3. Wir bauen die Drehungsinvarianten I aus den Faktoren (4) auf durch Kettenbildung nach dem Schema

$$(a\,b)\,(b\,c)\,(c\,d)\,(d\,e)\ldots$$

Hier ergeben sich dann zwei Fälle: 1. die Kette ist geschlossen, wie z. B. $I=(a\,b)\,(b\,p)\,(p\,q)\,(q\,a)$; 2. die Kette ist an beiden Seiten offen, wie z. B. $I=(y\,a)\,(a\,b)\,(b\,p)\,(p\,z)$, wo y und z eine der Reihen l', x oder u' bedeuten.

4. Durch identisches Umformen läßt sich dann beweisen, daß die längste Kette, die nicht reduzierbar ist, gegeben wird durch

$$I=(y\,a)\,(a\,b)\,(b\,p)\,(p\,q)\,(q\,z).$$

Wir erhalten dann die im folgenden Paragraph zusammengestellten Invarianten des vollständigen Formensystems.

§ 2.

5 Invarianten ohne Komplexsymbole:

$$(l'\,x),\ (l'\,u'),\ (x\,x),\ (x\,u'),\ (u'\,u'). \qquad (5)$$

6 Invarianten vom Typus $(\alpha\,\beta)^2$, (geschlossene, zweigliedrige Ketten):

$$A=(a\,b')^2,\ B=(a\,b)^2,\ (a\,p)^2,\ (a\,p')^2,\ (p\,q)^2,\ (p\,q')^2. \qquad (6)$$

12 Invarianten vom Typus $(y\,\alpha)\,(\alpha\,z)$, (offene zweigliedrige Ketten):

$$(y\,\alpha)\,(\alpha\,z),\ \begin{cases} y,\ z=l',\ x,\ u' & y\neq z \\ \alpha=a,\ a',\ p,\ p'. \end{cases} \qquad (7)$$

Hiebei bemerken wir, daß $(y\,\alpha)\,(\alpha\,z)=-(z\,\alpha)\,(\alpha\,y)$ ist.

6 Invarianten vom Typus

$$(y\,a)\,(a\,b)\,(b\,z),\ (y,z=l',x,u'). \qquad (8)$$

Digitized by Google

Es ist hier $(y\,a)\,(a\,b)\,(b\,z) = (z\,a)\,(a\,b)\,(b\,y)$.

Analog 6 Invarianten vom Typus

$$(yp)\,(pq)\,(qz),\ (y,z = l', x, u'). \tag{9}$$

9 Invarianten vom Typus

$$(y\,a)\,(ap)\,(pz),\ (y,z = l', x, u'). \tag{10}$$

9 Invarianten vom Typus

$$(y\,a)\,(ap')\,(p'z),\ (y,z = l', x, u'). \tag{11}$$

Je 6 Invarianten der vier folgenden Typen:

$$\left.\begin{array}{l}(y\,a)\ (a\,b)\ (b\,p)\ (p\,z)\\ (y\,a)\ (a\,b)\ (b\,p')\,(p'\,z)\\ (y\,a)\ (a\,p)\ (p\,q)\,(q\,z)\\ (y\,a')\,(a'\,p)\,(p\,q)\,(q\,z)\end{array}\right| \quad y,z = \left\{\begin{array}{lll} l', l' & x, x & u', u'\\ x, u' & u', l' & l', x\end{array}\right\}. \tag{12}$$

Schließlich 6 Invarianten vom Typus

$$(y\,a)\,(a\,b)\,(b\,p)\,(p\,q)\,(q\,z),\ y,z = \text{wie bei (12)}. \tag{13}$$

Wir schließen an diese Aufzählung einige Bemerkungen.

1. Unter den Drehungsinvarianten sind auch die Invarianten bezüglich der allgemeinen projektiven Gruppe enthalten. Ein kleinstes vollständiges Formensystem derselben wird gegeben durch:

$$(x\,u'),\ (a\,b')^2 = A,\ (a\,p')^2,\ (p\,q')^2,\ (u'\,a)\,(a\,p')\,(p'\,x). \tag{14}$$

2. Die Invarianten eines kleinsten vollständigen Invariantensystems von Drehungsinvarianten des Komplexes K sind gegeben durch:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a\,b')^2 = 2\sum a_{ik}\,b'_{ik} = 4\,(a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23})\\ B = (a\,b)^2 = 2\sum a_{ik}\,b_{ik} = 2\,(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2 + a_{23}^2)\\ C = (a\,b)\,(a\,l')\,(b\,l') = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 \end{array}\right| \tag{15}$$

Statt A, B, C kann man auch A, B, C' als kleinstes System nehmen, wobei

$$C' = (a'\,b')\,(a'\,l')\,(b'\,l') = a_{14}'^2 + a_{24}'^2 + a_{34}'^2 = a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{31}^2 \tag{16}$$

ist. Wir haben nämlich $2\,C + 2\,C' = B$.

3. Wie wir ohne Beweis mitteilen wollen, bilden A und

$$C'' = a_{12}'^2 + a_{13}'^2 + a_{23}'^2 = a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2$$

ein kleinstes vollständiges Invariantensystem von euklidischen Bewegungs- und Umlegungsinvarianten des Komplexes K.

Digitized by Google

§ 3.

Wir geben jetzt einige geometrische Anwendungen der obigen Invarianten.

Es sei v' eine Ebene, ihr entspricht im Nullsystem, welches der Komplex K bestimmt der in ihr liegende Punkt („Nullpunkt") y:

$$(y\,u') = (a\,u')\,(a\,v') = 0. \tag{17}$$

Nehmen wir jetzt statt v' die uneigentliche Ebene

$$(l'\,x) = x_4 = 0,$$

so erhalten wir als deren Nullpunkt ξ:

$$(u'\,\xi) = (a\,u')\,(a\,l') = 0. \tag{18}$$

ξ ist der uneigentliche Punkt der „Hauptachse" des Komplexes; ξ existiert dann und nur dann nicht, wenn $(a\,u')\,(a\,l') \equiv 0\ \{u'\}$ ist, also für

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0.$$

Bei reellen Komplexen ist dieser Fall durch $C = 0$ gegeben. K ist dann speziell (singulär) und besteht aus allen Geraden, die einer festen Ebene parallel sind.

Wir nehmen weiterhin die Existenz von ξ an. Die Polarebene von ξ bezüglich $(x\,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ hat die Gleichung

$$(x\,a)\,(a\,l') = 0 \tag{19}$$

$(x\,x) = 0$ schneidet auf $(l'\,x) = 0$ den absoluten Kegelschnitt („Kugelkreis") Ω aus. Daher gibt der Schnitt der Ebene (19) mit $(l'\,x) = 0$ die Polare von ξ bezüglich Ω, die „Nebenachse" des Komplexes K: [1]

$$(\pi\,\alpha')^2 = (\pi\,a)\,(\pi\,l')\,(a\,l') = 0. \tag{20}$$

Es sei jetzt p eine Gerade mit den Koordinaten p_{ik}. Die Gleichung ihrer konjugierten im Nullsystem von K ist dann:

$$(\pi\,a')\,(\pi\,b')\,(p\,a')\,(p\,b') = 0. \tag{21}$$

Nehmen wir insbesondere statt p die Nebenachse α, so erhalten wir als Gleichung der „Hauptachse" des Komplexes K:

$$(\pi\,a')\,(\pi\,b')\,(a'\,b'\,c\,l')\,(c\,l') = 0.$$

Durch eine einfache Umformung wird hieraus:

$$2\,C\,(\pi\,a')^2 - A\,(a\,\pi)\,(a\,l')\,(\pi\,l') = 0. \tag{22}$$

Der „Parameter" des Komplexes K ist gegeben durch

$$i = \frac{A}{4\,C} = \frac{a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23}}{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2}. \tag{23}$$

[1]) Vgl. hiezu E. Study, Geometrie der Dynamen, p. 153, Leipzig 1903.

Digitized by Google

Über die Entwicklungskoeffizienten der elliptischen Funktionen, insbesondere im Falle singulärer Moduln.

Von **E. Dintzl** in Wien.

Die Bernoullischen Zahlen sind im wesentlichen die Entwicklungskoeffizienten der Kreisfunktion:

$$\cot u = \frac{1}{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

wo

$$\sum_{m=\pm 1, \pm 2, \ldots} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2n!} \cdot B_n$$

gesetzt wird. Von den Eigenschaften dieser Zahlen ist eine der schönsten diejenige, welche in dem von Staudt-Clausenschen Satze zum Ausdruck kommt.[1]) Diesem Satze gemäß besitzt die n^{te} Bernoullische Zahl B_n folgende Partialbruchzerlegung:

$$B_n = g_n + \frac{1}{2} + \sum \frac{(-1)^n}{p},$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft, für welche $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist und g_n eine ganze Zahl bedeutet. Insbesondere ist darin der Satz enthalten, daß die im Nenner von B_n aufgehenden ungeraden Primzahlen p in demselben höchstens in der ersten Potenz enthalten sein können und von der Beschaffenheit sein müssen, daß $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist.

Das Analogon der Bernoullischen Zahlen im Gebiete der elliptischen Funktionen sind die Entwicklungskoeffizienten der Weierstraßschen p-Funktion, welche durch die unendliche Reihe:

$$\frac{1}{u^2} + \sum_{w} \left\{ \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\}$$

$w = m_1 . 2\omega_1 + m_2 . 2\omega_2$
$m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$; $m_1 = m_2 = 0$ ausgeschlossen

[1]) Siehe L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin, Verlag J. Springer, 1893.

Digitized by Google

definiert ist. Entwickelt man diese Reihe in eine Potenzreihe von u und setzt:

$$\sum_{m_1, m_2} \frac{1}{(m_1 + m_2\,\omega)^{2n}} = \frac{(4\,\omega_1)^{2n}}{2\,n!}\,E_n'(\omega) \quad \left(\omega = \frac{2\,\omega_2}{2\,\omega_1}\right),$$

so erhält man:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}\,E_n'(\omega)}{2\,n!} \cdot \frac{u^{2n-2}}{(2\,n-2)!}\,.$$

Führt man die Jakobische Funktion sn am $(u; k^2) = sn\,(u; k^2)$ ein, so kommt die Funktion:

$$\frac{1}{sn^2(u; k^2)} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}\,E_n'(k^2)}{2\,n} \cdot \frac{u^{2n-2}}{(2\,n-2)!}$$

in Betracht[1]) und es sind:

$$E_1' = \frac{1+k^2}{3}\,, \quad E_n'(k^2) = E_n'(\omega) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Diese Entwicklungskoeffizienten $E_n'(k^2)$ sind ganze rationalzahlige Funktionen des Moduls k. Ist im besonderen das Periodenverhältnis $\omega = \frac{2\,\omega_2}{2\,\omega_1}$ Wurzel einer quadratischen Gleichung:

$$A\,\omega^2 + \frac{2\,B}{\sigma}\,\omega + C = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten (σ ist 1 oder 2, je nachdem der

[1]) Die Funktionen $p(u)$ und sn am (u, k^2) hängen bekanntlich miteinander durch die Relation zusammen:

$$p(u) = \frac{4\,K^2}{4\,\omega_1^2}\left(\frac{1}{sn^2(v; k^2)} - \frac{1+k^2}{3}\right),$$

wo

$$v = \frac{2\,K}{2\,\omega_1}\,u, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}}\,,$$

ferner k den Modul der elliptischen Funktion $sn\,(u; k^2)$ und endlich $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2$ die Perioden von $p(u)$ bedeuten. Setzt man $K = \omega_1$, so erhält man:

$$p(u) = \frac{1}{sn^2\,(u; k^2)} - \frac{1+k^2}{3}\,.$$

Digitized by Google

Koeffizient von ω gerade oder ungerade ist) und negativer Determinante

$$D = B^2 - \sigma^2 A C$$

u. zw. diejenige Wurzel, welche einen positiven imaginären Bestandteil besitzt, so werden die zu der Determinante D gehörigen Moduln k zu singulären Moduln und die Entwicklungskoeffizienten $E_n'(k^2)$ werden Zahlen des Körpers $K(k^2)$.

Hurwitz[1]) hat in einer grundlegenden Arbeit über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen gezeigt, daß im Falle der Determinante $D = -1$ diese Zahlen rationale Zahlen sind, welche im Körper $K(\sqrt{-1})$ eine ähnliche Rolle spielen, wie die Bernoullischen Zahlen im Körper der rationalen Zahlen und daß für diese Zahlen ein Satz existiert, welcher dem v. Staudt-Clausenschen Satze analog ist. Nach denselben Methoden wurden von Matter[2]) und mir[3]) zwei weitere besondere Fälle behandelt, nämlich die den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen in den Körpern $K\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ und $K(\sqrt{-2})$.

Da auch diese Untersuchungen zu ganz analogen Resultaten führten, so lag der Gedanke nahe, dieselben auf den Fall eines beliebigen imaginären quadratischen Körpers auszudehnen, d. h. die Entwicklungskoeffizienten $E_n(k^2)$ im Falle irgend eines singulären Moduls zu studieren. Mit diesem Problem beschäftigen sich die Untersuchungen dieser Arbeit. Die Resultate derselben sind kurz die folgenden.

Im Falle eines beliebigen Moduls k sind die Entwicklungskoeffizienten $E_n'(k^2)$ ganze rationalzahlige Funktionen von k^2. Die im Nenner von $E_n'(k^2)$ aufgehenden ungeraden Primzahlen p können in demselben höchstens in der ersten Potenz enthalten sein und müssen von der Beschaffenheit sein, daß $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist (§ 3).

Im Beweise dieses Satzes kommen nebst elementaren Sätzen aus der Zahlentheorie das Additionstheorem der elliptischen Funktionen sowie die folgenden Hurwitzschen Sätze[4]) über ganzzahlige Reihen zur Anwendung:

---

[1]) A. Hurwitz, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen. Mathematische Annalen, Band 51.

[2]) K. Matter, Die den Bernoullischen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln. Vierteljahrschrift der Naturforscher-Gesellschaft in Zürich. 45. Jahrg. 1900.

[3]) E. Dintzl, Über die Zahlen im Körper $K(\sqrt{-2})$, welche den Bernoullischen Zahlen analog sind. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1909, Bd. 118, IIa.

[4]) Siehe Hurwitz, l. c., § 1.

Digitized by Google

1. Eine Potenzreihe einer komplexen Variablen u, welche die Gestalt besitzt:

$$P(u) = c_0 + c_1 \cdot \frac{u}{1!} + c_2 \frac{u^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{u^n}{n!} + \cdots$$

heißt ganzzahlig in einem vorgegebenen endlichen Zahlkörper, wenn $c_0, c_1, c_2 \ldots$ ganze Zahlen dieses Körpers sind.

Im System aller ganzzahligen Potenzreihen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation, Differentiation und Integration von $u = 0$ ab unbeschränkt ausführbar.

2. Ist $P_1(u)$ eine Einheitsreihe, d. h. eine ganzzahlige Reihe, deren erster Koeffizient $c_0 = 1$ ist, so ist dieselbe Divisor jeder ganzzahligen Potenzreihe, insbesondere ist $\frac{1}{P_1(u)}$ ganzzahlig.

3. Ist $P(u)$ eine ganzzahlige Reihe, die mit u verschwindet, so ist für jede positive ganze Zahl m die Reihe $\frac{1}{m!} P^m(u)$ ganzzahlig, was man auch in der Form zu schreiben pflegt:

$$P^m(u) \equiv 0 \pmod{m!}.$$

4. Wenn die Reihe:

$$C_m \cdot \frac{u^m}{m!} + C_{m+1} \frac{u^{m+1}}{(m+1)!} \cdots$$

die m^{te} Potenz einer ganzzahligen Reihe ist, so enthält C_k jede Primzahl als Faktor, die zwischen $k - m + 1$ und $k + 1$ liegt.

5. Es sei $\varphi(u)$ eine analytische Funktion, welche an der Stelle $u = 0$ regulär ist und einer Differentialgleichung der Gestalt

$$\varphi^{(n)}(u) = G\left(\varphi(u), \varphi'(u), \ldots \varphi^{(n-1)}(u)\right)$$

genügt, wo G eine ganze rationale Funktion der eingeklammerten Argumente mit ganzzahligen Reihen als Koeffizienten ist. Sind dann $\varphi(0), \varphi'(0), \ldots \varphi^{(n-1)}(0)$ ganze Zahlen, so ist die Entwicklung von $\varphi(u)$ nach Potenzen von u eine ganzzahlige Reihe.

6. Durch Umkehrung der ganzzahligen Reihe

$$t = P(u) = u + c_1 \frac{u^2}{2!} + \cdots$$

erhält man wieder eine ganzzahlige Reihe

$$u = P_1(t) = t + d_1 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

Diese Sätze lassen sich auch auf den Fall übertragen, als die Koeffizienten der Potenzreihen ganzzahlig in k^2, d. h. ganze ganz-

Digitized by Google

zahlige Funktionen des Modulquadrates k^2 sind und kommen zunächst in dieser Form im ersten Teile dieser Arbeit zur Anwendung.[1])

Zur Zählerbestimmung in der Partialbruchzerlegung von $E_n'(k^2)$ dient der Zusammenhang, welcher zwischen den Entwicklungskoeffizienten von $\frac{1}{sn(u;k^2)}$ und $\frac{1}{sn^2(uk^2)}$ besteht. Darum müssen auch die Entwicklungskoeffizienten von

$$\frac{1}{sn(u,k^2)} = \frac{1}{u} + \sum_1^\infty \frac{2^{2n} E_n(k^2)}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

näher untersucht werden (§ 2).

Im zweiten Teile werden die Entwicklungskoeffizienten E_n und E_n' für den besonderen Fall, als der Modul ein zu einer bestimmten Determinante erster Art ($\sigma = 1$) eines imaginären quadratischen Körpers gehöriger singulärer Modul ist, näher untersucht.

Faßt man nämlich die Entwicklungskoeffizienten als Zahlen im Klassenkörper $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ auf und bringt sie in demselben auf die einfachste Gestalt, so besitzen die Nenner dieser Zahlen $E_n'(k^2)$ folgende Eigenschaften (§§ 4, 5, 6):

1. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal des quadratischen Körpers $\Omega(\sqrt{D})$, dessen Norm eine ungerade zu D teilerfremde rationale Primzahl ist, für welche $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ und $2n$ durch $p-1$ teilbar ist, so kann dieses Primideal im Nenner von $E_n(k^2)$ höchstens in der ersten Potenz aufgehen.

2. Die ungeraden Primzahlen q, für welche $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$ ist, fehlen in sämtlichen Nennern der Zahlen E_n.

3. Ist p^* eine in der Determinante D aufgehende ungerade rationale Primzahl, für welche p^*-1 ein Teiler von $2n$ ist, so ist der Nenner von E_n höchstens durch $\sqrt{p^*}$ teilbar.

---

[1]) Hiezu kämen noch Sätze „über die Periodizität der Entwicklungskoeffizienten einer analytischen Funktion nach dem Modul m" von M. Fujiwara (The Tôhoku Mathematical Journal; Vol 2, Nr. 2, 1912). Von diesen Sätzen wird im folgenden nicht unmittelbar Gebrauch gemacht, sondern es wird in jenen besonderen Fällen, in welchen dieselben zur Anwendung kommen können, d i. bei der Untersuchung der Entwicklungskoeffizienten der Funktion $sn(u;k^2)$ und deren geraden Potenzen, insbesondere von $snp-1(u;k^2)$ nach einem Primzahlmodul p (§ 1; 2 u. § 2; 4), das Additionstheorem der elliptischen Funktionen zu Hilfe genommen, weil mittels desselben die genaue Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten dieser Reihen nach einem Primzahlmodul am einfachsten vorgenommen werden kann.

Digitized by Google

Auf Grund dieser Eigenschaften läßt sich im Klassenkörper eine Partialbruchzerlegung der Zahlen E_n' vornehmen, in welcher die Zähler für die Primideale $\mathfrak{p}$ näher bestimmt werden (§ 7).

Der Nachweis dieser Eigenschaften gelingt mit Hilfe bekannter Sätze aus der Theorie der komplexen Multiplikation. Da diese Theorie bisher vornehmlich unter Zugrundelegung der Jakobischen Funktionen snu, cnu und dnu ausgebildet wurde,[1]) so bediene ich mich derselben, und zwar in der Form, in welcher sie von Mertens[2]) entwickelt wurde.

Erster Teil.

§ 1. Die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $sn\,(u, k^2)$.

1. Die elliptische Funktion $sn\,am\,(u; k^2)$ oder

$$x = sn\,(u, k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

genügt der Differentialgleichung:

$$x'^2 = (1 - k^2 x^2)(1 - x^2) = 1 - (1 + k^2) x^2 + k^2 x^4$$

und der aus dieser entspringenden Differentialgleichung:

$$x'' = -(1 + k^2) x + 2 k^2 x^3.$$

Daraus folgt mittels des fünften Hurwitzschen Satzes über ganzzahlige Potenzreihen, daß die Koeffizienten α_n ganze ganzzahlige Funktionen von k^2 sind.

Zur Berechnung der Koeffizienten dient die aus der zweiten Differentialgleichung ableitbare Rekursionsformel:

$$\alpha_n = -(1 + k^2)\,\alpha_{n-1} + \\ + 2k^2 \cdot \sum_{\substack{i+k+\lambda=n-2 \\ i,k,\lambda=0,1,\ldots}} \frac{(2n-1)!}{(2i+1)!\,(2k+1)!\,(2\lambda+1)!}\,\alpha_i \alpha_k \alpha_\lambda,\ n = 2, 3, 4, \ldots \quad (1)$$

---

[1]) Siehe H. Weber, Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen (III. Band des Lehrbuches d. Algebra, 2. Aufl. Verlag Vieweg, Braunschweig 1908).

[2]) F. Mertens, I. u. II. „Zur komplexen Multiplikation" (2 Mitteilungen) und III. „Über die Koeffizienten und Irreduktibilität der Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulären Moduln". Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien 1910, Band 119, IIa. Wo im Laufe dieser Arbeit auf diese drei Abhandlungen hingewiesen wird, seien dieselben kurz mit den römischen Ziffern I, II, III bezeichnet.

Digitized by Google

Faßt man α_n als Funktion von $1+k^2=\alpha$ und $k^2=\beta$ auf, so kann man α_n auch in der Form schreiben:

$$\alpha_n = \sum_{\lambda+2\mu=n} a_\lambda^{(n)} \alpha^\lambda \beta^\mu,$$

wo die Koeffizienten $a_\lambda^{(n)}$ ganze rationale Zahlen sind. Die ersten fünf Entwicklungskoeffizienten sind:

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = -\alpha,\ \alpha_2 = \alpha^2 + 12\beta,\ \alpha_3 = -\alpha^3 - 132\alpha\beta,$$

$$\alpha_4 = \alpha^4 + 1224\alpha^2\beta + 3024\beta^2,\ \alpha_5 = -\alpha^5 - 9384\alpha^3\beta - 132624\alpha\beta^2.$$

2. Aus dem Additionstheoreme der Funktion $sn(u;k^2)$ folgt:

$$\frac{1}{2}\{sn(u+v) + sn(u-v)\} = \frac{x(u)\,x'(v)}{1-k^2x^2(u)\,x^2(v)}$$

oder wenn man die linke Seite in eine Potenzreihe von v, die rechte Seite in eine Potenzreihe in bezug auf $x(u)$ entwickelt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n}x(u)}{du^{2n}} \cdot \frac{v^{2n}}{2n!} = \sum_{i=0}^{\infty} k^{2i} \frac{d}{dv}\{x^{2i+1}(v)\} \cdot \frac{x^{2i+1}(u)}{2i+1}.$$

Vergleicht man beiderseits die Koeffizienten von $\frac{v^{2n}}{2n!}$ und setzt:

$$x^{2i+1}(v) = \sum_{n=i}^{\infty} \alpha_n^{(2i+1)} \cdot \frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

so erhält man:

$$\frac{d^{2n}x(u)}{du^{2n}} = \sum_{i=0}^{\infty} k^{2i}\,\alpha_n^{(2i+1)} \cdot 2i! \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Setzt man insbesondere $2n = p-1$ und berücksichtigt, daß nach dem vierten Hurwitzschen Satze über ganzzahlige Potenzreihen $\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{(2i+1)}$ durch jede Primzahl zwischen $p-2i$ und $p+1$, daher für $0 < 2i < p$

$$\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{(2i+1)} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, während für $2i > p$ $2i!$ durch p teilbar ist, so folgt aus dem

Digitized by Google

obigen:

$$\frac{d^{p-1}x}{du^{p-1}} \equiv \alpha_{\frac{p-1}{2}}\, x \pmod p \text{ [1]}.$$

Die Koeffizienten von $x = sn(u; k^2)$ lassen sich daher in bezug auf einen Primzahlmodul auf die $\frac{p-1}{2}$ ersten Koeffizienten gemäß deren Kongruenzen

$$\alpha_{r\frac{p-1}{2}+\lambda} \equiv \alpha_\lambda \cdot \alpha^r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p, \quad \lambda = 0, 1, 2 \ldots \frac{p-3}{2} \tag{2a}$$

zurückführen. Insbesondere ist:

$$\alpha_{r\cdot\frac{p-1}{2}} \equiv \alpha^r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p. \tag{2b}$$

§ 2. Die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $\frac{1}{sn(u; k^2)}$.

1. Die Funktion:

$$\varphi(u) = \frac{1}{sn(u; k^2)} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n(k^2)}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

genügt den Differentialgleichungen:

$$\varphi'^2(u) = k^2 - (1+k^2)\varphi^2(u) + \varphi^4(u)$$
$$\varphi''(u) = -(1+k^2)\varphi(u) + 2\varphi^3(u).$$

Daraus ergeben sich:

$$E_1(k^2) = \frac{1+k^2}{2^2 \cdot 3}, \quad E_2(k^2) = \frac{7(1+k^2)^2 - 36k^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$E_n \cdot (2n+1)(n-2) = -\frac{1+k^2}{4} \cdot (2n-1) \cdot n E_{n-1} + \tag{3}$$
$$+ 3 \sum_{\substack{i+k=n \\ i,k=1,2,\ldots}} \binom{2n}{2i} E_i E_k +$$
$$+ \sum_{\substack{i+k+\lambda=n \\ i,k,\lambda=1,2,\ldots}} \frac{2n!}{2i!\,2k!\,2\lambda!} E_i \cdot E_k \cdot E_\lambda \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

[1]) Ähnliche Kongruenzen lassen sich auch für die geraden Potenzen von $sn(u; k^2)$ ableiten. Man erhält nämlich, wenn man denselben Weg verfolgt, wie ihn Hurwitz im Falle der lemniskatischen Funktionen einschlägt:

$$\frac{k^{2n-2}}{2n} \cdot \frac{d^{p-1}x^{2n}}{du^{p-1}} \equiv \frac{1}{2n!}\beta^{(2)}_{2n}\alpha^{(2)}_{p-1} + \alpha_{\frac{p-1}{2}}\lambda_{2n} + \alpha_{\frac{p-1}{2}} k^{2n-2} \cdot \frac{x^{2n}}{2n} \pmod p,$$

Digitized by Google

Die Größen $E_n(k^2)$ sind demnach ganze rationalzahlige Funktionen von k^2.

Die ersten fünf Werte von $E_n(k^2)$ sind, wenn $1+k^2=\alpha$ und $k^2=\beta$ gesetzt wird:

$$E_1 = \frac{1}{2^2.3}\cdot\alpha,$$

$$E_2 = \frac{1}{2^4.3.5}(7\alpha^2 - 36\beta),$$

$$E_3 = \frac{1}{2^6.3.7}(31\alpha^3 - 108\alpha\beta),$$

$$E_4 = \frac{1}{2^8.3.5}(127\alpha^4 - 792\alpha^2\beta + 1008\beta^2),$$

$$E_5 = \frac{5}{2^{10}.3.11}(511\alpha^5 - 3816\alpha^3\beta + 7344\alpha\beta^2).$$

2. Nach den Multiplikationsformeln der elliptischen Funktionen ist, wenn r eine ganze ungerade Zahl bedeutet:

$$snru = \frac{xA(x^2)}{D(x^2)},$$

wo

$$A(x^2) = r + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots$$
$$D(x^2) = 1 + d_1 x^2 + d_2 x^4 + \cdots$$

ganze Funktionen von $x^2 = sn^2 u$ mit ganzen ganzzahligen Funktionen von k^2 als Koeffizienten sind.

Bildet man:

$$F_r(u) = \frac{r}{snru} - \frac{1}{snu} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}E_n(k^2)}{2n}(r^{2n}-1)\cdot\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (4)$$

so folgt aus dem obigen:

$$F_r(u) = \frac{\frac{1}{x}\left(r.D(x^2) - A(x^2)\right)}{A(x^2)} = \frac{(rd_1 - a_1)x + (rd_2 - a_2)x^3 + \cdots}{r + a_1 x^2 + \cdots} \quad (4a)$$

---

wo die Größen $\beta_{2n}^{(2r)}$ und λ_{2n} durch die Reihen definiert sind:

$$\frac{u^{2r}}{2r!} = \sum_{n=r}^{\infty} \beta_{2n}^{(2r)} \frac{x^{2n}(u)}{2n!}$$

$$\int_0^u du \int_0^u x^2\, du = \lambda_4 x^4 + \lambda_6 x^6 + \cdots$$

Digitized by Google

Setzt man hierin statt u ru, so sind sämtliche Potenzreihen $x(ru)$, $x^2(ru)$, ... durch r teilbar und man kann Zähler und Nenner durch r dividieren. Dadurch erhält man im Nenner eine Einheitsreihe in bezug auf u. Nach dem zweiten Hurwitzschen Satze ist daher $F_r(ru)$ eine Potenzreihe inbezug auf u, deren Koeffizienten ganze, ganzzahlige Funktionen von k^2 sind. Dies drücken wir in der Form aus:

$$F_r(ru) = G(u; k^2),$$

$$\frac{2^{2n} E_n(k^2)}{2n} (r^{2n} - 1) . r^{2n-1} = G_n(k^2).^1)$$

Setzt man:

$$E_n(k^2) = \frac{Z_n(k^2)}{N_n} = \frac{z_0^{(n)} + z_1^{(n)} . k^2 + \cdots}{N_n}, \tag{5}$$

wo N_n den kleinstmöglichen ganzzahligen Nenner bedeutet, so ist:

$$2^{2n} . r^{2n-1} . \frac{z_i^{(n)} . (r^{2n} - 1)}{2n . N_n} = g_{i,n}$$

eine ganze rationale Zahl.

Es sei nun p irgend eine in N_n aufgehende ungerade Primzahl und zwar sei N_n genau durch die α^{te} Potenz von p, $2n$ durch die β^{te} Potenz von p teilbar; ferner sei r eine Primitivzahl modulo $p^{\alpha+\beta}$. Es gibt dann ein z_i, welches zu p teilerfremd ist, daher:

$$r^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\beta}}.$$

Da der Annahme nach keine frühere als die $p^{\alpha+\beta-1}.(p-1)^{te}$ Potenz von r dieser Kongruenz genügt, so muß

$$2n \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, p^{\alpha+\beta-1}(p-1)\right)$$

sein. Weil aber $2n$ genau durch p^β teilbar ist, so muß notwendig:

$$\alpha + \beta - 1 \leqq \beta,$$

mithin

$$\alpha \leqq 1$$

und

$$2n \equiv 0 \pmod{p-1}$$

sein.

---

[1]) Mit $G(u; k^2)$ möge stets eine Potenzreihe von u:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(k^2) \cdot \frac{u^n}{n!}$$

bezeichnet werden, deren Koeffizienten $G_n(k^2)$ ganze ganzzahlige Funktionen von k^2 sind.

Digitized by Google

Daher gilt der Satz:

Die im Nenner von $E_n(k^2)$ aufgehenden ungeraden rationalen Primzahlen p können in demselben höchstens in der ersten Potenz enthalten sein und müssen von der Beschaffenheit sein, daß $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist.

3. Um das Verhalten der Nenner N_n in bezug auf die Primzahl 2 zu untersuchen, betrachte man:

$$F_2(u) = \frac{2}{sn\,2u} - \frac{1}{sn\,u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n(k^2)}{2n} (2^{2n}-1) \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}. \quad (6)$$

Nach der Multiplikationsformel:

$$sn\,2u = \frac{2xx'}{1-k^2x^4} \quad \left((x' = \frac{d}{du} sn\,(u;k^2) = \frac{dx}{du}\right)$$

ist:

$$F_2(u) = \frac{1-k^2x^4}{x.x'} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{(1-k^2x^2)(1-x^2)} \left\{\frac{x'-1}{x} + (1+k^2)x - k^2x^3 - k^2x^3.x'\right\}.$$

Nun sind sowohl x und x' als auch:

$$\frac{1}{(1-k^2x^2)(1-x^2)} = 1 + (1+k^2)x^2 + \cdots$$

Reihen in u mit Koeffizienten, welche ganz und ganzzahlig in k^2 sind, daher:

$$F_2(u) = \frac{x'-1}{x} + G(u;k^2).$$

Um die Koeffizienten der Reihe:

$$\frac{x'-1}{x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \cdot \frac{u^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} \quad \left(2\lambda_1 = \alpha_1 = -(1+k^2)\right)$$

zu studieren, setze man für x und x' die Potenzreihen in u ein. Man erhält daraus die Rekursionsformel:

$$2n\,\lambda_n = \alpha_n - \sum_{\substack{i+k=n \\ i,k=1,2\ldots}} \binom{2n}{2i} \frac{\alpha_i}{2i+1} 2k.\lambda_k.$$

Da α_i ganz und ganzzahlig in k^2, $2i+1$ eine ungerade Zahl und $2\lambda_1 = -(1+k^2)$ ist, so folgt daraus, daß allgemein $2n\,\lambda_n$ im

Digitized by Google

Nenner nur ungerade Primfaktoren enthalten kann. Mithin ist:

$$F_2(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} + G(u; k^2)$$

und nach (6):

$$2^{2n} E_n(k^2)\,(2^{2n}-1) = 2^{2n}\,\frac{Z_n(k^2)}{N_n}\,(2^{2n}-1) = 2n\,\lambda_n + G_n(k^2).$$

Daraus folgt:

Der Nenner N_n kann die Primzahl 2 höchstens in der $2n^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

4. Man ist nun im stande, die Zahlen E_n in Partialbrüche zu zerlegen:

$$E_n(k^2) = e_n(k^2) + \frac{\sigma_0(k^2)}{2^{2n}} + \sum_{p_i} \frac{\sigma_i(k^2)}{p_i}. \tag{7}$$

Die Summe erstreckt sich über alle ungeraden Primfaktoren p_i von $N_n \,.\, e_n(k^2)$ sowie die Zähler $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ sind ganze ganzzahlige Funktionen von k^2.

Im folgenden sei eine Eigenschaft der zu den ungeraden Primfaktoren p_i gehörigen Zähler entwickelt.

In der für eine beliebige ungerade Primzahl p gültigen Multiplikationsformel:

$$\frac{snpu}{snu} = \frac{p + a_1 x^2 + \cdots + a_{\frac{p-1}{2}} x^{p-1} + x^p \,.\, G(x; k^2)}{1 + b_1 x^2 + \cdots} \tag{8}$$

ist der Nenner eine ganzzahlige Einheitsreihe in bezug auf u; ferner sind die Koeffizienten $p_1\, a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p-3}{2}}$ durch p teilbar und auch x^p eine durch p teilbare Potenzreihe in u. Daher folgt mittels der Hurwitzschen Sätze über ganzzahlige Reihen:

$$\frac{snpu}{snu} \equiv a_{\frac{p-1}{2}}\, x^{p-1} \pmod{p}.$$

Anderseits ist:

$$\frac{snpu}{snu} = snpu \cdot \frac{1}{snu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \,.\, p^{2\nu+1} \,.\, \frac{u^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \cdot \cdot \left\{ \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n(k^2)}{2n} \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha_n \cdot \frac{p^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{\substack{i+k=n \\ i=0,1,2,\ldots \\ k=1,2,\ldots}} \binom{2n}{2i} \frac{p^{2i+1}}{2i+1} \cdot \alpha_i \,.\, 2^{2k} E_k \right\} \frac{u^{2n}}{2n!} \cdot$$

Digitized by Google

Daher gilt für die Koeffizienten dieser Reihe:

$$\alpha_n \cdot \frac{p^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{\substack{i+k=n \\ i=0,1,\ldots \\ k=1,2,\ldots}} \binom{2n}{2i} \frac{p^{2i+1}}{2i+1} \alpha_i . 2^{2k} . E_k \equiv a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{2n}^{(p-1)} \pmod{p}.$$

E_n enthält die Primzahl p im Nenner höchstens in der ersten Potenz, $\frac{p^{2i}}{2i+1}$ hat für $i > 0$ mindestens einmal den Faktor p, α_i ist eine ganze ganzzahlige Funktion von k^2, daher ist jedes Glied dieser Summe durch p teilbar mit Ausnahme desjenigen für $i = 0$ und man enthält, da auch $\alpha_n \cdot \frac{p^{2n+1}}{2n+1}$ durch p teilbar ist, die Kongruenz:

$$2^{2n} p E_n(k^2) \equiv a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{2n}^{(p-1)} \pmod{p}. \tag{9}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $a_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$.

In diesem Falle kann die Primzahl p in keinem der Nenner der Zahlen $E_n(k^2)$ vorkommen.

2. $a_{\frac{p-1}{2}} \equiv\equiv 0 \pmod{p}$.

Ist $2n$ nicht durch $p-1$ teilbar, so fehlt nach § 2, $2p$ im Nenner von E_n und aus (9) folgt:

$$\alpha_{2n}^{(p-1)} \equiv 0 \pmod{p} \quad [2n \neq r(p-1)].$$

Ist dagegen $2n$ durch $p-1$ teilbar, d. h. $2n = r(p-1)$, so geht die Kongruenz (9), wenn man in derselben statt $E_n(k^2)$ die Partialbruchzerlegung (7) einsetzt:

$$\sigma(k^2) \equiv a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \pmod{p} \quad [2n = r(p-1)]. \tag{10}$$

Gleichzeitig geht daraus hervor, daß die Funktion $sn^{p-1}(u)$ folgende Entwicklung modulo p besitzt:

$$sn^{p-1}(u) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \cdot \frac{u^{r(p-1)}}{\{r(p-1)\}!} \pmod{p}.$$

Aus der Kongruenz:

$$sn^p(u) = sn^{p-1}(u) . sn(u) \equiv 0 \pmod{p}$$

[1]) Dieser Gedankengang ist derselbe, wie ich ihn in meiner Arbeit über die Zahlen im Körper $k(\sqrt{-2})$ entwickelt habe.

Digitized by Google

folgt ferner, wenn man den Koeffizienten von $\frac{u^{2p-1}}{(2p-1)!}$ berechnet:

$$\alpha_{2(p-1)}^{(p-1)} \equiv \alpha_{\frac{p-1}{2}} \cdot \alpha_{p-1}^{(p-1)} \pmod{p}.$$

Der Koeffizient $\alpha_{r(p-1)}^{(p-1)}$ kann noch auf eine einfachere Gestalt gebracht werden. Aus der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 sn^{2i}(u)}{du^2} = 2i(2i-1)x^{2i-2} - (2i)^2(1+k^2)x^{2i} + 2i(2i+1)k^2 x^{2i+2}$$

geht durch wiederholte Differentiation nach u hervor, daß jeder Ausdruck von der Form:

$$\frac{d^{2n} sn^{2i}(u)}{du^{2n}} \quad (n = 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots)$$

als ganze ganzzahlige Funktion von $x^2 = sn^2(u)$ darstellbar ist. Betrachtet man insbesondere $\frac{d^{p-1} sn^{p-1}(u)}{du^{p-1}}$ nach dem Modul p, so fallen alle Glieder, welche höhere Potenzen als die $p-1^{te}$ Potenz von $sn\,u$ enthalten weg, da nach dem dritten Hurwitzschen Satze:

$$sn^i(u) \equiv 0 \pmod{p} \quad (i > p-1)$$

ist. Dasselbe gilt von den Gliedern, welche $sn^2(u)$, $sn^4(u), \ldots$ $sn^{p-3}(u)$ enthalten, weil nach den vorangegangenen Erörterungen in der Entwicklung von $sn^{p-1}(u)$ bloß diejenigen Glieder in Betracht kommen, in welchen der Exponent von u durch $p-1$ teilbar ist. Man erhält demnach die Kongruenz:

$$\frac{d^{p-1} sn^{p-1}(u)}{du^{p-1}} \equiv C + C' . sn^{p-1}(u) \pmod{p},$$

woraus sich durch Vergleichung der Koeffizienten von u^0 und u^{p-1} die Größen C und C' berechnen lassen:

$$C \equiv \alpha_{p-1}^{(p-1)} \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p},$$

$$\alpha_{p-1}^{(p-1)} \cdot C' \equiv \alpha_{2(p-1)}^{(p-1)} \equiv \alpha_{\frac{p-1}{2}} \cdot \alpha_{p-1}^{(p-1)} \pmod{p};$$

daher

$$\frac{d^{p-1} sn^{p-1}(u)}{du^{p-1}} \equiv -1 + \alpha_{\frac{p-1}{2}} . sn^{p-1}(u) \pmod{p}. \qquad (11)$$

Digitized by Google

Daraus folgt für die Koeffizienten der Entwicklung von $sn^{p-1}(u)$:

$$\alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \equiv -\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \pmod{p} \tag{12}$$

und die Reihe für $sn^{p-1}(u)$ hat die Form:

$$sn^{p-1}(u) \equiv -\sum_{r=1}^{\infty} \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \cdot \frac{u^{r(p-1)}}{\{r(p-1)\}!} \pmod{p}.$$

Demnach gilt für den Zähler σ, der zum Nenner p in der Partialbruchzerlegung von $E_n(k^2)$ $[2n = r(p-1)]$ gehört, unter Zuhilfenahme von (12):

$$\sigma(k^2) \equiv -a_{\frac{p-1}{2}} \cdot \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \pmod{p}. \tag{13}$$

§ 3. Die Entwicklungskoeffizienten der Funktion: $\frac{1}{sn^2(u;k^2)}$.

1. Analoge Sätze wie im vorhergehenden Falle gelten für die Entwicklungskoeffizienten der Funktion:

$$\psi(u) = \frac{1}{sn^2(u;k^2)} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n'(k^2)}{2n} \cdot \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!},$$

welche der Differentialgleichung:

$$\psi'^2(u) = 4\psi^3(u) - 4(1+k^2)\psi^2(u) + 4k^2 \cdot \psi(u)$$

oder der daraus abgeleiteten Differentialgleichung:

$$\psi''(u) = 6\psi^2(u) - 4(1+k^2)\psi(u) + 2k^2$$

genügt. Daraus folgt, wenn man

$$\gamma_2 = 1 - k^2 k'^2, \quad \gamma_3 = (k'^2 - k^2)(2 + k^2 k'^2) \quad (k^2 + k'^2 = 1)$$

setzt:

$$E_1'(k^2) = \frac{1+k^2}{6}, \quad E_2'(k^2) = \frac{\gamma_2}{30}, \quad E_3'(k^2) = \frac{\gamma_3}{84},$$

$$E_n'(2n-1)(2n+1)(n-3) = 3 \sum_{\substack{i+k=n \\ i,k=2,3,\ldots}} \binom{2n}{2i} E_i'(2i-1) E_k'(2k-1) \tag{14}$$
$$n = 4, 5, \ldots$$

Digitized by Google

Die ersten sechs Werte von $E_n'(k^2)$ sind demnach:

$$E_1'(k^2) = \frac{1}{2.3}(1+k^2),$$

$$E_2'(k^2) = \frac{1}{2.3.5}\gamma_2,$$

$$E_3'(k^2) = \frac{1}{2^2.3.7}\gamma_3,$$

$$E_4'(k^2) = \frac{1}{2.3.5}\gamma_2^2,$$

$$E_5'(k^2) = \frac{5}{2^2.3.11}\cdot\gamma_2\gamma_3,$$

$$E_6'(k^2) = \frac{1}{2^2.3.5.7.13}(882\gamma_2^3+125\gamma_3^2).$$

Demnach sind die Koeffizienten $E_n'(k^2)$ ganze rationalzahlige Funktionen von k^2.

2. Aus der Multiplikationsformel für snu folgt:

$$F_r^{(1)}(u) = \frac{r^2}{sn^2 ru} - \frac{1}{sn^2 u} = \frac{a_0' + a_1' x^2 + \cdots}{r^2 + b_1' x^2 + \cdots}, \qquad (15)$$

wo die Koeffizienten $a_0', a_1', \ldots, b_1', \ldots$ ganze ganzzahlige Funktionen von k^2 sind und insbesondere

$$a_0' = 2r(rd_1 - a_1)$$

ist Für ein ungerades, zu 3 teilerfremdes r folgt aus (4) und (4a):

$$rd_1 - a_1 = r\cdot\frac{1+k^2}{6}(r^2-1) \equiv 0 \pmod r;$$

daher kann man in diesem Falle, da a_0' durch r^2 teilbar ist, indem man statt u ru setzt, Zähler und Nenner von (15) durch r^2 dividieren und erhält im Nenner eine ganzzahlige Einheitsreihe. Es ist demnach $F_r^{(1)}(ru)$ eine ganzzahlige Reihe in u, d. h.

$$2^{2n}r^{2n-2}\cdot\frac{E_n'(k^2)\cdot(r^{2n}-1)}{2n} = G_n(k^2).$$

Dieselben Schlüsse wie im Falle der Entwicklungskoeffizienten von $\frac{1}{snu}$ lassen sich auch hier anwenden und führen zu dem Satze:

Digitized by Google

Die im Nenner von $E_n'(k^2)$ aufgehenden ungeraden rationalen Primzahlen p können in demselben höchstens in der ersten Potenz enthalten sein und müssen von der Beschaffenheit sein, daß $p-1$ ein Teiler von $2n$ ist.

3. Das Verhalten des Nenners von $E_n'(k^2)$ in bezug auf die Primzahl 2 erhellt aus der Multiplikationsformel für 2:

$$\frac{4}{sn^2\,2u} - \frac{1}{sn^2\,u} = \frac{(1+k^2) - 3k^2x^2 + k^4x^6}{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = G(u; k^2).$$

Demnach ist die Reihe:

$$\frac{4}{sn^2\,2u} - \frac{1}{sn^2\,u} = \sum \frac{2^{2n} E_n'(k^2)}{2n}(2^{2n}-1)\cdot\frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} \qquad (16)$$

ganzzahlig, d. h.

$$\frac{2^{2n} E_n'(k^2)}{2n}(2^{2n}-1) = G_n(k^2).$$

Daher kann der Nenner N_n von $E_n'(k^2)$ höchstens durch 2^{2n-1} teilbar sein.

4. Die Entwicklungskoeffizienten $E_n'(k^2)$ lassen sich daher analog wie die Zahlen $E_n(k^2)$ in Partialbrüche zerlegen:

$$E_n'(k^2) = \frac{Z_n'(k^2)}{N_n} = e_n'(k^2) + \frac{\sigma_0'(k^2)}{2^{2n-1}} + \sum_{p_i} \frac{\sigma_i'(k^2)}{p_i} \qquad (17)$$

wobei sich die Summe über alle ungeraden Primfaktoren von N_n' erstreckt und e_n' sowie die Zähler $\sigma_0', \sigma_1', \sigma_2', \ldots$ ganze ganzzahlige Funktionen von k^2 sind.

Um den Zusammenhang zwischen den Zählern σ_i' dieser Partialbruchzerlegung mit den Zählern σ_i derjenigen von $E_n(k^2)$ herzustellen, gehe man von der folgenden Identität in u aus:

$$\frac{d}{du}\left\{\frac{1}{x}\right\} = -\frac{1}{x^2}\cdot x'.$$

Setzt man darin die entsprechenden Potenzreihen ein und vergleicht beiderseits die Koeffizienten von u^{2n-2}, so findet man:

$$2^{2n} E_n'(2n-1) = -2^{2n} E_n(2n-1) - \alpha_n - \sum_{\substack{i+k=n \\ i,k=1,2,\ldots}} \binom{2n}{2i} 2^{2i} E_i'(2i-1)\cdot\alpha_k.$$

Die ungerade Primzahl p sei ein Primfaktor des Nenners von E_n'; daher ist $2n = r(p-1)$. In den Nennern der Zahlen E_i' kann p nur insoweit enthalten sein, als $2i$ durch $p-1$ teilbar ist.

Digitized by Google

Daraus folgt die Kongruenz:

$$p E_n'(2n-1) \equiv -p E_n(2n-1) - \sum' \binom{2n}{2i} p E_i'(2i-1).\alpha_k,$$

wo sich die Summe nur auf jene i bezieht, für welche $2i$ daher auch $2k$ durch $p-1$ teilbar sind ($2i = \rho(p-1)$, $2k = \sigma(p-1)$, $\rho + \sigma = r$).

Insbesondere folgt daraus für $n = \frac{p-1}{2}$ d. i. für $r = 1$:

$$p E'_{\frac{p-1}{2}}(p-2) \equiv -p E_{\frac{p-1}{2}}(p-2).$$

Es sei nun für alle Indices $i < n$ [$2n = r(p-1)$, $2i = \rho(p-1)$] nachgewiesen, daß:

$$p E_i'(2i-1) \equiv -p E_i(2i-1) \pmod p$$

daher nach (13)

$$p E_i'(2i-1) \equiv a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{\rho-1} (2i-1) \pmod p.$$

Dadurch geht die obige Kongruenz, wenn man überdies für α_k [$2k = \sigma(p-1)$] den Wert aus ($2b$) einsetzt, in die folgende über:

$$p E_n'(2n-1) \equiv -p E_n(2n-1) - a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \sum' \binom{2n}{2i} (2i-1).$$

Nun ist

$$\sum' \binom{2n}{2i} (2i-1) = (n-1) . \sum' \binom{2n}{2i} \equiv 0 \pmod p$$

daher:

$$p E_n'(2n-1) \equiv -p E_n(2n-1) \pmod p.$$

Es gilt somit diese Kongruenz allgemein und man erhält, wenn man E_n und E_n' in ihre Partialbrüche zerlegt, folgenden Zusammenhang zwischen den zu dem Nenner p gehörigen Zählern σ und σ':

$$\sigma'(k^2) . (2n-1) \equiv a_{\frac{p-1}{2}} . \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} . (2n-1) \pmod p \; [2n = r(p-1)]. \quad (18)$$

Zweiter Teil.

§ 4. Die Zahlen E_n und E_n' im Falle eines singulären Moduls.

Es sei $k(\omega)$ ein singulärer Modul, welcher zur kanonischen Form erster Art[1]):

$$f = (A, B, C)$$

[1]) Nach Mertens (l. c. I. Mitteilung, § 7) bedeute eine kanonische Form eine positive Form negativer Determinante, welche primitiv und erster Art ist, ferner einen ungeraden ersten und einen geraden dritten Koeffizienten besitzt.

Digitized by Google

der negativen Determinante

$$D = -\Delta = B^2 - AC$$

gehöre. ω ist Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0.$$

Die Entwicklungskoeffizienten $E_n(k^2)$ und $E_n'(k^2)$ sind demnach Zahlen des Körpers $K(k^2)$. Somit gehören sie auch dem Körper:

$$\Re(k^2, \sqrt{D})$$

an. Sie mögen daher mit $E_n(k^2, \sqrt{D})$ und $E_n'(k^2, \sqrt{D})$ oder kurz mit E_n und E_n' bezeichnet werden.

Da alle Primideale des quadratischen Körpers $\Omega(\sqrt{D})$ im Körper $\Re(k^2, \sqrt{D})$ Hauptideale sind, so ist man imstande, diese Zahlen derart darzustellen:

$$E_n = \frac{Z_n}{N_n} \text{ und } E_n' = \frac{Z_n'}{N_n'},$$

daß Zähler und Nenner ganze algebraische Zahlen des Körpers $\Re(k^2, \sqrt{D})$ sind, welche in diesem Körper kein Hauptideal, demnach auch kein Ideal des quadratischen Körpers $\Omega(\sqrt{D})$ als gemeinsamen Teiler besitzen.

Bezeichnet man mit:

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$$

die Primideale (bezw. Primzahlen) im Körper $\Omega(\sqrt{D})$, welche Primteiler der Nenner N_n bezw. N_n' sind und ungerade Normen besitzen, ferner mit:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots$$

ganze Zahlen des Körpers $\Re(k^2, \sqrt{D})$, welche diesen Primidealen assoziiert sind, so lassen sich die Zahlen E_n und E_n' in folgender Weise in Partialbrüche zerlegen:

$$E_n = e_n + \sum_{\mu_i} \frac{\sigma_i}{\mu_i^{\xi_i}}, \quad E_n' = e_n' + \sum_{\mu} \frac{\sigma_i'}{\mu_i^{\xi_i}}.$$

e_n und e_n' sind Zahlen des Körpers $\Re(k^2, \sqrt{D})$, welche im Nenner höchstens 2 oder dessen Idealteiler enthalten; die Exponenten ξ_i sind 1 oder 2 (letzteres eventuell im Falle eines Primteilers der Determinante D); die Zähler σ_i und σ_i' sind ganze algebraische Zahlen des Körpers $\Re(k^2, \sqrt{D})$, welche den Kongruenzen:

$$\mu_i^{\xi_i} \cdot E_n \equiv \sigma_i \pmod{\mu_i^{\xi_i}} \text{ und } \mu_i^{\xi_i} E_n' \equiv \sigma_i' \pmod{\mu_i^{\xi_i}}$$

genügen.

Digitized by Google

§ 5. Verhalten der Nenner von E_n und E'_n in bezug auf eine Primzahl q, für welche $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$ ist.

Betrachtet man eine im quadratischen Körper $\Omega(\sqrt{D})$ unzerlegbare ungerade rationale Primzahl q, für welche also $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$ ist, so liefert die komplexe Multiplikation den Satz,[1]) daß in der Entwicklung:

$$\frac{sn\,qu}{sn\,u} = \frac{A(x^2)}{D(x^2)} = \frac{q + a_1 x^2 + \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \cdot k^{\frac{1}{2}(q^2-1)} \cdot x^{q^2-1}}{1 + d_1 x^2 + \cdots + d_{\frac{1}{2}(q^2-1)} \cdot x^{q^2-1}}$$

$$(x = sn\,u)$$

die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{q^2-3}{2}}, d_1, \ldots d_{\frac{q^2-1}{2}}$ durch q teilbare, ganze Zahlen des Körpers $K(k^2)$, mithin auch des Körpers $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ sind. Daher ist:

$$\frac{q}{sn\,qu} - \frac{1}{sn\,u} = \frac{q \cdot D(x^2)}{x \cdot A(x^2)} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{(q d_1 - a_1) x + \cdots + [q d_{\frac{1}{2}(q^2-1)} \pm k^{\frac{1}{2}(q^2-1)}] x^{q^2-2}}{q + a_1 x^2 + \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}(q-1)} \cdot k^{\frac{1}{2}(q^2-1)} \cdot x^{q^2-1}}.$$

Sämtliche Koeffizienten mit Ausnahme der Koeffizienten von x^{q^2-2} und x^{q^2-1} sind durch q teilbare ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$.

Da nach dem dritten Hurwitzschen Satze x^{q^2-2} und x^{q^2-1} durch q teilbare Reihen in u sind, so lassen sich sämtliche Glieder im Zähler und Nenner durch q dividieren und der Nenner wird zu einer ganzzahligen Einheitsreihe in u. Daher ist:

$$\frac{q}{sn\,qu} - \frac{1}{sn\,u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n}{2n} (q^{2n} - 1) \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

eine ganzzahlige Reihe.

Dasselbe gilt aus gleichen Gründen für:

$$\frac{q^2}{sn^2\,qu} - \frac{1}{sn^2\,u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E'_n}{2n} \cdot (q^{2n} - 1) \cdot \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

Es sind also:

$$\frac{2^{2n} E_n}{2n} (q^{2n} - 1) \quad \text{und} \quad \frac{2^{2n} E'_n}{2n} (q^{2n} - 1)$$

ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$.

[1]) Siehe Mertens III, Seite 1526.

Digitized by Google

Demnach enthalten die Nenner von E_n und E_n' keine im quadratischen Körper $\Omega(\sqrt{D})$ unzerlegbare ungerade rationale Primzahlen q, für welche $\left(\frac{D}{q}\right) = -1$ ist.

§ 6. Verhalten der Nenner von E_n und E_n' in bezug auf die in D aufgehenden ungeraden Primzahlen.

Es sei p^* eine in der Determinante D aufgehende ungerade rationale Primzahl. Dieselbe ist im quadratischen Körper $\Omega(\sqrt{D})$ dem Quadrate eines Primideales $\mathfrak{p}^*$ gleich. Im Körper $\Re(k^2, \sqrt{D})$ wird $\mathfrak{p}^*$ zum Hauptideale μ^* und kann eventuell in weitere Primideale zerfallen. Die Darstellung in $\Re(k^2, \sqrt{D})$ sei:

$$\mathfrak{p}^* \sim \mathfrak{P}_1^{i_1} . \mathfrak{P}_2^{i_2} \ldots$$

In den Zahlen $E_n = \frac{Z_n}{N_n}$ können gemäß den Resultaten des ersten Teiles dieser Arbeit die Nenner höchstens durch die erste Potenz von p^*, daher höchstens durch die zweite Potenz von $\mathfrak{p}^*$ teilbar sein. Wenn $\mathfrak{p}^*$ ein wirklicher Teiler von N_n ist, so kann gemäß der Bedeutung von Z_n und N_n (siehe § 4) der Zähler Z_n nicht durch $\mathfrak{p}^*$ teilbar sein. Es ist aber möglich, daß der Zähler durch niedere Potenzen von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ teilbar ist. Es sei etwa Z_n genau durch:

$$\mathfrak{P}_1^{\varkappa_1} . \mathfrak{P}_2^{\varkappa_2} \ldots$$

teilbar. Hiebei muß jedoch mindestens ein Exponent $\varkappa$ existieren, welcher kleiner ist, als der zugehörige Exponent i, da sonst E_n nicht in der einfachsten Form erscheinen würde.

Für eine beliebige ganze Zahl des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$:

$$\zeta = \xi + \eta\sqrt{D}) \quad \left(N\zeta = m \equiv 1 \pmod 2\right)$$

liefert die komplexe Multiplikation die Darstellung [1]):

$$\frac{sn\,\zeta u}{sn\,u} = \frac{P(x^2)}{Q(x^2)} = \frac{\zeta + a_1 x^2 + \cdots + a_{\frac{m-1}{2}} x^{m-1}}{1 + b_1 x^2 + \cdots + b_{\frac{m-1}{2}} x^{m-1}}, \quad (x = sn\,u)$$

[1]) Siehe Mertens III, 1. Abschnitt.

Digitized by Google

wo $a_1, a_2 \ldots a_{\frac{m-3}{2}}, b_1, \ldots b_{\frac{m-1}{2}}$ ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ sind und $a_{\frac{m-1}{2}}$ eine Einheit dieses Körpers bedeutet.

Es ist demnach:

$$F(u) = \frac{\zeta}{sn\,\zeta u} - \frac{1}{sn\,u} = \frac{\frac{1}{x}\left(\zeta Q(x^2) - P(x^2)\right)}{P(x^2)} =$$

$$= \frac{(b_1\zeta - a_1)\,x + \cdots}{\zeta + a_1 x^2 + \cdots}.$$

Daraus folgt, da $x(\zeta u)$ eine durch ζ teilbare ganzzahlige Reihe ist, welche für $u = 0$ verschwindet, daß:

$$F(\zeta u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} E_n}{2n}\, \zeta^{2n-1}(\zeta^{2n} - 1) \cdot \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

eine ganzzahlige Reihe ist. Die Zahlen:

$$\zeta^{2n-1}(\zeta^{2n} - 1) \cdot \frac{2^{2n} E_n}{2n} = 2^{2n}\zeta^{2n-1} \cdot (\zeta^{2n} - 1) \cdot \frac{Z_n}{2n \cdot N_n}$$

sind daher im Körper $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ ganze Zahlen. N_n sei im Körper $\Omega(\sqrt{D})$ genau durch $\mathfrak{p}^{*\alpha}$ ($\alpha = 1$ oder 2) und $2n$ genau durch $p^\beta \sim \mathfrak{p}^{*2\beta}$ teilbar. Im Körper $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ sind demnach:

N_n genau durch $\mathfrak{P}_1^{i_1 \alpha} \cdot \mathfrak{P}_2^{i_2 \alpha} \ldots$

$2n$ genau durch $\mathfrak{P}_1^{i_1 \cdot 2\beta} \cdot \mathfrak{P}_2^{i_2 \cdot 2\beta} \ldots$

teilbar und aus der Ganzzahligkeit des obigen Ausdruckes folgt, wenn ζ zu $\mathfrak{p}^*$ teilerfremd angenommen wird:

$$\zeta^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{i(\alpha+2\beta)-\varkappa}},$$

wo $\mathfrak{P}$ eines jener Primideale bedeutet, für welches $\varkappa < i$ ist, oder

$$\zeta^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{i(\alpha+2\beta-1)+(i-\varkappa)}}.$$

Da aber ζ eine Zahl des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$ ist und $\mathfrak{P}^{i-\varkappa}$ mindestens durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so folgt daraus:

$$\zeta^{2n} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{*\alpha+2\beta}}.$$

Man setze für ζ eine Primitivzahl [1]) nach dem Modul $\mathfrak{p}^{*\alpha+2\beta}$. Demnach ist die $p^{*\alpha+2\beta-1}(p^* - 1)^{\text{te}}$ Potenz von ζ und keine frühere

Digitized by Google

Potenz kongruent 1 nach dem Modul $\mathfrak{p}^{*\alpha+2\beta}$ und aus der obigen Kongruenz folgt:

$$2n \equiv 0 \pmod{p^{*\alpha+2\beta-1}(p^*-1)}. \tag{19}$$

Da aber anderseits $2n$ höchstens durch $p^{*\beta}$ teilbar sein kann, so ist notwendig:

$$\alpha+\beta \leqq 1.$$

Daraus folgt für ein durch p^* teilbares $2n$ ($\beta > 0$), daß der Nenner N_n zu $\mathfrak{p}^*$ teilerfremd sein muß. Ist dagegen $2n$ zu p^* teilerfremd ($\beta = 0$), so kann $\mathfrak{p}^*$ in N_n höchstens in der ersten Potenz aufgehen.

Daß der letztere Fall möglich ist, erhellt aus folgenden Beispielen.[2]) Man wähle zunächst den zur Determinante $D = -5$ gehörigen Modul:

$$k^2(\sqrt{-5}) = -1 - 8\lambda + 4\lambda\sqrt{\lambda} \quad (\lambda = 2 - \sqrt{5})$$

und berechne:

$$E_2 = \frac{Z_2}{N_2} = \frac{7(1+k^2)^2 - 36k^2}{2^4.3.5}.$$

Der Zähler genügt der Kongruenz:

$$Z_2 \equiv 2(1 - k^2 + k^4) \equiv \sqrt{5}\,.\,(1+\sqrt{\lambda}) \pmod 5,$$

wo $1+\sqrt{\lambda}$ zu 5 teilerfremd ist $\left((1+\sqrt{\lambda})(1-\sqrt{\lambda}) \equiv -1 \pmod{\sqrt{5}}\right)$.

Man wähle ferner den zur Determinante $D = -6$ gehörigen Modul:

$$k^2(\sqrt{-6}) = 35 + 24\sqrt{2} + (14 + 10\sqrt{2})\sqrt{6}$$

---

[1]) In der Literatur findet sich bloß der Nachweis von Primitivzahlen nach einem Primidealmodul. Es läßt sich jedoch wenigstens im Falle eines Primideales ersten Grades auch für einen Primidealpotenzmodul die Existenz von Primitivzahlen nachweisen, indem man das Gaußsche Verfahren zur Bestimmung primitiver Kongruenzwurzeln nach einem Primzahlpotenzmodul im Körper der rationalen Zahlen auf diesen Fall sinngemäß überträgt. Ich führe diesen Gedanken nur für die zweite Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}$ durch. Ist γ eine Primitivzahl modulo $\mathfrak{p}$, setzt man ferner $\gamma^{p-1} = 1 + \gamma'$, so ist γ' eine durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl. Ist γ' nur durch $\mathfrak{p}$ und durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist bereits γ eine Primitivzahl modulo $\mathfrak{p}^2$, da erst die $N\mathfrak{p}^2 = p(p-1)^{te}$ und keine frühere Potenz von γ kongruent 1 modulo $\mathfrak{p}$ wird. Ist dagegen γ' durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar, dann addiere man zu γ eine durch $\mathfrak{p}$ aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbare Zahl π und erhält in $\gamma + \pi$ eine Primitivzahl modulo $\mathfrak{p}^2$. Denn es ist für $\lambda = 1, 2, \ldots p$ die rechte Seite der Kongruenz $(\gamma+\pi)^{\lambda(p-1)} \equiv 1 - \lambda\gamma^{p-2}\pi \pmod{\mathfrak{p}^2}$ dann und nur dann kongruent 1 modulo $\mathfrak{p}^2$, wenn $\lambda = p$ ist. Analog beweist man für jede höhere Potenz eines Primideales ersten Grades die Existenz von Primitivzahlen. Da die in der Determinante D eines quadratischen Körpers aufgehenden Primideale vom ersten Grade sind, so ist hiemit auch für diese die Existenz von Primitivzahlen nach einem Primidealpotenzmodul nachgewiesen.

[2]) Siehe Mertens I, 20. Abschnitt, Seite 263.

Digitized by Google

und berechne:

$$E_1 = \frac{Z_1}{N_1} = \frac{1+k^2}{2^2.3}.$$

Der Zähler genügt der Kongruenz:

$$Z_1 \equiv (-1+\sqrt{2})\sqrt{6} \pmod 3.$$

Es kommen demnach bloß jene ungeraden rationalen Primzahlen p^* der Determinante D als Teiler des Nenners N_n in Betracht, für welche $2n$ durch p^*-1, aber nicht durch p^* teilbar ist und zwar kann der Nenner N_n höchstens durch die erste Potenz des Idealteilers von p^* im Körper $\Omega(\sqrt{D})$, d. i. durch $\mathfrak{p}^*$ teilbar sein.

Dieselben Schlüsse gelten für die Nenner der Zahlen E_n'. Die im § 4 für die Zahlen E_n und E_n' aufgestellten Partialbruchzerlegungen lassen daher folgende präzisere Darstellung zu:

$$\begin{aligned} E_n &= e_n + \sum_{\mathfrak{p}_i} \frac{\sigma_i}{\mu_i} + \sum_{\mathfrak{p}^*} \frac{\tau_\varkappa}{\mu_\varkappa^*} \\ E_n' &= e_n' + \sum_{\mathfrak{p}_i} \frac{\sigma_i'}{\mu_i'} + \sum_{\mathfrak{p}^*} \frac{\tau_\varkappa'}{\mu_\varkappa^*}. \end{aligned} \tag{20}$$

Die erste Summe erstreckt sich über alle jene Primideale $\mathfrak{p}_i$ des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$, deren Normen ungerade, zur Determinante D teilerfremde rationale Primzahlen p sind, für welche $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$ und $2n$ durch $p-1$ teilbar ist. Die zweite Summe erstreckt sich über jene Primideale $\mathfrak{p}^*$ des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$, deren Normen ungerade rationale Primzahlen sind, welche in der Determinante D aufgehen und für welche $2n$ durch p^*-1, aber nicht durch p^* teilbar ist.

§7. Einige Eigenschaften der Zähler in den Partialbruchzerlegungen der Zahlen E_n und E_n'.

1. Es sei

$$\zeta = \xi + \eta\sqrt{D} \quad (\eta \neq 0)$$

eines der zur Hauptklasse gehörigen Primideale des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$, dessen Norm p eine ungerade rationale, zu D teilerfremde Primzahl ist. Es ist bekanntlich: [1])

$$\frac{sn(\zeta u; k^2)}{sn(u; k^2)} = \frac{\zeta + a_1 x^2 + \cdots + a_{\frac{p-1}{2}} x^{p-1}}{1 + b_1 x^2 + \cdots + b_{\frac{p-1}{2}} x^{p-1}}, \quad [x = sn(u; k^2)]$$

[1]) Siehe Mertens III, 1. Abschnitt.

Digitized by Google

wo $a_1, a_2, \ldots a_{\frac{p-3}{2}}$, $b_1, b_2, \ldots b_{\frac{p-1}{2}}$ ganze durch ζ teilbare Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(k^2, \sqrt{D})$ sind und $a_{\frac{p-1}{2}} = e_p$ eine Einheit des Körpers bedeutet. Daraus folgt:

$$\frac{sn\,\zeta u}{sn\,u} \equiv e_p \,.\, sn^{p-1} u \pmod{\zeta}. \tag{21}$$

Analoge Überlegungen wie in § 2, 4, führen zur Kongruenz:

$$\zeta \,.\, 2^{2n} E_n \equiv e_p \,.\, \alpha_{2n}^{(p-1)} \pmod{\zeta}$$

oder, wenn man an Stelle von E_n die Partialbruchzerlegung (20) einführt und für ζ eine jener im Nenner von N_n aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ setzt, wofür $2n = r(p-1)$ ist:

$$\sigma \equiv e_p \,.\, \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \pmod{\zeta}, \tag{22}$$

wo σ den zu ζ gehörigen Zähler bedeutet.

Man kann diese Kongruenz noch auf einem anderen Wege ableiten. Setzt man nämlich in:

$$\frac{sn\,\zeta u}{sn\,u} \equiv e_p\, sn^{p-1}(u) \pmod{\zeta}$$

statt u $\zeta' u$, wo ζ' die zu ζ konjugierte Zahl des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$ bedeutet und $p = N\zeta = \zeta.\zeta'$ ist, und multipliziert mit der ganzzahligen Reihe:

$$\frac{sn\,\zeta' u}{sn\,u} = \frac{\zeta' + a_1' x^2 + \cdots}{1 + b_1' x^2 + \cdots},$$

so erhält man:

$$\frac{sn\,pu}{sn\,u} \equiv e_p \cdot \left(\frac{sn\,\zeta' u}{sn\,u}\right)^p \cdot sn^{p-1}(u) \pmod{n}.$$

Nun ist:

$$\left(\frac{sn\,\zeta' u}{sn\,u}\right)^p \equiv \zeta'^p \pmod{p},$$

daher:

$$\frac{sn\,pu}{sn\,u} \equiv e_p \,.\, \zeta'^p \,.\, sn^{p-1}(u) \pmod{\zeta}.$$

Hält man diese Kongruenz mit der im I. Teil abgeleiteten Kongruenz (9) zusammen, so folgt:

$$\zeta' \,.\, \sigma \equiv a_{\frac{p-1}{2}} \,.\, \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \equiv e_p \zeta'^p \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \pmod{\zeta}.$$

Digitized by Google

ζ ist ein der Hauptklasse von $\Omega(\sqrt{D})$ angehöriges Primideal, welches daher im Körper $\mathfrak{K}(k^2, \sqrt{D})$ in Primideale ersten Grades zerfällt, also:

$$\zeta'^p \equiv \zeta' \pmod{\zeta}.$$

Mithin folgt aus dem obigen:

$$\sigma \equiv e_p \,.\, \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \pmod{\zeta},$$

welche Kongruenz mit (22) übereinstimmt. Nebenbei folgt daraus:

$$a_{\frac{p-1}{2}} \equiv e_p \zeta' \pmod{\zeta}. \tag{23}$$

Mittels (12) läßt sich die zur Bestimmung von σ dienende Kongruenz in die folgende umformen:

$$\sigma \equiv -\, e_p \,.\, \alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \pmod{\zeta}, \tag{24}$$

wo $\alpha_{\frac{p-1}{2}}$ den Koeffizienten von $\frac{x^p}{p!}$ in der Entwicklung von $s\,n\,u$ bedeutet. Verschiedene spezielle Berechnungen dieser Koeffizienten $\alpha_{\frac{p-1}{2}}$ lassen folgenden Bau derselben vermuten [1]):

$$\alpha_{\frac{p-1}{2}} \equiv \sum_{\substack{\varkappa + 2i = \frac{p-1}{2} \\ i,\varkappa = 0,1,2,\ldots}} \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{i!\,\varkappa!\,i!} \{-(1+k^2)\}^{\varkappa} \,.\, k^{2i} \pmod{p}. \tag{25}$$

Der Summenausdruck auf der rechten Seite tritt auch als Koeffizient von $s\,n^{p-1}u$ in der Entwicklung von:

$$(s\,n'\,u)^{p-1} = \{1 - (1+k^2)\,s\,n^2\,u + k^2\,s\,n^4\,u\}^{\frac{p-1}{2}}$$

auf.

Es folgt ferner — analog wie ich es in der Arbeit über den Körper $\Omega(\sqrt{-2})$ ausgeführt habe — aus:

$$\frac{s\,n'\,\zeta\,u}{s\,n'\,u} \equiv s\,n'^{p-1}(u) \equiv \{1 - (1+k^2)\,x^2 + k^2\,x^4\}^{\frac{p-1}{2}} \pmod{\zeta},$$

wenn man beiderseits nach Potenzen von $x^2 = s\,n^2\,u$ entwickelt und die Koeffizienten von x^{p-1} vergleicht:

$$e_p \,.\, \zeta' \equiv \sum \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{i!\,\varkappa!\,i!} \{-(1+k^2)\}^{\varkappa} \,.\, k^{2i} \pmod{\zeta}$$

oder vermöge (25):

$$e_p \,.\, \zeta' \equiv \alpha_{\frac{p-1}{2}} \pmod{\zeta}.$$

[1]) Siehe E. Dintzl, l. c., S. 27

Digitized by Google

Dann wäre:

$$\sigma \equiv -e_p \{e_p \zeta'\}^{r-1} \pmod{\zeta}. \tag{26}$$

2. Man betrachte ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers $\Omega(\sqrt{D})$, welches nicht der Hauptklasse angehört, dessen Norm jedoch eine ungerade, zu D teilerfremde rationale Primzahl p ist. Es existiert dann im Körper $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$, ein Multiplikator $\mu(k^2, \sqrt{D})$, welcher in diesem Körper eine zu $\mathfrak{p}$ assoziierte, der Hauptklasse angehörende ganze Zahl ist und für welchen aus der Theorie der komplexen Multiplikation folgt:

$$\frac{sn(\mu u; \lambda^2)}{sn(u; k^2)} = \frac{a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_{\frac{p-1}{2}} x^{p-1}}{1 + b_1 x^2 + \cdots + b_{\frac{p-1}{2}} x^{p-1}} \quad [x = sn(u; k^2)].$$

Hiebei sind sämtliche Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_{\frac{p-3}{2}}, b_1, \ldots b_{\frac{p-1}{2}}$ durch μ teilbare ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(k^2\sqrt{D})$ und:

$$a_{\frac{p-1}{2}} = \frac{k^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{\lambda}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{sn(\mu u; \lambda^2)}{sn(u; k^2)} \equiv sn^{p-1}(u; k^2) \pmod{\mathfrak{p}}$$

und auf Grund analoger Schlüsse wie für die Primzahl ζ:

$$\alpha_n(\lambda^2) \cdot \frac{\zeta^{2n+1}}{2n+1} + \sum \alpha_i(\lambda^2) \cdot \frac{\zeta^{2i+1}}{2i+1} \cdot 2^{2k} E_k \equiv \alpha_{2n}^{(p-1)} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Da aber:

$$\alpha_n(\lambda^2) \equiv \alpha_n(k^{2p}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

ganzzahlig im Körper $\mathfrak{R}(k^2, \sqrt{D})$ ist, so gilt auch in diesem Falle die Kongruenz

$$\sigma \equiv \alpha_{r(p-1)}^{(p-1)} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Ebenso wie für Primideale, welche der Hauptklasse angehören, folgt auch hier:

$$\sigma \equiv -\alpha_{\frac{p-1}{2}}^{r-1} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Jedoch lassen sich die weiteren für die Primideale ζ durchgeführten Schlüsse nicht unmittelbar auf diesen Fall übertragen.

Digitized by Google

Über die von v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen.

Von Niels Nielsen in Kopenhagen.

I. Herleitung einer allgemeinen Rekursionsformel.

Es scheint ganz unbeachtet geblieben, daß Andreas v. Ettingshausen schon im Jahre 1827 die, ein halbes Jahrhundert später, von L. v. Seidel und M. A. Stern wiedergefundenen verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen entdeckt hat.

Der von v. Ettingshausen gegebene Beweis ist ein ganz elementarer, und zwar unter Zuhilfenahme der Prinzipien der Differenzenrechnung durchgeführt. Es ist indessen möglich, in sehr einfacher Weise eine höchst merkwürdige und sehr weitgehende Verallgemeinerung der oben erwähnten Formeln und ihrer später gefundenen Analogien herzuleiten.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir durch k eine positive ganze Zahl und setzen der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)} \\ \psi_k(\alpha) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

während speziell

$$\varphi_0(\alpha) = \psi_0(\alpha) = 1 \tag{2}$$

angenommen werden soll. Mit diesen Definitionen haben wir nunmehr die höheren Differenzen der beiden Fakultäten $\varphi_k(\alpha)$ und $\psi_k(\alpha)$ zu bestimmen.

Wird $k \geqq 1$ vorausgesetzt, so ergibt sich unmittelbar für die Differenzen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k(\alpha) &= \varphi_k(\alpha+1) - \varphi_k(\alpha) = -k\varphi_{k+1}(\alpha+1), \\ \Delta\psi_k(\alpha) &= \psi_k(\alpha+1) - \psi_k(\alpha) = k\psi_{k-1}(\alpha); \end{aligned}$$

durch Wiederholung dieser Operationen finden wir allgemein

$$\left.\begin{aligned} \Delta^n\varphi_k(\alpha) &= (-1)^n k(k+1)\ldots(k+n-1)\varphi_{k+n}(\alpha+n) \quad k \geqq 1 \\ \Delta^n\psi_k(\alpha) &= 0, \quad 0 \leqq k \leqq n-1 \\ \Delta^n\psi_k(\alpha) &= k(k-1)\ldots(k-n+1)\psi_{k-n}(\alpha), \quad k \geqq n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Digitized by Google

und es ist offenbar ohne Belang für die Gültigkeit der letzten dieser Formeln, daß für gewisse ganzzahlige Werte von α die letzten Glieder des Ausdrucks

$$\Delta^n \psi_k(\alpha) = \sum_{n=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \psi_k(\alpha + n - s), \quad k \geqq n$$

verschwinden.

Nach diesen Vorbemerkungen bilden wir aus der unendlichen Zahlenfolge

$$a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{4}$$

die bloß der Bedingung $a_0 \neq 0$ genügt, sonst aber ganz beliebig angenommen werden darf, die unendliche Folge ganzer Polynome

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots, \tag{5}$$

indem für jedes n

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!} \tag{6}$$

gesetzt wird; $f_n(x)$ ist daher genau n^{ten} Grades in x, und für $n \geqq 1$ ist immer

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x). \tag{7}$$

Weiter haben wir die beiden Polynome

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (m-q+\nu)!\, x^{n-\nu} f_{m+\nu+1}(x), \quad 0 \leqq q \leqq m \\ G(x) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (m+q+\nu)!\, x^{n-\nu} f_{m+\nu}(x), \quad 0 \leqq q \leqq n \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

wo q eine ganze Zahl bezeichnet, als lineare Funktionen der Elemente a_k der Zahlenfolge (5) zu ordnen.

Es liegt übrigens auf der Hand, daß eine beliebige der beiden Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ aus der anderen hergeleitet werden kann, falls q als eine negative ganze Zahl angenommen wird. Die folgenden Resultate zeigen aber deutlich, daß es am bequemsten ist, die beiden Definitionen in (8) zu benützen.

Bezeichnet nunmehr a_k ein beliebiges Element der Zahlenfolge (4), so kommt a_k im summatorischen Gliede von $F(x)$ in der Verbindung

$$(-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(m-q+\nu)!}{(m-k+\nu+1)!} a_k x^{m+n-k+1} \tag{9}$$

Digitized by Google

vor, wo jedoch für $k > m+1$

$$\nu \geqq k-m-1$$

angenommen werden muß, denn sonst enthält das betrachtete Glied nicht das Element a_k. In $G(x)$ finden wir in ähnlicher Weise im summatorischen Gliede

$$(-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(m+q+\nu)!}{(m+\nu-k)!}\, a_k\, x^{m+n-k}, \tag{10}$$

wo für $k > m$

$$\nu \geqq k-m$$

anzunehmen ist.

Da der Exponent der in (9) und (10) vorkommenden Potenzen von x von ν nicht abhängt, so entfließen wegen (3) die beiden folgenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \sum_{s=0}^{s=q} \frac{(n+q-s)!\,(m-q)!\,a_s\,x^{m+n-s+1}}{(q-s)!\,(m+n-s+1)!} + \\ + (-1)^n \sum_{s=0}^{s=m-q} (n+s)! \binom{m-q}{s} a_{n+q+s+1}\, x^{m-q-s} \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$G(x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=m+q} (n+s)! \binom{m+q}{s} a_{n-q+s}\, x^{m+q-s}. \tag{12}$$

In $F(x)$ sind also die Koeffizienten

$$a_{q+1},\ a_{q+2},\ \ldots,\ a_{n+q} \tag{13}$$

weggefallen, während $G(x)$ für $q \leqq n-1$ die Koeffizienten

$$a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_{n-q-1} \tag{14}$$

nicht enthalten kann; für $q = n$ enthält $G(x)$ aber sämtliche Koeffizienten a_k für $0 \leqq k \leqq m+n$.

Besonders interessant ist der Spezialfall, wo die Polynome $f_n(x)$ für jedes n der Funktionalgleichung

$$(-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x) \tag{15}$$

Genüge leisten; es ist nämlich in diesem Falle wegen (6) und (15)

$$(-1)^n f_n(-1) = a_n. \tag{16}$$

Wird daher in (11) und (12) $x = -1$ gesetzt, so entfließt der Satz:

Digitized by Google

Befriedigen die Polynome (5) für jedes n die Funktionalgleichung (15), so gelten für die Elemente a_k der Zahlenfolge (4) die beiden verkürzten Rekursionsformeln

$$\sum_{s=0}^{=\omega} (-1)^s (m+n-q-s)! \left[(-1)^n \binom{n}{s} + (-1)^m \binom{m-q}{s}\right] a_{m+n-s+1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=q} \frac{(-1)^s (n+q-s)!\,(m-q)!}{(q-s)!\,(m+n-s+1)!}\, a_s, \quad (17)$$

$$\sum_{s=0}^{s=\omega} (-1)^s (m+n+q-s)! \left[(-1)^n \binom{n}{s} - (-1)^m \binom{m+q}{s}\right] a_{m+n-s} = 0, \quad (18)$$

wo die Summationen linker Hand so weit auszudehnen sind, bis die dort vorkommenden Binomialkoeffizienten beide verschwinden.

Dieser Satz ist in der Tat höchst merkwürdig; denn gilt für jedes n die Funktionalgleichung (15), so ist die Zahlenfolge (4) vollständig bestimmt, wenn bloß eine der beiden Folgen

$$a_1\, a_3\, a_5 \ldots a_{2n+1} \ldots \quad (19)$$

$$a_0\, a_2\, a_4 \ldots a_{2n} \ldots \quad (20)$$

gegeben ist, und zwar so, daß das erste Element a_1 bezw. a_0 nicht gleich Null sein darf.

Ist die Zahlenfolge (19) gegeben, so werden die Elemente in (20) durch die Relationen

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2\,a_1, \\ (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\, a_{2n} - a_{2n+1}\right) &= \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s\, a_{2s+1}\, B_{n-s}}{(2n-2s)!} \end{aligned}\right\}, \quad (21)$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen bezeichnen, bestimmt. Umgekehrt erhalten wir aber, falls die Folge (20) gegeben ist,

$$(-1)^n\, a_{2n+1} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s\, a_{2s}\, T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{2n-2s+1}}; \quad (22)$$

hier bezeichnen die T_n die Tangentenkoeffizienten.[1])

[1]) Man vergleiche meine Noten in Nieuw Archief vor Wiskunde (2) Bd. 10, p. 154--160, 1912 und in Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaften zu Leipzig 1913, p. 5—6.

Digitized by Google

Die beiden Gleichungssysteme (21) und (22) sind äquivalent und ein beliebiges dieser Systeme stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dar, die von den Elementen a_k befriedigt werden muß, falls die Polynome $f_n(x)$, für jedes n, der Funktionalgleichung (15) genügen.

Es ist übrigens einleuchtend, daß die beiden Bedingungen (15) und (16), wegen (7), gleichbedeutend sind, wenn sie für jedes n gültig sind.

Was endlich die Anwendungen unserer beiden allgemeinen Formelpaare (11) und (12), (17) und (18) betrifft, so verzichten wir auf die Niederschreibung der überaus vielen speziellen Formeln; wir beschränken uns darauf, die Substitutionen für die a_k und die komplexe Variable x anzugeben und die gehörigen Quellenzitate anzuführen.

II. Bernoullische Funktionen und Zahlen.

Als erste Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Formeln wählen wir die Elemente der Zahlenfolge I, (19) als

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{2n+1} = 0, \tag{1}$$

und somit ist wegen I, (21)

$$a_0 = 1, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}; \tag{2}$$

in diesem Falle sind die Elemente der Funktionenfolge I, (5) die Bernoullischen Funktionen

$$B_0(x), \; B_1(x), \; B_2(x), \ldots, \; B_n(x), \ldots \tag{3}$$

Wie aus (1) und (2) deutlich hervorgeht, nehmen die so erhaltenen Formeln verschiedene Formen an, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade vorausgesetzt wird.

Wir betrachten die folgenden Spezialfälle:

1. Ist in I, (17) $q > 0$, so entfließen verkürzte Rekursionsformeln, die Bernoullische Zahlen mit dem Stellenzeiger

$$B_1, \; B_2, \; B_3, \ldots, \; B_\nu, \; B_{\nu+s+1}, \; B_{\nu+s+2} \ldots, \; B_{\nu+s+t} \tag{4}$$

enthalten. Ich vermute, daß diese Formeln diejenigen sind, die Haussner[1]) als von Saalschütz[2]) herrührend erwähnt.

2. Für $q = 0$ liefert I, (17) eine verkürzte Formel, die jedenfalls von Saalschütz[3]), beinahe gleichzeitig aber auch von

[1]) Göttinger Nachrichten 1893, p. 778.

[2]) Physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 1892. Die Arbeit ist im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik nicht erwähnt.

[3]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, p. 374—378; 1892.

Digitized by Google

Hermite[1]), gefunden worden ist; diese Formel enthält die Zahlen

$$B_\nu,\ B_{\nu-1},\ \ldots,\ B_s, \tag{5}$$

wo $s=\frac{1}{2}\nu$ oder $s=\frac{1}{2}(\nu-1)$ zu setzen ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.

3. Wird in I, (18) $q=0$ angenommen, so entfließen die von A. v. Ettingshausen[2]) entdeckten Formeln, von welchen L. v. Seidel[3]) ein halbes Jahrhundert später einen Spezialfall wiedergefunden hat, während Stern[4]) die allgemeinen Formeln aufs neue entdeckte.

Diese Formeln sind von demselben Charakter wie die in 2. erwähnten.

4. Die der Annahme $q>0$ entsprechenden Formeln I, (18) scheinen neu zu sein; sie sind etwas komplizierter als die vorhergehenden.

5. Setzen wir allgemein

$$f_n(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)B_{n+1}(x)-(n+2)\,B_{n+2}(x), \tag{6}$$

also

$$a_0=\frac{1}{4}-B_1,\ a_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}B_{n+1}}{(2n+1)!},\ a_{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+2)!}, \tag{7}$$

so entfließen wegen I, (17) und (18) ähnliche, doch nicht so einfache Formeln wie mit der Annahme 3.

Was endlich die Formeln I, (11) und (12) betrifft, so erwähnen wir unter Zuhilfenahme der Folgen (3) und (6) die folgenden Anwendungen:

6. $x=-\frac{1}{2}$; die Funktionswerte

$$B_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ B_0\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\ B_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n(2^{2n}-2)\,B_n}{(2n)!\,2^{2n}} \tag{8}$$

liefern weitere verkürzte Rekursionsformeln für die B_n.

7. $x=-\frac{1}{4}$ oder $x=-\frac{3}{4}$ wegen der Ausdrücke

---

[1]) Methesis (2) Bd. 5, Suppl. II, p. 1—7; 1895.

[2]) Vorlesungen über die höhere Mathematik. Bd. I, p. 284—285; Wien 1827. Das Lehrbuch ist auch bemerkenswert, weil es schon so früh die Euler-Maclaurinsche Summenformel mit Restglied angibt; s. p. 428.

[3]) Sitzungsberichte der kgl. bayerischen Akademie 1877, p. 157—187.

[4]) Göttinger Abhandlungen, Bd. 23; 1878.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} B_{2n}\left(-\frac{1}{4}\right) &= \qquad B_{2n}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n}-2)\, B_n}{(2n)!\, 2^{4n}} \\ B_{2n+1}\left(-\frac{1}{4}\right) &= -B_{2n+1}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{4n+2}} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

wo die E_n die Eulerschen Zahlen bezeichnen, entfließen verkürzte Rekursionsformeln für die B_n und die E_n.

8. Setzt man in I, (11) $q=0$, $x=a$, wo a eine positive ganze Zahl bezeichnet, so entfließt wegen

$$\nu!\left(B_{\nu+1}(a) - B_{\nu+1}(0)\right) = s_\nu(a) = \sum_{r=1}^{r=a} r^\nu \tag{10}$$

für $F(a)$ der Ausdruck

$$F(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} s_{m+\nu}(a) - \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} \frac{B_{m+\nu+1}(0)}{m+\nu+1}.$$

Wird daher $m+n=2p$ bezw. $m+n=2p-1$ gesetzt, so finden wir für die Summe

$$\alpha_{m,n}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} s_{m+\nu}(a) = \sum_{r=1}^{r=a-1} r^m (a-r)^n \tag{12}$$

die interessanten Formeln

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{m,n}(a) &= \frac{m!\, n!\, a^{2p-1}}{(2p+1)!} - \\ &\quad - (-1)^{n+p} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega-1}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s+1} + \binom{n}{2s+1}\right] \frac{B_{p-s}}{2p-2s} a^{2s+1} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{m,n}(a) &= \frac{m!\, n!\, a^{2p}}{(2p)!} - \\ &\quad - (-1)^{n+p} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s} - \binom{n}{2s}\right] \frac{B_{p-s}}{2p-2s} a^{2s} \end{aligned}\right\}$$

wo ω die größte der Zahlen m und n bezeichnet.

Glaisher[1]) hat den Spezialfall $m=n$ der ersten der Formeln (13) hergeleitet.

[1]) Quarterly Journal of Mathematics. Bd. 31, p. 241—247; 1899.

Digitized by Google

9. Wir erwähnen noch, daß die Raabesche[1]) Formel

$$B_n\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x^n}{n!}+\sum_{s=1}^{\leqq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s(2^{2s}-2)\,B_s}{(2s)!\,2^{2s}}\cdot\frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!} \tag{14}$$

unter Zuhilfenahme der Entwicklungen I, (11) und (12) verschiedene der vorhergehenden Formeln wiedergibt.

III. Eulersche Funktionen und Zahlen.

Als zweite Anwendung wählen wir die Elemente der Zahlenfolge I, (20) als

$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_{2n}=0, \tag{1}$$

und somit ist wegen I, (22)

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n\,T_{n+1}}{(2n+1)!\,2^{2n+2}}; \tag{2}$$

in diesem Falle sind die Elemente der Funktionsfolge I, (5) die Eulerschen Funktionen

$$E_0(x),\ E_1(x),\ E_2(x),\ldots,\ E_n(x),\ldots \tag{3}$$

Übrigens ist dieser Fall dem vorhergehenden so ähnlich, daß wir uns hier etwas kürzer fassen können.[2])

1. Ist in I, (17) $q>0$, so vermute ich, daß diese Formeln von Saalschütz gefunden worden sind.

2. Für $q=0$ rührt die verkürzte Formel I, (17) jedenfalls von Saalschütz her.

3. Wird in I, (18) $q=0$ angenommen, so entfließen die von Stern gegebenen Formeln, von welchen jedoch L. v. Seidel früher einen Spezialfall gefunden hat.

4. Die der Annahme $q>0$ entsprechenden Formeln I, (18) scheinen neu zu sein; sie sind etwas komplizierter als die in 3. betrachteten.

5. Setzen wir allgemein

$$f_n(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)E_{n+1}(x)-(n+2)\,E_{n+2}(x) \tag{4}$$

also

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n\,T_{n+1}}{(2n+1)!\,2^{2n+2}},\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1}\,T_{n+1}}{(2n)!\,2^{2n+2}}, \tag{5}$$

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 42, p. 355; 1851.

[2]) Wir wiederholen nicht die Zitationen der Arbeiten von Glaisher, Saalschütz, Seidel und Stern.

Digitized by Google

so entfließen wegen I, (17) und (18) ähnliche, doch nicht so einfache Formeln wie mit der Annahme 3.

Was die Formeln I, (11) und (12) betrifft, so erwähnen wir unter Zuhilfenahme der Folgen (3) und (4) die Anwendung.

6. $x = -\frac{1}{2}$; die Funktionswerte

$$E_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,\ E_0\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ E_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\,2^{2n+1}} \quad (6)$$

liefern verkürzte Rekursionsformeln, welche sowohl die Tangentenkoeffizienten als die Eulerschen Zahlen enthalten; die aus I, (12) für $q = 0$ hergeleiteten, speziellen Formeln dieser Art rühren von Stern her.

7. Setzt man in I, (12) $q = 0$, $x = a$, wo a eine positive ganze Zahl bezeichnet, so entfließen wegen

$$\nu!\left(E_\nu(a) - (-1)^a E_\nu(0)\right) = \sigma_\nu(a) = \sum_{r=0}^{r=a-1} (-1)^r (a-r)^\nu \quad (7)$$

für $G(a)$ der Ausdruck

$$G(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}\sigma_{m+\nu}(a) - \\ - (-1)^a \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}(m+\nu)!\,E_{m+\nu}(0). \quad (8)$$

Wird daher $m+n = 2p$ bezw. $m+n = 2p-1$ gesetzt, so finden wir für die Summe

$$\beta_{m,n}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu}\sigma_{m+\nu}(a) = \sum_{s=1}^{s=a-1} (-1)^{a-s} s^m (a-s)^n. \quad (9)$$

die Entwicklungen

$$\beta_{m,n}(a) = (-1)^{n+p+1} \sum_{s=0}^{\leqq\frac{\omega-1}{2}} (-1)^s \left(\binom{m}{2s+1} + (-1)^a \binom{n}{2s+1}\right) \frac{T_{p-s}}{2^{2p-2s}} a^{2s+1}$$

$$\beta_{m,n}(a) = (-1)^{n+p+1} \sum_{s=0}^{\leqq\frac{\omega}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s} - (-1)^a \binom{n}{2s}\right] \frac{T_{p-s}}{2^{2p-2s}} a^{2s}, \quad (11)$$

wo ω die größte der Zahlen m und n bezeichnet.

Glaisher hat ebenfalls den Spezialfall $m = n$ der Formel (10) hergeleitet.

Digitized by Google

8. Wir bemerken noch, daß die Entwicklung

$$E_n\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x^n}{n!\,2}+\sum_{s=1}^{\leqq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s E_s}{(2s)!\,2^{2s+1}}\cdot\frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!} \tag{12}$$

unter Zuhilfenahme der Formeln I, (11) und (12) für $x=-1$ verkürzte Reduktionsformeln für die Eulerschen Zahlen liefern, die aus I, (12) für $q=0$ hergeleiteten Formeln rühren von A. Radicke [1]) her.

IV. Weitere Methoden und Formeln.

Ohne auf Einzelheiten näher einzugehen bemerke ich, daß ich für das Polynom

$$f(x)=(x+\alpha)^n(x+1-\alpha)^p$$

die folgende Entwicklung nach Bernoullischen

$$\left.\begin{aligned} f(x)=&\frac{(-1)^n n!\,p!}{(n+p+1)!}(1-2\alpha)^{n+p+1}+\\ &+\sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s B_{n+p-s+1}(x+\alpha)-\\ &-\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s B_{n+p-s+1}(x-\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und nach Eulerschen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f(x)=&\sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s E_{n+p-s}(x+\alpha)+\\ &+\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s E_{n+p-s}(x-\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

hergeleitet habe. [2])

Diese Formeln in Verbindung mit den daraus durch wiederholte Differentiation nach x liefern durch Spezialisierungen der beiden komplexen Veränderlichen x und α sämtliche vorhergehende verkürzte Reduktionsformeln, die aus $G(x)$ und aus $F(x)$ für $q=0$ gefunden worden sind.

---

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 89, p. 257–261; 1880.

[2]) In der Abhandlung: Recherches une les nombres de Bernoulli et d'Euler, Mémoires de l'Académie Royale de Danemark 1913.

Digitized by Google

Für die Ultrakugelfunktion erster Art [1])

$$P^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s} \binom{\nu+n-s-1}{n-2s} (2x)^{n-2s}$$

gelten die Entwicklungen

$$(2\nu-2)\,P^{\nu,n}(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\nu=n} (-1)^s \binom{\nu+n-s-2}{n-s} \binom{2\nu+2n-s-2}{s+1} (n-s)!\, 2^{n-s} B_{n-s}(x) -$$

$$- \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s+1} \binom{\nu+n-s-2}{n-s} (n-2s-1)!\, 2^{n-2s-1} B_{n-2s-1}(x)$$

$$P^{\nu,n}(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\nu+n-s-1}{n-s} \binom{2\nu+2n-s-1}{s} (n-s)!\, 2^{n-s} E_{n-s}(x) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s} \binom{\nu+n-s-1}{n-s} (n-2s)!\, 2^{n-2s} E_{n-2s}(x)$$

Durch Spezialisierung der beiden komplexen Veränderlichen x und ν leitet man aus (3) und (4) verkürzte Rekursionsformeln für die B_n und die T_n her. Diese Formeln sind von derselben Natur wie die vorhergehenden, von ihnen aber doch ganz verschieden.

---

[1]) Man vergleiche meine Schrift: Théorie des fonctions métasphériques, p. 94—112; Paris 1911.

[2]) Vergl. meine Abhandlungen: Recherches sur les fonctions et les nombres de Bernoulli et d'Euler, die in Annales de l'Ecole Normale erscheint.

Digitized by Google

Über Haupttangenten spezieller windschiefer Regelflächen.

Von stud. math. **Anton Albert** in Prag.

1. Konstruktion des Haupttangentenhyperboloids für eine windschiefe Regelfläche vierten Grades mit einer Raumkurve dritter Ordnung als Doppelkurve oder mit einer dreifachen Geraden, die die einzige auf der Regelfläche vorhandene Leitgerade ist.

Wird eine der genannten windschiefen Regelflächen vierten Grades (Rfl.[4]) durch zwei projektive Punktreihen zweiten Grades K_1 und K_2 erzeugt, deren Felder bezw. Π_1 und Π_2 sind, so entspricht der Geraden $\Pi_1 \times \Pi_2 = \mathfrak{a}_2$ von Π_2 eine Gerade $\mathfrak{a}_1$ von Π_1 und der Geraden $\Pi_1 \times \Pi_2 = \mathfrak{b}_1$ von Π_1 eine Gerade $\mathfrak{b}_2$ von Π_2. Somit entspricht dem Punkt $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1 = x_1$ von Π_1 der Punkt $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_2 = x_2$ von Π_2. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$, x_1 und x_2 fallen nicht zusammen.

Ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ in Π_1, der K_1 in einem Punkte p_1 oskuliert und sein entsprechender $\mathfrak{K}_2$ in Π_2, der K_2 im entsprechenden Punkte p_2 oskuliert, werden durch die Felder Π_1 und Π_2 so projektiv aufeinander bezogen, daß sie eine Rfl.[4] $[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]$ erzeugen, die wieder nur eine Rfl.[4] mit kubischer Raumkurve (Rk.[3]) als Doppelkurve oder mit dreifacher Geraden als einziger Leitgeraden sein kann und die die Rfl.[4] $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\overline{p_1 p_2} = \mathfrak{p}$ oskuliert. Geht $\mathfrak{K}_1$ durch x_1, also $\mathfrak{K}_2$ durch x_2, so ist $\overline{x_1 x_2} = \Pi_1 \times \Pi_2$ eine Erzeugende der Rfl.[4] $[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]$. Schneiden sich $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ außerdem noch in einem Punkte m von $\overline{x_1 x_2}$, so erzeugen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ eine Rfl.[4] mit dreifacher Geraden, die durch m geht und Haupttangente der Rfl.[4] $[K_1, K_2]$ ist.

Wenn man $\mathfrak{K}_1$ variiert, ändert sich entsprechend $\mathfrak{K}_2$. So erhält man in Π_1 ein Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_1)$, das K_1 in p_1 oskuliert und x_1 als vierten Grundpunkt hat und entsprechend in Π_2 ein Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_2)$, das K_2 in p_2 oskuliert und x_2 als vierten Grundpunkt hat.

Die Tangente in p_1 an K_1 heiße $\mathfrak{t}_1$, die Tangente in p_2 an K_2 entspricht $\mathfrak{t}_1$ und heiße $\mathfrak{t}_2$. Das Geradenpaar $\mathfrak{t}_1$, $\overline{x_1 p_1}$ ist der degenerierte Kegelschnitt von $(\mathfrak{K}_1)$ und das entsprechende Geradenpaar $\mathfrak{t}_2$, $\overline{x_2 p_2}$ der degenerierte Kegelschnitt von $(\mathfrak{K}_2)$.

Digitized by Google

$\mathfrak{b}_1$ wird von $\mathfrak{K}_1$ außer in x_1 noch in einem Punkte b_1 und von $\mathfrak{t}_1$ in einem Punkte b_1^0 geschnitten. Entsprechend wird $\mathfrak{b}_2$ von $\mathfrak{K}_2$ außer in x_2 noch in einem Punkte b_2 und von $\mathfrak{t}_2$ in einem Punkte b_2^0 geschnitten. Die Gerade $\mathfrak{a}_2$ wird von $\mathfrak{K}_2$ außer in x_2 noch in einem Punkte a_2 und von $\mathfrak{t}_2$ in einem Punkte a_2^0 geschnitten.

Da die Punktreihe $\mathfrak{b}_1(b_1^0, b_1, \ldots)$ in Π_1 der Punktreihe $\mathfrak{b}_2(b_2^0, b_2, \ldots)$ in Π_2 entspricht, ist $\mathfrak{b}_1(b_1^0, b_1, \ldots) \overline{\wedge} \mathfrak{b}_2(b_2^0, b_2, \ldots)$ und weil $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}_2$ durch den Grundpunkt x_2 des Büschels $(\mathfrak{K}_2)$ gehen, ist $\mathfrak{b}_2(b_2^0, b_2 \ldots) \overline{\wedge} \mathfrak{a}_2(a_2^0, a_2, \ldots)$. Somit ist auch $\mathfrak{b}_1(b_1^0, b_1, \ldots) \overline{\wedge} \mathfrak{a}_2(a_2^0, a_2, \ldots)$. In jedem der Doppelpunkte m und n dieser konlokalen projektiven Punktreihen schneiden sich zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel $(\mathfrak{K}_1)$ und $(\mathfrak{K}_2)$, die eine Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ längs $\mathfrak{p}$ oskulierende Rfl.^{4} mit dreifacher Geraden erzeugen. Die dreifache Gerade geht durch den jeweiligen Doppelpunkt und ist Haupttangente der Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ in einem Punkte von $\mathfrak{p}$.

Der Kegelschnitt H_1, der durch m und n geht und K_1 in p_1 oskuliert, der Kegelschnitt H_2, der durch m und n geht und K_2 in p_2 oskuliert und die Erzeugende $\mathfrak{p}$ bestimmen das Haupttangenten-Hyperboloid der Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$.

2. Ausgezeichnete Haupttangenten.

Da vier windschiefe Geraden entweder zwei oder lauter gemeinsame Transversale haben, so gibt es auch für vier unendlich benachbarte Erzeugende einer windschiefen Regelfläche entweder zwei oder lauter solche gemeinsame Transversale, die „ausgezeichnete Haupttangenten“ heißen mögen.

Man sieht, daß erst bei den Rfln. vom Grad $n \geqq 4$ eigentliche ausgezeichnete Haupttangenten auftreten können, da eine Gerade, die mit einer Fläche zweiter oder dritter Ordnung vier Punkte gemeinsam hat, ganz auf der Fläche liegen muß.

Bei den Rfln.^{2} sind die Erzeugenden der einen Schar ausgezeichnete Haupttangenten für die Erzeugenden der anderen Schar und bei den Rfln.^{3} sind die Leitgeraden die ausgezeichneten Haupttangenten für alle Erzeugenden.

Man erkennt allgemein:

Besitzt eine Rfl.^{n} ein Haupttangenten-Hyperboloid, das $m \geqq 3$ unendlich benachbarte Erzeugende mit der Rfl.^{n} gemeinsam hat, so gibt es ausgezeichnete Haupttangenten, die wenigstens $(m+1)$ unendlich benachbarte Punkte mit der Rfl.^{n} gemein haben. Ist $m < n$, so gibt es entweder zwei oder lauter derartige aus-

Digitized by Google

gezeichnete Haupttangenten; ist $m = n$, so besitzt die Rfl.^{n} zwei Leitgerade; $m > n$ ist dagegen nur bei $n = 2$ möglich.

Konstruktion der ausgezeichneten Haupttangenten für eine Erzeugende einer Rfl.^{4} mit Rk.^{3} als Doppelkurve oder mit dreifacher Geraden als einziger Leitgeraden.

Es sollen die ausgezeichneten Haupttangenten für eine Erzeugende $\overline{p_1 p_2} = \mathfrak{p}$ konstruiert werden, wenn die Rfl.^{4} wie früher durch die projektiven Punktreihen zweiten Grades K_1 und K_2 erzeugt wird und Π_1 bezw. Π_2 die Felder von K_1 bezw. K_2 sind. Es sei bereits das Haupttangenten-Hyperboloid längs $\mathfrak{p}$ konstruiert und H_1 und H_2 seien die in den Ebenen Π_1 bezw. Π_2 liegenden Kegelschnitte des Haupttangenten-Hyperboloids, die sich in den Punkten m und n der Geraden $\overline{\Pi_1 \times \Pi_2}$ schneiden und mit der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ das Haupttangenten-Hyperboloid bestimmen. Die ausgezeichneten Haupttangenten gehören dem Haupttangenten-Hyperboloid an.

Es sei im Feld Π_1 ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ eingezeichnet, der K_1 in p_1 hyperoskuliert und im Feld Π_2 der entsprechende Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$, der K_2 in p_2 hyperoskuliert. $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ werden durch Π_1 und Π_2 so projektiv aufeinander bezogen, daß sie entweder eine Rfl.^{4} mit Rk.^{3} als Doppelkurve oder mit dreifacher Geraden als einziger Leitgeraden erzeugen. $\mathfrak{K}_1$ oskuliert zugleich H_1 in p_1 und schneidet H_1 noch in einem Punkt h_1 und $\mathfrak{K}_2$ oskuliert zugleich H_2 in p_2 und schneidet H_2 noch in einem Punkt h_2.

Variiert man nun den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ so, daß er fortwährend K_1 in p_1 hyperoskuliert, so beschreibt er ein Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_1)$, das H_1 in p_1 oskuliert und in einer Punktreihe (h_1) schneidet, die aus p_1 auf die Gerade $\overline{\Pi_1 \times \Pi_2}$ projiziert, eine Punktreihe (h_1^*) liefert. Gleichzeitig ändert sich entsprechend der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$ so, daß er fortwährend K_2 in p_2 hyperoskuliert und ein Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_2)$ beschreibt, das H_2 in p_2 oskuliert und in einer Punktreihe (h_2) schneidet, die aus p_2 auf die Gerade $\overline{\Pi_1 \times \Pi_2}$ projiziert, eine Punktreihe (h_2^*) liefert.

Es ist $(h_1) \overline{\wedge} (h_2)$. Denn: Dem Kegelschnitt H_1 in Π_1 entspricht in Π_2 ein Kegelschnitt H_2', der vom Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}_2)$ in p_2 oskuliert und in einer der Punktreihe (h_1) entsprechenden Punktreihe (h_2') geschnitten wird. Es ist also $(h_1) \overline{\wedge} (h_2')$. Da die beiden Kegelschnitte H_2' und H_2 durch drei Grundpunkte des Kegelschnittbüschels $(\mathfrak{K}_2)$ gehen, sind die Punktreihen (h_2') und (h_2), nach welchen H_2' und H_2 von $(\mathfrak{K}_2)$ geschnitten werden, projektiv. Aus $(h_1) \overline{\wedge} (h_2')$ und $(h_2') \overline{\wedge} (h_2)$ folgt $(h_1) \overline{\wedge} (h_2)$, was zu beweisen war.

Mithin sind auch die konlokalen Punktreihen (h_1^*) und (h_2^*) projektiv. μ^* und ν^* seien ihre Doppelpunkte. Diesen entsprechen in der Punktreihe (h_1) die Punkte μ_1 und ν_1 und in der Punkt-

Digitized by Google

reihe (h_2) die Punkte μ_2 und ν_2. Somit entsprechen einander der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mu_1}$ des Büschels $(\mathfrak{K}_1)$, der durch μ_1 geht und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\mu_2}$ des Büschels $(\mathfrak{K}_2)$, der durch μ_2 geht und werden durch Π_1 und Π_2 so projektiv aufeinander bezogen, daß sie eine Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ erzeugen, die die Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ hyperoskuliert. Ebenso entsprechen einander der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\nu_1}$ des Büschels $(\mathfrak{K}_1)$, der durch ν_1 geht und der Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{\nu_2}$ des Büschels $(\mathfrak{K}_2)$, der durch ν_2 geht und werden durch die Felder Π_1 und Π_2 so projektiv aufeinander bezogen, daß sie eine Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\nu_1}, \mathfrak{K}_{\nu_2}]$ erzeugen, die die Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ hyperoskuliert.

Die Geraden $\overline{\mu_1 \mu_2} = \mathfrak{m}$ und $\overline{\nu_1 \nu_2} = \mathfrak{n}$ sind Haupttangenten der Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$, zugleich aber auch der Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ und der Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\nu_1}, \mathfrak{K}_{\nu_2}]$. Da aber $\mathfrak{m}$ mit der Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ außer drei unendlich benachbarten Punkten noch die Punkte μ_1 und μ_2, also fünf Punkte gemeinsam hat, muß $\mathfrak{m}$ ganz auf der Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ liegen, d. h. die Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ ist eine Rfl.^{4} mit $\mathfrak{m}$ als dreifacher Geraden und zugleich einziger Leitgeraden. Dasselbe gilt für $\mathfrak{n}$ in bezug auf die Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\nu_1}, \mathfrak{K}_{\nu_2}]$, d. h. die Rfl.^{4} $[\mathfrak{K}_{\nu_1}, \mathfrak{K}_{\nu_2}]$ ist ebenfalls eine solche Rfl.^{4} mit dreifacher Geraden als einziger Leitgeraden. Da die Rfln.^{4} $[\mathfrak{K}_{\mu_1}, \mathfrak{K}_{\mu_2}]$ und $[\mathfrak{K}_{\nu_1}, \mathfrak{K}_{\nu_2}]$ die Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ hyperoskulieren, sind $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die ausgezeichneten Haupttangenten der Rfl.^{4} $[K_1, K_2]$ für die Erzeugenden $\mathfrak{p}$.

Für die Durchführung dieser Konstruktion ist es von Vorteil zu berücksichtigen, daß schon K_1 ein Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{K}_1)$ ist, dem K_2 im Büschel $(\mathfrak{K}_2)$ entspricht und daß die Tangente t_1 in p_1 an K_1 der ausgeartete Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{K}_1)$ ist, dem im Büschel $(\mathfrak{K}_2)$ die Tangente t_1 in p_2 an K_2 entspricht.

Konstruktion der ausgezeichneten Haupttangenten für eine Erzeugende einer Rfl.^{4} mit einer Doppelgerade und einem Doppelkegelschnitt.

Eine solche Rfl.^{4} sei erzeugt durch zwei projektive Punktreihen zweiten Grades K_1 und K_2, deren Felder bezw. Π_1 und Π_2 heißen mögen. In der Schnittlinie $\overline{\Pi_1 \times \Pi_2}$ von Π_1 und Π_2 fällt eine Gerade $\mathfrak{b}_1$ von Π_1 mit einer Geraden $\mathfrak{a}_2$ von Π_2 zusammen. Der Geraden $\mathfrak{a}_2$ von Π_2 entspricht eine Gerade $\mathfrak{a}_1$ von Π_1 und der Gerade $\mathfrak{b}_1$ von Π_1 entspricht eine Gerade $\mathfrak{b}_2$ von Π_2. Daher entspricht dem Punkt $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{b}_1 = x_1$ der Punkt $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_2 = x_2$. Weil K_1 und K_2 eine Rfl.^{4} mit einer Doppelgerade und einem Doppelkegelschnitt erzeugen, fällt x_1 mit x_2 zusammen.

Da diese Rfl.^{4} nur eine Leitgerade enthält, kann es kein Haupttangenten-Hyperboloid geben, das mit der Rfl.^{4} vier unendlich benachbarte Erzeugende gemeinsam hat.

Die Doppelgerade ist schon ausgezeichnete Haupttangente für alle Erzeugenden; es bleibt also für jede Erzeugende nur noch eine ausgezeichnete Haupttangente zu konstruieren übrig. Einem Punkt p_1

Digitized by Google

von K_1 entspricht ein Punkt p_2 von K_2. Für die Erzeugende $p_1 p_2 = \mathfrak{p}$ soll die ausgezeichnete Haupttangente konstruiert werden.

Legt man durch x_1 einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, der K_1 in p_1 hyperoskuliert und entsprechend durch $x_2 = x_1$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$, der K_2 in p_2 hyperoskuliert, so werden $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ durch Π_1 und Π_2 so projektiv aufeinander bezogen, daß sie eine Rfl.[3] $[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]$ erzeugen, die die Rfl.[4] $[K_1, K_2]$ längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ hyperoskuliert. Die einfache Leitgerade dieser Rfl.[3] $[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]$ fällt, wie man aus den Feldern Π_1 und Π_2 erkennt, mit der Doppelgeraden der Rfl.[4] $[K_1 K_2]$ zusammen und die Doppelgerade der Rfl.[3] $[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]$ liefert die eigentliche ausgezeichnete Haupttangente der Rfl.[4] $[K_1, K_2]$ für die Erzeugende $\mathfrak{p}$.

Die ausgezeichneten Haupttangentenhyperboloide einer Rfl.[4] mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden.

Eine solche Rfl.[4] sei erzeugt durch einen Kegelschnitt K und zwei Gerade $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ als Leitlinien.[1]) Die Frage nach den ausgezeichneten Haupttangenten für eine beliebige Erzeugende ist von vornherein durch die Kenntnis der beiden Doppelgeraden $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ erledigt. Dagegen tritt hier die Frage nach etwaigen ausgezeichneten Haupttangenten-Hyperboloiden auf — wenn man unter einem ausgezeichneten Haupttangenten-Hyperboloid ein solches Haupttangenten-Hyperboloid versteht, dessen Erzeugende der Haupttangentenschar sämtlich ausgezeichnete Haupttangenten der Rfl. sind — denn bei einer Rfl. mit zwei Leitgeraden ist deren Existenz nicht ausgeschlossen.

Der Durchstoßpunkt von $\mathfrak{d}_1$ durch die Ebene Π von K heiße d_1, der von $\mathfrak{d}_2$ heiße d_2.[2]) Gelingt es in Π durch d_1 und d_2 einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ so zu legen, daß er K in einem Punkte hyperoskuliert, so ist das durch $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{K}$ als Leitlinien bestimmte Hyperboloid ein ausgezeichnetes Haupttangenten-Hyperboloid der Rfl.[4]. Da die Aufgabe, einen durch die beiden Punkte d_1 und d_2 gehenden und den Kegelschnitt K hyperoskulierenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zu finden, vier mit Zirkel und Lineal konstruierbare Lösungen hat, gibt es bei einer Rfl.[4] mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden vier mit Zirkel und Lineal konstruierbare ausgezeichnete Haupttangenten-Hyperboloide.

Fläche der ausgezeichneten Haupttangenten einer Rfl.[4] mit Rk.[3] als Doppelkurve.

Bei einer Rfl. bilden alle ausgezeichneten Haupttangenten wieder eine Rfl., die die gegebene Rfl. längs einer Kurve hyperoskuliert und ihre Torsallinien wieder als Torsallinien besitzt.

Eine Erzeugende einer Rfl.[4] mit Rk.[3] als Doppelkurve trifft acht, und nur acht ausgezeichnete Haupttangenten (zweimal vier

[1]) $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ sind windschief und können 1. reell, 2. imaginär oder 3. unendlich benachbart sein.

[2]) d_1 und d_2 liegen auf der Doppelerzeugenden und sind entsprechend [1]), 1. reell, 2. imaginär oder 3. unendlich benachbart.

Digitized by Google

unendlich benachbarte). Die Fläche der ausgezeichneten Haupttangenten einer Rfl.^{4} mit Rk.^{3} als Doppelkurve ist also eine Rfl. achten Grades. Der Schnitt dieser Rfl.^{8} mit der gegebenen Rfl.^{4} ist von der 32ten Ordnung. Die Flächen berühren sich aber längs der vier Torsallinien der Rfl.^{4}, was schon einem Teilschnitt achter Ordnung gleichkommt. Man findet, daß die Kurve, längs welcher sich die Rfl.^{4} und die Rfl.^{8} hyperoskulieren, von der sechsten Ordnung ist, wenn man berücksichtigt, daß sie im Schnitt der Rfl.^{4} mit der Rfl.^{8} vierfach zu zählen ist.

Bei einer Rfl.^{4} mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden zerfällt die Fläche der ausgezeichneten Haupttangenten in die vier ausgezeichneten Haupttangenten-Hyperboloide.

3. Haupttangentenkurven windschiefer Regelflächen dritten Grades.

Gegeben sei eine Rfl.^{3} mit zwei nicht zusammenfallenden Leitgeraden und reellen Torsallinien: Eine Gerade l_2 sei die Doppelgerade, eine zu l_2 windschiefe Gerade l_1 die einfache Leitgerade, $\mathfrak{t}_1$ eine Torsallinie mit dem Spitzpunkte s_1, $\mathfrak{t}_2$ die zweite Torsallinie mit dem Spitzpunkte s_2. l_1 schneidet $\mathfrak{t}_1$ in σ_1 und $\mathfrak{t}_2$ in σ_2. Nimmt man noch eine Erzeugende $\mathfrak{p} = \overline{p_1 p_2}$ an, die l_1 in p_1 und l_2 in p_2 schneidet, so ist die Rfl.^{3} eindeutig bestimmt. Die Gerade $\overline{s_1 \sigma_2}$ heiße $\mathfrak{f}_1$ und die Gerade $\overline{s_2 \sigma_1}$ heiße $\mathfrak{f}_2$.

Durch die Torsallinen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ als Erzeugende der einen Schar (t-Schar), die Geraden $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ als Erzeugende der anderen Schar (f-Schar) und einen Punkt p von $\mathfrak{p}$ ist ein Hyperboloid [t, f] bestimmt. Die durch p gelegte Transversale t von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ gehört zur t-Schar und die durch p gelegte Transversale f von $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ gehört zur f-Schar. Durch den Punkt p geht eine Haupttangentenkurve der Rfl.^{3} die vom Hyperboloid [t, f] aus der Rfl.^{3} ausgeschnitten wird. Dies soll nun bewiesen werden.

t schneide $\mathfrak{f}_1$ in k_1 und $\mathfrak{f}_2$ in k_2, f schneide $\mathfrak{t}_1$ in t_1 und $\mathfrak{t}_2$ in t_2. Die Geraden $\overline{k_1 t_1}$ und $\overline{k_2 t_2}$ schneiden beide die Gerade l_1 in einem Punkte σ^0 und die Geraden $\overline{k_1 t_2}$ und $\overline{k_2 t_1}$ schneiden beide die Gerade l_2 in einem Punkte s^0. Weiter schneiden sich die Geraden $\overline{p_2 t_1}$ und $\overline{p_1 t_2}$ in einem Punkte k_2^0 von $\mathfrak{f}_2$ und die Geraden $\overline{p_1 t_1}$ und $\overline{p_2 t_2}$ in einem Punkte k_1^0 von $\mathfrak{f}_1$.

Da es nur einen einzigen Punkt p^0 gibt, der von p durch t_1 und t_2 harmonisch getrennt wird, so erkennt man aus dem Viereck mit den Eckpunkten p_1, t_1, p_2 und t_2 und dem Viereck mit den

Digitized by Google

Eckpunkten k_1, t_1, k_2 und t_2, daß sich die Geraden $\overline{\sigma^0 s^0} = \mathfrak{p}^0$ und $\overline{k_1^0 k_2^0} = \mathfrak{t}^0$ im Punkte p^0 von $\mathfrak{k}$ schneiden.

Die Ebene $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{k}}$ schneidet die Rfl.^{3} außer in der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ noch in einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch die Punkte p_2, t_1 und t_2 geht, und für welchen $\mathfrak{k}$ die Polare von p_1 ist. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}$ sind also konjugierte Gerade in bezug auf $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{p}$ schneidet $\mathfrak{K}$ außer in p_2 noch in einem Punkte π, dem Berührungspunkte der Ebene $\overline{\mathfrak{p}\,\mathfrak{k}}$. Die Tangente $\mathfrak{h}_\pi$ in π an $\mathfrak{K}$ ist Haupttangente der Rfl.^{3} und muß nach obigem $\mathfrak{k}$ im Punkte p^0 schneiden.

Durch die Haupttangenten $\mathfrak{h}_\pi$, l_1 und l_2 ist das Haupttangenten-Hyperboloid längs der Erzeugenden $\mathfrak{p}$ bestimmt. Die Durchstoßpunkte der Haupttangenten $\mathfrak{h}_\pi$, l_1 und l_2 durch die Ebene $\overline{\mathfrak{t}\,\mathfrak{k}}$ sind bezw. die Punkte p^0, σ^0 und s^0, die alle drei auf der Geraden $\mathfrak{p}^0$ liegen. Die Gerade $\mathfrak{p}^0$ ist daher eine Erzeugende der Nicht-Haupttangentenschar des Haupttangenten-Hyperboloids längs $\mathfrak{p}$. Es muß also in der Ebene $\overline{\mathfrak{t}\,\mathfrak{k}}$ noch eine Erzeugende der Haupt-Tangentenschar des Haupttangenten-Hyperboloids liegen und das muß eben die Haupttangente $\mathfrak{h}_p$ des Punktes p sein, da die Ebene $\overline{\mathfrak{t}\,\mathfrak{k}}$ durch p geht.

Der Punkt p ist ein Punkt der Durchdringungskurve des Hyperboloids $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ und der Rfl.^{3}. Die Tangentialebene $\overline{\mathfrak{t}\,\mathfrak{k}}$ des Hyperboloids $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ im Punkte p enthält die Haupttangente $\mathfrak{h}_p$ des Punktes p, schneidet also die Tangentialebene der Rfl.^{3} im Punkte p nach der Haupttangente $\mathfrak{h}_p$ des Punktes p. Dies gilt für jeden beliebigen Punkt der Durchdringungskurve der Rfl.^{3} mit dem Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$, daher sind die Tangenten in allen Punkten der Durchdringungskurve an diese Kurve Haupttangenten der Rfl.^{3}; d. h.: das Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ schneidet die Rfl.^{3} nach einer Haupttangentenkurve.

Die Haupttangentenkurve ist von der vierten Ordnung, da die Torsallinien $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ ein Teilschnitt von der zweiten Ordnung sind. Die Erzeugenden der $\mathfrak{k}$-Schar des Hyperboloids $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ sind einfache Sekanten der Haupttangentenkurve, da zwei Durchstoßpunkte jeder von ihnen durch die Rfl.^{3} dem Teilschnitt t_1, t_2 angehören. Die Erzeugenden der $\mathfrak{t}$-Schar hingegen sind Trisekanten der Haupttangentenkurve, da jede von ihnen drei Punkte mit der Rfl.^{3} gemein hat, von denen keiner dem Teilschnitt t_1, t_2 angehört. Eine Haupttangentenkurve einer Rfl.^{3} mit zwei nicht zusammenfallenden Leitgeraden ist also eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art, die von ihrem Trisekanten-Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ aus der Rfl.^{3} ausgeschnitten wird. Die Torsallinien $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ tangieren die Haupttangentenkurve in den Spitzpunkten s_1 bezw. s_2 der Rfl.^{3}. Da l_1 und l_2 konjugierte Gerade in bezug auf das Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$

Digitized by Google

sind, so gehört der von p durch p_1 und p_2 harmonisch getrennte Punkt p' der Haupttangentenkurve an.

Die Paare sich schneidender Erzeugenden dieser Rfl.^{3} bilden auf der einfachen Leitgeraden l_1 eine Involution, deren Doppelpunkte σ_1 und σ_2 sind. Der von p_1 durch σ_1 und σ_2 harmonisch getrennte Punkt q_1 fällt mit σ^0 zusammen. Es ist daher auch $\overline{p_2\,\sigma^0} = p_2\,q_1 = \mathfrak{q}$ eine Erzeugende der Rfl.^{3} Die Ebene $\mathfrak{p}\,\overline{\mathfrak{q}}$ geht durch l_1 und schneidet das Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ nach einem Kegelschnitt K, der durch die Punkte p, p', σ_1 und σ_2 geht, dessen Tangenten in p und p' durch $\sigma^0 = q_1$ gehen und dessen Tangenten in σ_1 und σ_2 durch p_2 gehen. Das Dreieck mit den Eckpunkten $\sigma^0 = q_1$, p_1 und p_2 ist also ein Polardreieck von K, dessen Seite $\overline{p_2\,q_1} = \mathfrak{q}$ den Kegelschnitt K, somit auch das Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ in zwei imaginären Punkten schneidet. Nennt man alle Erzeugenden der Rfl.^{3}, die man erhält, wenn man $\mathfrak{p}$ auf der Rfl.^{3} so bewegt, daß es nie durch die Torsallinien gleitet, die $\mathfrak{p}$-Schar, die andere die $\mathfrak{q}$-Schar, so schneidet das Trisekanten-Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ einer Haupttangentenkurve entweder alle Erzeugenden der $\mathfrak{p}$-Schar in reellen Punkten und die der $\mathfrak{q}$-Schar in imaginären, oder umgekehrt. Es gibt also zwei Arten von Haupttangentenkurven auf einer Rfl.^{3} mit zwei nicht zusammenfallenden Leitgeraden.

Hätte man l_1 als Doppelgerade und l_2 als einfache Leitgerade angenommen, während man die übrigen Angaben unverändert beibehalten hätte, so würde man eine zweite Rfl.^{3} erhalten haben, aus welcher dasselbe Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ ebenfalls eine Haupttangentenkurve ausgeschnitten hätte.

Außer l_1 und l_2 sind in bezug auf das Hyperboloid $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ auch $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^0$ konjugierte Gerade. Die Punktepaare p_1, σ^0 und p_2, s^0 beschreiben bei variablem $\mathfrak{p}$ entsprechende Involutionen mit den Doppelpunkten σ_1 und σ_2 bezw. s_1 und s_2, die entweder alle reell oder alle imaginär sind. Die Fläche $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ ist daher auch ein windschiefes Hyperboloid, wenn die Rfl.^{3} imaginäre Torsallinien hat.

Es sei nun eine allgemeine Rfl.^{3} erzeugt mittels des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, der ihn schneidenden Geraden l_2 und der weder $\mathfrak{K}$ noch l_2 schneidenden Geraden l_1 als Leitkurven. In der Ebene von $\mathfrak{K}$ liegt die Erzeugende $\mathfrak{p}$, deren Pol in bezug auf $\mathfrak{K}$ der Punkt p^0 ist. Geht man von dieser allgemeinen Rfl.^{3} zu einer Cayleyschen Rfl.^{3} über, indem man die Gerade l_1 unendlich nahe an l_2 heranrückt, doch so, daß sie dabei $\mathfrak{p}$ schneidet, so sieht man, daß jede Haupttangentenkurve in die Gerade $l_1 = l_2$ und eine kubische Raumkurve zerfällt, welche aus dem Spitzpunkt der Cayleyschen Rfl.^{3} auf die Ebene von $\mathfrak{K}$ projiziert, einen Kegelschnitt $\mathfrak{H}$ liefert, der p^0 und $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{K}$ als Pol und Polare gemeinsam hat und der $\mathfrak{K}$ im Punkte $\mathfrak{p} \times l_2$ berührt.

Digitized by Google

Ein Satz über Summen Jacobi-Legendrescher Zeichen.

Von **Hugo Schwendenwein** in Klagenfurt.

P. G. Lejeune Dirichlet hat den Satz bewiesen:

„Ist $P = 4n + 3$ eine ganze, positive, durch kein Quadrat, die Einheit ausgenommen, teilbare Zahl, so ist die Summe $\sum\left(\frac{s}{P}\right)$ eine positive Zahl, wenn s die Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots \frac{P-1}{2}$ durchläuft."

Diesem Satze, der eine Eigenschaft der ungeraden Zahlen von der Form $4n + 3$ feststellt, die den Zahlen von der Form $4n + 1$ nicht zukommt, läßt sich der folgende, der eine beiden Zahlformen gemeinsame Eigenschaft ausspricht, zur Seite stellen:

„Ist z eine positive, ungerade, durch kein Quadrat, die Einheit ausgenommen, teilbare Zahl, so ist $\sum\left(\frac{s}{z}\right)$ eine positive Zahl, wenn in dieser Summe s das erste Drittel der Zahlen 1 bis z durchläuft."

Beweis: Wir setzen erstens voraus, die Zahl $P = 4n + 3$ sei durch 3 nicht teilbar, also von der Form $3\nu + 1$ oder $3\nu + 2$. Suchen wir eine Gleichung für die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s.$$

Durchläuft s die Zahlen $1, 2, 3, \ldots P-1$, so sind die ersten ν-Zahlen kleiner als P und daher bezüglich P die kleinsten positiven Reste, sie mögen s' heißen, die letzten ν-Zahlen geben zum Quotienten 2 und die Reste $P-3$, $P-2.3, \ldots P-3\nu$, wir bezeichnen diese Reste mit s''', die übrigen geben zu Quotienten 1 und zu Resten die Zahlen s''; dabei erfüllen die Zahlen s', s'' und s''' zusammen den Komplex der Zahlen $1, 2, \ldots P-1$. Man kann somit die Gleichung anschreiben

$$\sum_{s=1}^{=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s = \sum\left(\frac{s'}{P}\right)s' + \sum\left(\frac{s''+P}{P}\right)(s''+P) + \sum\left(\frac{s'''+2P}{P}\right)(s'''+2P)$$

Digitized by Google

oder

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s=\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s'+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)s''+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)s'''+P\left[\sum\left(\frac{s''}{P}\right)+2\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)\right]$$

Weil aber

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{3s}{P}\right)3s=3\left(\frac{3}{P}\right)\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s;$$

$$\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s'+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)s''+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)s'''=\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s$$

und

$$\sum\left(\frac{s'}{P}\right)+\sum\left(\frac{s''}{P}\right)+\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)=0$$

ist, so folgt

$$\left[3\left(\frac{3}{P}\right)-1\right]\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=P\left[\sum\left(\frac{s'''}{P}\right)-\sum\left(\frac{s'}{P}\right)\right]=$$

$$=P\left[\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{P-3s}{P}\right)-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)\right]=$$

$$=P\left[-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)-\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{P}\right)=-2P\left(\frac{3}{P}\right)\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)\right].$$

Daher ist

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)=-\frac{1}{2P}\left[3-\left(\frac{3}{P}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s.$$

Nun ist aber für jede positive Zahl $P=4n+3$, die durch kein Quadrat teilbar ist,

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=\frac{P}{\left(\frac{2}{P}\right)-2}\sum_{s=1}^{s=\frac{P-1}{2}}\left(\frac{s}{P}\right).$$

Setzt man den zweiten Faktor rechts, der positiv ist, zur Abkürzung Δ, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{P}\right)=\frac{3-\left(\frac{3}{P}\right)}{2\left[2-\left(\frac{2}{P}\right)\right]}\Delta. \qquad \text{(I)}$$

Digitized by Google

Da $\left(\frac{3}{P}\right)$ und $\left(\frac{2}{P}\right)$ nur die Werte $+1$ oder -1 annehmen können, so ist der Koeffizient von Δ positiv; da ferner $\nu = E\left(\frac{P}{3}\right)$, wenn $E(z)$ die größte ganze in der positiven Zahl z enthaltene Zahl bedeutet, so ist der aufgestellte Satz für alle Zahlen von der Form $4n+3$, die durch 3 nicht teilbar sind, bewiesen.

Es sei zweitens $P = 4n+3 = 3Q$, also $Q = 4m+1$ und $Q = 3\nu+1$ oder $Q = 3\nu+2$. Um die Summe

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s$$

zu bestimmen, ordnen wir die Zahlen $1, 2, 3, \ldots P-1$ in die drei Reihen

$$1.3,\ 2.3, \ldots 3(Q-1),$$
$$1,\ 1+1.3,\ 1+2.3, \ldots 1+3(Q-1),$$
$$2,\ 2+1.3,\ 2+2.3, \ldots 2+3(Q-1).$$

Dann ist

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s = \sum_{s=1}^{s=Q-1}\left(\frac{3s}{3Q}\right)3s + \sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{1+3s}{3Q}\right)(1+3s) +$$
$$+ \sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{2+3s}{3Q}\right)(2+3s) = \sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)(1+3s) -$$
$$- \sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)(2+3s).$$

Setzt man im Subtrahenden $s = Q-1-\sigma$, so erhält man

$$\sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)(2+3s) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1}\left(\frac{3Q-1-3\sigma}{Q}\right)(3Q-1-3\sigma) =$$
$$= 3Q\sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1}\left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right) - \sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1}\left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right)(1+3\sigma);$$

da aber, wenn σ alle Werte von 0 bis $Q-1$ durchläuft, die Zahlen $1+3\sigma$ für Q ein vollständiges Restsystem liefern, so ist $\sum_{\sigma=0}^{\sigma=Q-1}\left(\frac{1+3\sigma}{Q}\right) = 0$ und wir erhalten, da es auf die Bezeichnung des

Digitized by Google

Summationsbuchstaben nicht ankommt,

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s = 2\sum_{s=0}^{s=Q-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)(1+3s).$$

Setzt man in dem Ausdrucke $1+3s$ für s der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots Q-1$, so sind die ersten ν-Zahlen gleichzeitig ihre kleinsten positiven Reste bezüglich Q — ich bezeichne sie mit s' — die letzten ν-Zahlen geben zum Quotienten 2 und zu Resten die Zahlen s''': $Q-2$, $Q-2-1.3, \ldots Q-2-3(\nu-1)$, die übrigen geben zum Quotienten 1 und zu Resten die Zahlen s''; allerdings findet sich im Falle $Q=3\nu+2$ unter den zuletzt genannten Zahlen die Zahl $3(2\nu+1)+1=2Q$, aber sie trägt zur Summe nichts bei. Statt der vorstehenden Gleichung kann man also schreiben

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s = 2\left[\sum\left(\frac{s'}{P}\right)s' + \sum\left(\frac{s''+Q}{Q}\right)(s''+Q) +\right.$$

$$\left. + \sum\left(\frac{s'''+2Q}{Q}\right)(s'''+2Q)\right] = 2\sum_{s=1}^{s=Q-1}\left(\frac{s}{Q}\right)s + 2Q\left[\sum\left(\frac{s''}{Q}\right)+2\sum\left(\frac{s'''}{Q}\right)\right]$$

$$= 2Q\left[\sum\left(\frac{s'''}{Q}\right)-\sum\left(\frac{s'}{Q}\right)\right] = 2Q\left[\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)-\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)\right].$$

Ist nun $Q=3\nu+1$, so ist

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{1+3\nu}\right)=\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{3\nu-3s}{1+3\nu}\right)=\left(\frac{3}{1+3\nu}\right)\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{\nu-s}{1+3\nu}\right)=\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Da aber

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{Q}\right)+\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{1+3s}{Q}\right)+\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)=0$$

ist, so folgt

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right)=-2\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$$

und es folgt

$$\sum_{s=1}^{s=P-1}\left(\frac{s}{P}\right)s=-6Q\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)=-2P\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Digitized by Google

Zu derselben Gleichung gelangt man, wenn man $Q = 3\nu + 2$ voraussetzt. Setzt man in dieser Gleichung für den linken Teil den Wert $\frac{P\Delta}{\left(\frac{2}{P}\right) - 2}$ ein, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) = \frac{\Delta}{2\left[2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right]} \qquad \text{(II)}$$

und hierin bezieht sich Δ auf P, ist also positiv. Hiemit ist der aufgestellte Satz für alle durch 3 nicht teilbaren Zahlen von der Form $4n + 1$ bewiesen.

Es sei drittens $P = 6n + 3 = 3Q$ und $Q = 3\nu + 1$ oder $Q = 3\nu + 2$.

Verfährt man so wie früher, so erhält man

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1}\left(\frac{s}{P}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{3s}{3Q}\right) + \sum_{s=0}^{s=\nu}\left(\frac{1+3s}{3Q}\right) + \sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{3Q}\right).$$

Im Falle $Q = 3\nu + 2$, sollte allerdings die obere Grenze der dritten Summe ν sein, aber dieses letzte Glied hat den Wert 0.

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1}\left(\frac{s}{P}\right) = \sum_{s=0}^{s=\nu}\left(\frac{1+3s}{Q}\right) - \sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right).$$

Ist nun $Q = 3\nu + 1$, so ist

$$\sum_{s=0}^{s=\nu}\left(\frac{1+3s}{Q}\right) = \left(-\frac{1}{Q}\right)\sum_{s=0}^{s=\nu}\left(\frac{3\nu - 3s}{Q}\right) = \left(\frac{-3}{Q}\right)\sum_{s=0}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$$

$$\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{2+3s}{Q}\right) = \left(\frac{3}{Q}\right)\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\left(\frac{\nu+1+s}{Q}\right) = \left(\frac{-1}{Q}\right)\sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Aber es ist

$$\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) + \sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) + \sum_{s=2\nu+1}^{s=3\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) = 0.$$

Setzt man im dritten Gliede statt s: $3\nu + 1 - s$, so erhält man

$$\sum_{s=2\nu+1}^{s=3\nu}\left(\frac{s}{Q}\right) = \sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{Q-s}{Q}\right) = \left(\frac{-1}{Q}\right)\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Digitized by Google

Daraus folgt

$$\sum_{s=\nu+1}^{s=2\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)=-\left[1+\left(\frac{-1}{Q}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=1}\left(\frac{s}{Q}\right).$$

Daher ergibt sich

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1}\left(\frac{s}{P}\right)=\left[2+\left(\frac{-1}{Q}\right)\right]\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right). \qquad \text{(III)}$$

Zu derselben Formel gelangt man, wenn $Q=3\nu+2$ angenommen wird.

Ist nun P von der Form $4n+1$, daher $Q=4m+3$, so ist $\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$ eine positive Zahl nach der Gleichung I; ist aber P von der Form $4n+3$, daher $Q=4m+1$, so ist $\sum_{s=1}^{s=\nu}\left(\frac{s}{Q}\right)$ eine positive Zahl nach der Gleichung II und da $2n+1=E\left(\frac{P}{3}\right)$ ist, so ist der aufgestellte Satz bewiesen.

Weitere Beziehungen zwischen solchen Summen finden sich im LIII. Jahresberichte der Staats-Oberrealschule zu Klagenfurt vom Jahre 1910.

Digitized by Google

Dr. Ludwig Tuschel †.

Von **Emil Müller** in Wien.

Am 3. September 1913 starb in Strebersdorf (Wien XXI) nach mehrjähriger, leidensvoller Krankheit ein junger Geometer, der schon nach den fünf von ihm veröffentlichten Arbeiten zu den schönsten Hoffnungen berechtigte. Wer aber näheren Einblick in seine eigenartige lebhafte geometrische Phantasie erhielt, muß es im Interesse der Wissenschaft tief beklagen, daß die tückische Tuberkulose diesen aus gesunder Familie stammenden talentvollen jungen Mann so frühzeitig hinwegraffte, ja ihm schon lange vorher nicht gestattete, sich dem heißen Drang nach wissenschaftlicher Betätigung ganz hinzugeben.

Ludwig Tuschel wurde am 11. März 1886 in Wien geboren, absolvierte die I. Staatsrealschule im II. Wiener Gemeindebezirk, ließ sich im Oktober 1904 an der Bauingenieur-Abteilung der Technischen Hochschule in Wien inskribieren, trat aber dann in die Hochbau-Abteilung über, deren I. Staatsprüfungs-Zeugnis er im Jänner 1907 erwarb. Da inzwischen in ihm der Entschluß gereift war, sich dem Lehramt für Mathematik und darstellende Geometrie zu widmen, so hörte er vom Studienjahr 1906/07 an mathematische und pädagogische Vorlesungen an der Universität, ferner an der Technischen Hochschule die Vorlesungen über projektive Geometrie und die Sondervorlesungen über darstellende Geometrie und nahm am Seminar für darstellende Geometrie (E. Müller) teil. Hier bekundete er bei den ersten ihm gestellten Aufgaben die Fähigkeit zu selbständigem, wissenschaftlichem Weiterdenken, ohne daß er noch über breiteres Wissen verfügte. Bald zeigte sich bei ihm die ziemlich seltene Vereinigung eines lebhaften konstruktiven Interesses, das den eigentlichen darstellenden Geometer kennzeichnet, mit der Fähigkeit zu abstraktem, geometrischem Denken.

Angeregt durch die erwähnten Sondervorlesungen, veranlaßten ihn spezifisch darstellend-geometrische Aufgaben zu Begriffsbildungen, die allgemeines geometrisches Interesse verdienen. Es sei in dieser Hinsicht vor allem der Beispiele von „Geometrien“ gedacht, in denen statt Geraden und Ebenen gewisse Kurven und Flächen neben den Punkten (bezw. Punktgruppen) als Raumelemente dienen. In seiner „Schraubliniengeometrie“ (vgl. die unten angeführte 3. Arbeit) z. B. werden die Schraublinien mit parallelen Achsen und gleichem Parameter k als „Pseudogerade“, die Wendelflächen mit denselben

Digitized by Google

Achsen und dem Parameter $2k$ als „Pseudoebenen“ eingeführt. In seiner „Geometrie logarithmischer Linien“ (5. Arbeit) sind die Linien, welche aus der Kurve $z = -\log x$ durch eine beliebige Schiebung und gleichzeitige Drehung um deren Asymptote hervorgehen, die „Pseudogeraden“, ferner die aus dem Zylinder $z = -\log x$ durch dieselben Bewegungen hervorgehenden Zylinder die „Pseudoebenen“. In seiner 4. Arbeit betrachtet er die durch die Transformation $x = r$, $y = \varphi$, $z = z$, wo r, φ, z Zylinderkoordinaten bedeuten, aus den Schiebungen des Raumes hervorgehende Transformationsgruppe und die auf diese Weise den Schiebflächen entsprechenden Flächen. Durch solche Übertragungsprinzipien lassen sich nicht nur viele neue Sätze über gewisse Flächengattungen gewinnen, sondern es ergeben sich zugleich einfache Wege zu deren konstruktiver Behandlung.

Tuschel wurde im Februar 1909 zum Assistenten der II. Lehrkanzel für darstellende Geometrie (Prof. Th. Schmid) an der Technischen Hochschule in Wien ernannt, mußte aber, als er im Juli 1910 schwer erkrankte, diese Stellung aufgeben. Im Jänner 1910 hatte er (schon sehr kränklich) seine Lehramtsprüfung beendet und wurde nach Ablegung der strengen Prüfung im Juli 1911 zum Doktor der technischen Wissenschaften promoviert. Obgleich er sich der Schwere seines Leidens klar bewußt war, verlor er doch nie völlig die Hoffnung wenigstens auf Stillstand der inneren Zerstörung, ertrug heldenmütig die fürchterlichsten Schmerzen und setzte seine geometrischen Überlegungen in jeder halbwegs schmerzensfreien Stunde fort. Eine Fortsetzung seiner ersten Arbeit ließ er fast druckfertig zurück. Die aufopferungsvollste Pflege durch seine Eltern und alle ärztliche Kunst konnte ihm die Leiden der letzten Lebensmonate nicht mehr mildern; erst der Tod brachte dieser edlen Menschenseele Erlösung.

L. Tuschel hat folgende Arbeiten veröffentlicht:

1. „Zur Verwertung der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie“. Sitzungsber. Ak. Wien (math.-nat.), 117 IIa, Dez. 1908, S. 1261—1280.

2. „Über eine krummlinige Projektion und deren Verwendung in der darstellenden Geometrie“. Monatsh. Math. Phys. 20 (1909), S. 358 — 368.

3. „Über eine Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung“. Sitzungsber. Ak. Wien (math.-nat.), 120 IIa, Februar 1911, S. 231 — 254.

4. „Über eine Verallgemeinerung der Schiebflächen“. Sitzungsber. Ak. Wien (math.-nat.), 120 IIa, Dezember 1911, S. 1749 — 1762.

5. „Über eine Abbildung der Punkte einer Fläche auf die Geraden der Bildebene und eine sich daraus ergebende Flächengattung“. Mit einem Anhang: „Über eine Geometrie logarithmischer Linien“. Zeitschr. f. d. Realschulwesen 38 (1913), S. 78 — 93.

Wien, im Dezember 1913.

Digitized by Google

Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze.

Von **Hermann Holzberger** in München.

Einleitung.

Das Verhalten der Potenzreihen einer Variabeln auf dem Rande des Konvergenzkreises ist in den letzten Jahrzehnten eingehend untersucht worden. Im Gegensatz hiezu weiß man über das Verhalten mehrfacher Reihen auf dem Rande des Konvergenzbereiches noch sehr wenig. Es sind mir hierüber nur einige Arbeiten von Bromwich und Hardy bekannt.[1]) In der Arbeit „Some extensions...", pag. 164—168, geben die Autoren Erweiterungen des sogenannten Abelschen Grenzwertsatzes auf mehrfache Reihen für einen sehr wichtigen, aber freilich nur speziellen Fall:

1. Konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und ist $\left|\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu\right| < g$ für alle m und n (die Autoren nennen diese Bedingung die der Endlichkeit), so konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und es ist

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu .$$

2. Konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und ist $\left|\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu\right| < g$ für alle m und n, so konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$

[1]) Hardy, On the convergence of certain multiple series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 1, 1903/4. — Bromwich and Hardy, Some extensions to multiple series of Abels theorem on the continuity of power series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 2, 1904. — Bromwich, Various extensions of Abels lemma. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 6, 1908.

Digitized by Google

und es ist

$$\lim_{y=1}\lim_{x=1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu .$$

Diese beiden Sätze erfahren in der zitierten Abhandlung noch weitere Verallgemeinerung auf n-fache Reihen. Bromwich und Hardy machen jedoch dabei immer die beiden Voraussetzungen:

a) Die vorgelegte Reihe erfüllt die Bedingung der Endlichkeit.

b) Die Variabeln durchlaufen beim Grenzübergang nur reelle Werte.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im ersten Kapitel, §§ 1—3, damit, unter Verzicht auf die Voraussetzungen *a*) und *b*), die Grenzwertgleichung des Satzes 1 in möglichster Allgemeinheit zu erhalten. Zunächst wird in § 2 für den Satz 1 unter Beibehaltung der Voraussetzung *a*) ein neuer Beweis gegeben, der auf der gleichmäßigen Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in einem gewissen, näher zu bestimmenden Bereiche beruht und uns insoferne[1]) einen tieferen Einblick in das Verhalten der Reihe gewährt, als dies bei dem Bromwich-Hardyschen Beweise der Fall ist. Bei dem Grenzübergange sind jedoch die Variabeln in dem Einheitskreise nicht ganz willkürlich, sondern durch die Ungleichungen $\frac{|1-x|}{1-|x|} < g$, $\frac{|1-y|}{1-|y|} < g_1$ auf einen bestimmten Bereich beschränkt.

In § 3 wird zum allgemeinen Falle übergegangen, indem man auch die Bedingung *a*) streicht. Es wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichung $\lim_{x,y=1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ darin besteht, daß alle Zeilen und Kolonnen der Doppelreihe in der Umgebung des Punktes $x=1$, $y=1$ unter endlicher Grenze bleiben, soferne man schon weiß, daß die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergiert. Diese letztere Frage ist aber schon von Herrn Hartogs beantwortet worden, so daß wir uns nicht mehr mit ihr beschäftigen müssen. Auch für den Fall, daß $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ nicht den ganzen Bereich $|x|<1$, $|y|<1$ zum Konvergenzgebiet hat, werden unter Zuhilfenahme Hartogsscher Sätze noch hinreichende Bedingungen für die Grenzwertgleichung gefunden. Endlich wird gezeigt, daß in dem

[1]) Vgl. Pringsheim, Münch. Ber. 27 (1897), p. 344.

Digitized by Google

allgemeinen Falle, in dem eine gewisse Anzahl von Zeilen und Kolonnen in der Umgebung des Punktes $x=1,\ y=1$ über alle Grenzen wächst, die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in der Umgebung dieses Punktes nicht unter endlicher Grenze bleibt, daß sie aber durch Addition eines aus den nicht endlich bleibenden Zeilen und Kolonnen gebildeten Ausdrucks in eine Reihe übergeht, die $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ zum Grenzwert hat, ein Ergebnis, welches dann als „allgemeiner Abelscher Grenzwertsatz" bezeichnet wird.

Die folgenden Paragraphen (4 und 5) bringen sodann die Erweiterung der Ergebnisse auf den Fall, daß $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ nicht konvergiert, wohl aber ein arithmetisches Mittel besitzt. Bekanntlich hat Hölder zuerst eine Definition des arithmetischen Mittels höherer Ordnung einer unendlichen Reihe gegeben und bewiesen, daß $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s$, wenn s das arithmetische Mittel der Reihe ist, welchen Satz Bromwich und Hardy auf n-fache Reihen übertragen haben. Eine von der Hölderschen abweichende Definition des arithmetischen Mittels höherer Ordnung gab Cesàro; seine Definition, welche bekanntlich von gleicher Tragweite wie die Höldersche ist, hat vor dieser den Vorzug, leichter anwendbar zu sein und gestattet eine bedeutende Vereinfachung im Beweise des Grenzwertsatzes. Dies berechtigte uns, von der Hölderschen Definition ganz abzusehen und die Cesàrosche zu Grunde zu legen.

Um aber der vollen Allgemeinheit sicher zu sein, erwies es sich als notwendig, zunächst einen unter dem Namen „Cauchyscher Grenzwertsatz" bekannten Hilfssatz auf Doppelreihen auszudehnen, und dann allgemein nicht nur das arithmetische Mittel erster Ordnung einer Doppelreihe, sondern auch das von beliebiger Ordnung einer genaueren Untersuchung zu unterziehen (§§ 4 und 5, 1—2). Es zeigte sich, daß bei einer Reihe, die die Bedingung der Endlichkeit nicht erfüllt, die Definition des arithmetischen Mittels mit einer gewissen Vorsicht zu geschehen hat und daß man eventuell diejenigen Partialsummen $\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu$, deren Indizes m, n zwei Zahlen M, N nicht gleichzeitig übertreffen, weglassen können muß. Ferner wird der Begriff des normalkonvergenten Mittelwertes aufgestellt, d. h. desjenigen Mittelwertes einer Reihe, dessen Näherungswerte alle unter endlicher Grenze bleiben und gezeigt, daß jede Reihe, die einen arithmetischen Mittelwert besitzt, so abgeändert werden kann, daß sie einen normalkonvergenten Mittelwert erhält.

Digitized by Google

Nunmehr wird für normalkonvergente Mittelwerte der Satz bewiesen:

Besitzt $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ einen normalkonvergenten Mittelwert s, so ist für $|x|<1$, $|y|<1$ $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut konvergent und es gilt (in einem bestimmten Bereiche)

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = s,$$

von welchem Satz man dann auf Grund der ausgeführten Untersuchungen über arithmetische Mittel von Doppelreihen auf den allgemeinen Fall eines beliebigen, d. h. nicht normalkonvergenten Mittelwerts ebenso übergeht wie in § 3 von der Bedingung *a*) zum Falle einer beliebigen konvergenten Doppelreihe. Infolgedessen sind alle Ergebnisse von § 3 auf unser erweitertes Problem nahezu wörtlich übertragbar und dieses ebenfalls allgemein gelöst.

In einer Anmerkung werden schließlich noch einige Verallgemeinerungen des Satzes 2, die leicht zu beweisen sind, erwähnt; leider war es mir hier nicht möglich, die Grenzen für den Satz 2 durch Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen genau abzustecken.

Das zweite Kapitel bringt nun die Verallgemeinerung der Hauptergebnisse des ersten Kapitels auf dreifache Reihen. Während unter Beibehaltung der Bedingung *a*) die Verhältnisse sogar für n-fache Reihen durchaus ebenso liegen, wie bei Doppelreihen und die einzige Komplikation in der größeren Zahl der Variabeln liegt, treten bei der Untersuchung des allgemeinen Falles schon für $n=3$ Erscheinungen zu Tage, die von den bei Doppelreihen gefundenen durchaus verschieden sind. Es ist nämlich bei dreifachen Reihen durchaus nicht mehr notwendig für den Grenzwertsatz, daß alle in der dreifachen Reihe enthaltenen zwei- und einfachen Reihen in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ endlich bleiben; vielmehr kann eine endliche Anzahl zweifacher und sogar eine unendliche Anzahl einfacher Reihen in der Nähe dieses Punktes über alle Grenzen wachsen, ohne daß die Gleichung

$$\lim_{x_1,x_2,x_3=1} \sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} = \sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$$

beeinträchtigt wird. Doch ist dieses Unendlichwerden der zwei- und einfachen Reihen einer gewissen Beschränkung unterworfen, die mit Hilfe einer Klassifizierung zweifacher Reihen exakt ausgesprochen

Digitized by Google

werden kann. Als Resultat ergibt sich, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} \sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} = \sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$$

darin besteht, daß die dreifache Reihe selbst in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ unter endlicher Grenze bleibt, ein Resultat, welches ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden kann, daß die Reihe ein arithmetisches Mittel beliebiger Ordnung besitzt.

Das letzte Kapitel endlich ist der Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes gewidmet. Bekanntlich hat Tauber[1]) für einfache Reihen den wichtigen Satz bewiesen:

$$\text{Ist } \lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{1.a_0 + 2.a_1 + \cdots (n+1) a_n}{n+1} = 0,$$

welche Bedingungen beide zur Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ notwendig sind, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

Es ist mir gelungen, diesen Satz auf Doppelreihen auszudehnen. Dabei habe ich eine etwas allgemeinere, von Herrn Landau herrührende Form des Tauberschen Satzes zu Grunde gelegt. § 9 behandelt den einfachsten Fall, daß ($a_\mu^\nu = \alpha_\mu^\nu + i\beta_\mu^\nu$ gesetzt) alle α_μ^ν als auch alle β_μ^ν unter sich gleiches Zeichen besitzen. Der folgende Paragraph dient der Herleitung notwendiger Konvergenzbedingungen, die der Tauberschen Gleichung $\lim_{n=\infty} \frac{1.a_0 + 2.a_1 + \cdots (n+1) a_n}{n+1} = 0$ entsprechen. Im letzten Paragraph endlich wird die Übertragung des Tauber-Landauschen Satzes zuerst unter einer der Bedingung *a)* sehr nahe verwandten Voraussetzung ausgeführt und dann mit Hilfe der Ergebnisse von §§ 3 und 9 auf beliebige Doppelreihen ausgedehnt.

---

[1]) Monatsh. für Math. u. Physik VIII., 1897, p. 273. — Pringsheim, Münch. Ber. 30, 1900, p. 51.

Digitized by Google

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen.

§ 1. Erklärung der Bezeichnungen 185
§ 2. Gleichmäßige Konvergenz einer Doppelreihe 188
§ 3. Der Abelsche Grenzwertsatz 194
§ 4. Der Cauchy-Jensensche Grenzwertsatz 203
§ 5. Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes auf Reihen mit arithmetischem Mittel 209
Anmerkung: Der Abelsche Grenzwertsatz für die Zeilenreihe 226

II. Der Abelsche Grenzwertsatz für dreifache Reihen.

§ 6. Vorbereitende Sätze: Allgemein geltende Grenzwertgleichung. Klassifikation der Doppelreihen 230
§ 7. Notwendige und hinreichende Bedingungen für den Abelschen Grenzwertsatz 236

III. Die Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes für Doppelreihen.

§ 8. Der Fall gleichbezeichneter Koeffizienten 246
§ 9. Notwendige Konvergenzbedingungen für Doppelreihen. Transformationen 247
§ 10. Der Taubersche Satz 254

Digitized by Google

I. Der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen.

§ 1.

1. Für eine übersichtliche Beweisführung erweist sich eine konsequente Bezeichnungsweise notwendig.

Wir schreiben die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in der Form des Schemas

$$\begin{array}{l} a_0^0 \quad + a_1^0 x + a_2^0 x^2 + \cdots \\ + a_0^1 y \; + a_1^1 x y + a_2^1 x^2 y + \cdots \\ + a_0^2 y^2 + a_1^2 x y^2 + a_2^2 x^2 y^2 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

[Es wird wohl zu keinen Mißverständnissen Anlaß geben, wenn wir a_μ^ν statt $a_\mu^{(\nu)}$ schreiben, da die einzigen auftretenden Potenzen die von x und y sind; diese Vereinfachung möge immer gestattet sein, wenn es sich um die oberen Indizes von Doppelfolgen handelt.]

Grenzt man in dem Schema ein Rechteck mit den Eckpunkten $\begin{matrix} m, n & m+p, n \\ m, n+q & m+p, n+q \end{matrix}$ ab, so sei die Summe der innerhalb und auf der Begrenzung des Rechtecks gelegenen Glieder mit $r_{m,p}^{n,q}(x, y)$ bezeichnet, also

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = \sum_{\pi=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{q} a_{m+\pi}^{n+\varkappa} x^{m+\pi} y^{n+\varkappa}.$$

In dem besonderen Falle, daß $m = n = o$, schreiben wir:

$$r_{o,p}^{o,q}(x,y) = s_p^q(x,y).$$

Also

$$s_m^n(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu.$$

Die Zeilen und Kolonnen unseres Schemas bezeichnen wir mit $p_\nu(x)$ und $q_\mu(y)$, so daß also

$$p_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu, \qquad q_\mu(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu.$$

Digitized by Google

Für die Partialsummen der Zeilen schreiben wir:

$$\sum_{\pi=0}^{p} a_{m+\pi}^{n} x^{n+\pi} = p_n^{m,p}(x).$$

Läßt man einen Index ins Unendliche rücken, so soll dies durch sein Wegfallen angedeutet sein: z. B.

$$\lim_{p,q=\infty} r_{m,p}^{n,q}(x,y) = r_m^n(x,y),$$

$$\lim_{p=\infty} p_n^{m,p}(x) = p_n^m(x)$$ (während die Summe der $m+1$ ersten Glieder der n-ten Zeile $p_n^{o,m}(x)$ heißt)

$$\lim_{m,n=\infty} s_m^n(x,y) = s(x,y).^1)$$

Ebenso soll für das Wertepaar $x=1$, $y=1$ das Argument in Wegfall treten:

$$r_{m,p}^{n,q}(1,1) = r_{m,p}^{n,q}$$

$$s_m^n(1,1) = s_m^n;\ s(1,1) = s.$$

2. Die eben erläuterte Bezeichnung ermöglicht es uns z. B. die von Herrn Hardy für Doppelreihen gegebene Erweiterung der bekannten Abelschen Transformation auf Potenzreihen zweier Veränderlichen in übersichtlicher Weise anzuwenden. Setzt man nämlich

$$c_p^q = \Delta,$$

$$c_{\pi+1}^q - c_\pi^q = \Delta_\pi,\ c_p^{\varkappa+1} - c_p^\varkappa = \Delta^\varkappa,$$

$$c_{\pi+1}^{\varkappa+1} - c_\pi^{\varkappa+1} - c_{\pi+1}^\varkappa + c_\pi^\varkappa = \Delta_\pi^\varkappa,$$

so besteht die Identität: 2)

$$\sum_{\pi=0}^{p}\sum_{\varkappa=0}^{q} c_\pi^\varkappa u_\pi^\varkappa = \sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\varkappa=0}^{q-1}\Delta_\pi^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{\pi}\sum_{\varrho=0}^{\varkappa} u_\lambda^\varrho - \sum_{\pi=0}^{p-1}\Delta_\pi \sum_{\lambda=0}^{\pi}\sum_{\varrho=0}^{q} u_\lambda^\varrho -$$

$$- \sum_{\varkappa=0}^{q-1}\Delta^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{p}\sum_{\varrho=0}^{\varkappa} u_\lambda^\varrho + \Delta \sum_{\lambda=0}^{p}\sum_{\varrho=0}^{q} u_\lambda^\varrho.$$

---

1) Das Zeichen $\lim_{m,n=\infty}$ soll ebenso wie $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}$ und $\lim_{x,y=1}$ immer einen Doppellimes im Pringsheimschen Sinne bedeuten, während der iterierte Grenzwert mit $\lim_{m=\infty}\lim_{n=\infty}$, $\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}$, $\lim_{x=1}\lim_{y=1}$ bezeichnet wird. Auch sollen alle Grenzwerte, deren Existenz wir voraussetzen, endlich sein, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.

2) Hardy, On the convergence of certain multiple series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2) 1, 1903/4, p. 124–125.

Digitized by Google

Setzt man hier:

$$u_\pi^\varkappa = a_{m+\pi}^{n+\varkappa}$$

$$c_\pi^\varkappa = x^{m+\pi} y^{n+\varkappa}$$

so erhält man die Transformation:

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = x^m y^n \Big\{ (1-x)(1-y) \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,\pi}^{n,\varkappa} x^\pi y^\varkappa + \\ + (1-x) y^q \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{n,q} x^\pi + (1-y) x^p \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,p}^{n,\varkappa} y^\varkappa + r_{m,p}^{n,q} x^p y^q \Big\}.$$

Wir werden von dieser Transformation im nächsten Paragraph Gebrauch zu machen haben.

3. Um auch für die auftretenden x, y-Mannigfaltigkeiten eine konsequente Bezeichnung zu besitzen, verstehen wir mit Herrn Hartogs[1]) unter einem Bereich B der x-Ebene eine abgeschlossene Punktmenge von der Beschaffenheit, daß

a) jeder Punkt von B entweder ein innerer Punkt von B oder wenigstens Häufungspunkt innerer Punkte ist (ein Punkt x heißt innerer Punkt von B, wenn alle Punkte eines genügend kleinen Kreises um x ebenfalls zu B gehören);

b) je zwei innere Punkte von B sich durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende Linie verbinden lassen, deren Punkte auch alle innere Punkte von B sind.

Die Gesamtheit aller Punkte (x, y), deren x-Koordinate dem Bereich B, und deren y-Koordinate dem Bereich B_1 angehört, bezeichnen wir mit (B, B_1).

Ferner verstehen wir unter einem Bereich $\mathfrak{B}$ eine abgeschlossene vierdimensionale Punktmenge von folgender Beschaffenheit:

a) Jeder Punkt (x, y) derselben sei innerer Punkt der Menge oder Häufungspunkt innerer Punkte (wir nennen einen Punkt (x, y) einen inneren Punkt der Menge, wenn alle Punkte (x', y') eines passend gewählten Gebietes $|x' - x| < \rho, |y' - y| < \rho'$ ebenfalls zu $\mathfrak{B}$ gehören).

b) Je zwei innere Punkte von $\mathfrak{B}$ sollen durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke (darstellbar durch je ein Gleichungspaar $x = \alpha t + \beta$, $y = \alpha' t + \beta'$, wobei t die sämtlichen Werte eines reellen Intervalls durchläuft) zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz in $\mathfrak{B}$ verläuft.[2])

Wir werden endlich im folgenden einen besonderen Bereich (B, B_1) sehr häufig zu verwenden haben und demgemäß eigens

[1]) Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen zweier Veränderlichen. Dissertation, München 1904, p. 3.

[2]) Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen. Habilitationsschrift, München 1905, p. 8, Fußnote.

Digitized by Google

benennen. Die Gesamtheit derjenigen Punkte, die gleichzeitig den beiden Ungleichungen genügen

$$|x| \leqq 1, \quad \frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq g \quad (g \geqq 1)$$

wollen wir mit A bezeichnen. Dieser Bereich ist in den Arbeiten über Potenzreihen einer Veränderlichen auf dem Konvergenzkreis bereits eingehend untersucht worden. Herr Pringsheim hat gezeigt, daß jedes Dreieck mit den Eckpunkten $1, x_1, x_2$ ($|x_1| < 1, |x_2| < 1$) dem Bereiche bei hinlänglich großem g angehört. Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß der vollständige Bereich von dem Inneren und der Begrenzung der Schleife einer Kreiskonchoide mit der Gleichung

$$r = \frac{2g^2 \cos\varphi - 2g}{g^2 - 1} \qquad (1 - x = re^{i\varphi})$$

gebildet wird.[1])

Entsprechend definieren wir den Bereich A_1.

Beschränken wir x und y auf reelle Werte zwischen 0 und 1 (dies kann als Ausartung von A bezw. A_1 für $g = 1$ bezw. $g_1 = 1$ angesehen werden), so schreiben wir ρ statt x, ρ_1 statt y.

§ 2.

1. Bekanntlich hat man bei Potenzreihen einer Veränderlichen zwei Möglichkeiten für den Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes. Entweder man geht nach dem Vorgange von Dirichlet[2]) von der Transformation aus:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda x^\nu$$

und beweist aus dieser, daß $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, falls diese Reihe konvergiert. Oder, man zeigt nach Abel,[3]) daß die Reihe für $-1 < r \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert. Stolz[4]) hat gezeigt, daß die Reihe sogar im Bereich A gleichmäßig konvergiert, woraus dann für beliebiges x dieses Bereiches die Relation folgt: $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Wie Herr Pringsheim[5]) hervorgehoben hat,

[1]) Bromwich, Varions extensions... p. 64. Vgl. auch Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, p. 287.

[2]) Journ. de Math. (2) 7 (1862), p. 253; Werke, Berlin 1897, p. 305.

[3]) J. für Math. 1 (1826), p. 314; Oeuvres, éd. Sylow et S. Lie 1, p. 223.

[4]) Stolz und Gmeiner, Funktionentheorie p. 287.

[5]) Münch. Ber. 27 (1897), p. 344.

Digitized by Google

ist die zweite Methode die prägnantere und für das Verständnis des Satzes wichtigere. — Genau dieselben Wege bieten sich uns bei Doppelreihen dar. Mit Hilfe der Dirichletschen Methode haben die Herren Bromwich und Hardy den in der Einleitung schon erwähnten Satz bewiesen:

„Konvergiert s_m^n gegen s und ist $|s_m^n| < G$ für alle m und n, so konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x| < 1$, $|y| < 1$ und es ist $\lim_{\varrho, \varrho_1 = 1} s(\varrho, \varrho_1) = s$."

Es zeigt sich nun, daß ebenso wie bei einfachen Reihen der Grenzwertsatz einer Erweiterung insoferne fähig ist, als x, y durchaus nicht reell sein brauchen, sondern nur auf den Bereich (A, A_1) beschränkt sein müssen. Da man hiezu den von Bromwich und Hardy gegebenen Beweis nur ganz wenig zu modifizieren hat, so soll uns die Dirichletsche Methode nicht weiter beschäftigen. Dagegen soll hier gezeigt werden, daß auch bei Doppelreihen die gleichmäßige Konvergenz in einem noch näher zu bestimmenden Bereich den inneren Grund für die Gültigkeit des Grenzwertsatzes bildet. Es besteht nämlich der Satz:

„Ist $\sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^\nu$ konvergent und $|s_m^n| < G$ für jedes m und n, ist ferner $\mathfrak{B}$ ein Teilbereich von (A, A_1), welcher den Punkt $(1, 1)$ enthält, aber außerdem keinen anderen Punkt mit der x- oder y-Koordinate 1, und im übrigen die charakteristischen Eigenschaften eines Bereiches $\mathfrak{B}$ besitzt (vgl. § 1), so ist $s(x, y)$ gleichmäßig konvergent im Bereiche $\mathfrak{B}$."

Beweis: Es sei zunächst daran erinnert, daß im Bereich (A, A_1)

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq g, \quad \frac{|1-y|}{1-|y|} \leqq g_1$$

ist. Wegen der Konvergenz von s_m^n kann man nun ein M und ein N so angeben, daß für $\begin{matrix} m \geqq M \\ n \geqq N \end{matrix}$

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m+p} \sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \begin{matrix} p = -1, 0, 1, 2 \ldots \\ q = -1, 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

Wählen wir $q = -1$, so erhalten wir

$$|r_{m,p}^{0,n-1}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, 2 \ldots \\ m \geqq M, n \geqq N, \end{matrix} \qquad (1\,a)$$

ferner

$$|r_{m,p}^{0,n+q}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

Digitized by Google

woraus man durch Subtraktion erhält:

$$|r_{m,p}^{n,q}| < \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}, \quad \left.\begin{matrix} m \geqq M, & p \\ n \geqq N, & q \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots \qquad (1\,b)$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=0}^{m+p}\sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu =$$

$$= r_{m,p}^{n,q}(x,y) + r_{0,m-1}^{n,q}(x,y) + r_{m,p}^{0,n-1}(x,y).$$

Nach § 1, 2 ist

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = x^m y^n \Big\{(1-x)(1-y)\sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,\pi}^{n,\varkappa} x^\pi y^\varkappa +$$

$$+ (1-x)\, y^q \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{n,q} x^\pi + (1-y)\, x^p \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,p}^{n,\varkappa} y^\varkappa + r_{m,p}^{n,q} x^p y^q \Big\}.$$

Wegen (1 *b*) ist daher

$$|r_{m,p}^{n,q}(x,y)| < \Big\{|1-x|\,|1-y| \sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\varkappa=0}^{q-1} |x|^\pi |y|^\varkappa +$$

$$+ |1-x| \sum_{\pi=0}^{p-1} |x|^\pi + |1-y| \sum_{\varkappa=0}^{q-1} |y|^\varkappa + 1\Big\} \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}$$

$$< \Big\{\frac{|1-x|\,|1-y|}{(1-|x|)(1-|y|)} + \frac{|1-x|}{1-|x|} + \frac{|1-y|}{1-|y|} + 1\Big\} \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}$$

Also: $$|r_{m,p}^{n,q}(x,y)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Die gleiche Transformation liefert uns

$$r_{m,p}^{0,n-1}(x,y) = x^m \Big\{(1-x)(1-y)\sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,\pi}^{0,\nu} x^\pi y^\nu +$$

$$+ (1-x)\, y^{n-1} \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{0,n-1} x^\pi + (1-y)\, x^p \sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,p}^{0,\nu} y^\nu + r_{m,p}^{0,n-1} x^p y^{n-1}\Big\}.$$

Da nun infolge von $|s_m^n| < G$

$$|r_{m,\pi}^{0,\nu}| < 2G,$$

Digitized by Google

so ist

$$\left|(1-x)(1-y)\sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,\pi}^{0,\nu}\, x^{\pi} y^{\nu}\right| < \frac{|1-x|}{1-|x|}\,|1-y|\,2nG$$
$$< 2Ggn\,|1-y|$$

und

$$\left|(1-y)\,x^{p}\sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,p}^{0,\nu}\, y^{\nu}\right| < 2nG\,|1-y|.$$

Vermöge $(1a)$ ist ferner

$$\left|(1-x)\,y^{n-1}\sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{0,n-1}\, x^{\pi}\right| < \frac{|1-x|}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}$$
$$< \frac{\varepsilon g}{2(g+1)(g_1+1)}$$

und

$$|r_{m,p}^{0,n-1} x^{p}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}.$$

Alle diese Ungleichungen bestehen für jedes $m \geqq M$, $n \geqq N$. Man fixiere nun m und n, indem man etwa $m = M$, $n = N$ wählt. Beschränkt man y auf diejenige Umgebung des Punktes 1, für die[1])

$$|y-1| \leqq \frac{\varepsilon}{4GN(1+g)}, \tag{3b}$$

so wird

$$|r_{M,p}^{0,N-1}(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(g+1)}{2(g+1)(g_1+1)} < \varepsilon. \tag{4b}$$

Entsprechend findet man

$$|r_{0,M-1}^{N,q}(x,y)| < \varepsilon, \tag{4a}$$

wenn

$$|x-1| \leqq \frac{\varepsilon}{4GM(1+g_1)}. \tag{3a}$$

Für denjenigen Teil $\mathfrak{B}_1$ des Bereiches $\mathfrak{B}$, für den die Ungleichungen $(3a)$ und $(3b)$ erfüllt sind, gilt also durch Addition von (2), $(4a)$ und $(4b)$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{M+p}\sum_{\nu=0}^{N+q} a_{\mu}^{\nu} x^{\mu} y^{\nu} - \sum_{\mu=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1} a_{\mu}^{\nu} x^{\mu} y^{\nu}\right| < 3\varepsilon, \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

[1]) Dabei soll natürlich y außerdem noch dem Bereich A_1 angehören.

Digitized by Google

woraus sofort folgt:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m+p}\sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon \tag{5}$$

$$\text{für } \left.\begin{matrix} m \geqq M+1 & p \\ n \geqq N+1 & q \end{matrix}\right\} = -1, 0, 1, 2\ldots$$

Derjenige Teil von $\mathfrak{B}$, der den Ungleichungen (3 a) und (3 b) nicht genügt, sei unter Einschluß seiner Begrenzung mit $\mathfrak{B}_2$ bezeichnet. Da nun der Punkt (1, 1) der einzige auf dem Rande des „Kreisgebietes" $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ gelegene Punkt ist, der dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehört und dieser Punkt außerhalb $\mathfrak{B}_2$ liegt, da ferner $\mathfrak{B}_2$ eine abgeschlossene Punktmenge ist, so lassen sich zwei Zahlen $r < 1$, $r_1 < 1$ angeben, so daß der ganze Bereich $\mathfrak{B}_2$ in dem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r_1$ enthalten ist. In diesem Kreisgebiet ist aber die Reihe $s(x, y)$ absolut konvergent, weshalb sich zwei Zahlen M_1 und N_1 finden lassen, so daß für alle Punkte von $\mathfrak{B}_2$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m+p}\sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon, \tag{6}$$

wenn nur $m \geqq M_1$, $n \geqq N_1$, $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = -1, 0, 1, 2\ldots$

Ist $M_2 \geqq \left\{\begin{matrix} M_1 \\ M+1 \end{matrix}\right.$, $N_2 \geqq \left\{\begin{matrix} N_1 \\ N+1 \end{matrix}\right.$, so besteht für alle Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ die Ungleichung [vermöge (5) und (6)]:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{M_2+p}\sum_{\nu=0}^{N_2+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{M_2-1}\sum_{\nu=0}^{N_2-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon \text{ w. z. b. w.}$$

2. Wir haben nun noch zu zeigen, daß die gleichmäßige Konvergenz der Reihe im Bereiche $\mathfrak{B}$ uns die Beziehung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ im Bereich (A, A_1) verbürgt.[1])

[1]) Es dürfte erwähnenswert sein, daß man unter geeigneten Voraussetzungen auch die gleichmäßige Konvergenz von $s(x, y)$ im Bereiche (A, A_1) nachweisen kann. Es ist nämlich leicht mit Hilfe der Abelschen Transformation und des Cauchyschen Grenzwertsatzes den Satz zu beweisen:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz von $s(x, y)$ im Bereiche (A, A_1) besteht in der Konvergenz von $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und von sämtlichen Zeilen und Kolonnen."

Man erkennt sofort, daß gleichmäßige Konvergenz in diesem Umfange uns nicht nur die Gleichung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ liefert, sondern auch die Relationen:

$\lim_{y=1} \lim_{x=1} s(x, y) = s$ und $\lim_{x=1} \lim_{y=1} s(x, y) = s$.

Digitized by Google

Es sei $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \ldots \mathfrak{B}_\nu \ldots$ eine Folge von Bereichen von der Eigenschaft, daß jeder alle vorhergehende Bereiche enthält und daß sich zu jedem inneren Punkte (x, y) von (A, A_1), der gleichzeitig dem Kreisgebiete $|1-x| \leqq \delta$, $|1-y| \leqq \delta_1$ angehört, ein n finden läßt, so daß der Punkt (x, y) im Inneren aller Bereiche $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_{n+1} \ldots$ liegt (δ und δ_1 sind dabei zwei beliebig kleine, aber feste Zahlen). Zu jedem Bereich $\mathfrak{B}_\nu$ gehört nach dem Vorhergehenden ein Kreisgebiet $|1-x| \leqq \sigma_\nu$, $|1-y| \leqq \sigma_\nu$, so daß für alle Punkte von $\mathfrak{B}_\nu$ innerhalb und auf der Begrenzung dieses Kreisgebietes die Differenz $|s - s(x,y)| \leqq \varepsilon$ wird. Ist $\bar{\sigma}_\nu$ die obere Grenze dieser σ_ν, so behält wegen der Stetigkeit von $s(x\,y)$ diese Ungleichung auch noch für das Kreisgebiet $|1-x| \leqq \bar{\sigma}_\nu$, $|1-y| \leqq \bar{\sigma}_\nu$ ihre Richtigkeit. Die untere Grenze $\bar{\sigma}$ der $\bar{\sigma}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) muß nun größer als Null sein. Denn wäre $\bar{\sigma} = 0$, so könnte man eine nach 0 konvergierende Folge $\bar{\sigma}_{n_\lambda}$ herausheben, so daß $\bar{\sigma}_{n_\lambda} < \bar{\sigma}_{n_{\lambda-1}}$. Es würde dann in dem Teil von $\mathfrak{B}_{n_\lambda}$, der dem Gebiet $\bar{\sigma}_{n_\lambda} \leqq \left\{ \begin{matrix} |x-1| \\ |y-1| \end{matrix} \right\} \leqq \bar{\sigma}_{n_{\lambda-1}}$ angehört, ein Punkt $(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda})$ existieren, für den $|s(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda}) - s| > \varepsilon$. Die Punkte $(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda})$ hätten den Häufungspunkt (1, 1) und man könnte, da sie alle innere Punkte von (A, A_1) sind und außer (1, 1) keinen Häufungspunkt mit der x- oder y-Koordinate 1 besitzen, einen Bereich $\mathfrak{B}$ konstruieren, der sie alle enthält und in dem unsere Reihe $s(x, y)$ gleichmäßig konvergent ist. Mit dieser Eigenschaft steht aber die Ungleichung $|s(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda}) - s| > \varepsilon$ im Widerspruch. Also ist $\bar{\sigma}$ tatsächlich von Null verschieden. Ist dann $\sigma' < \left\{ \begin{matrix} \bar{\sigma} \\ \delta \end{matrix} \right.$, $\sigma_1' < \left\{ \begin{matrix} \bar{\sigma} \\ \delta_1 \end{matrix} \right.$, so ist für alle inneren Punkte des dem Bereich (A, A_1) und dem Kreisgebiet $|1-x| \leqq \sigma'$, $|1-y| \leqq \sigma_1'$ gemeinsamen Teiles $|s(x,y) - s| \leqq \varepsilon$, also $\lim_{x,\,y\,=\,1} s(x,y) = s$ im Bereiche (A, A_1).

Man könnte vermuten, daß die gleichmäßige Konvergenz von $s(\rho, \rho_1)$ für $0 \leqq \rho \leqq 1$, $0 \leqq \rho_1 \leqq 1$ weniger Voraussetzungen verlangen würde. Indessen zeigt sich, daß auch hiefür dieselben Bedingungen notwendig sind. Es läßt sich nämlich der Satz beweisen:

„Konvergiert $s(x, 1)$ für alle Punkte x' einer Menge mit dem Häufungspunkte 0, so konvergieren alle Kolonnen und daher die Doppelreihe selbst für $|x| < \rho$, wenn ρ die obere Grenze der $|x'|$ bezeichnet".

Wendet man den ersten Teil dieses Satzes und den durch Vertauschung von x mit y daraus hervorgehenden auf $s(x, y)$ an, so ergibt sich die ausgesprochene Behauptung.

Da die Konvergenz der Zeilen und Kolonnen doch eine sehr enge Bedingung ist und die interessanten, für die Doppelreihe typischen Erscheinungen erst dann auftreten, wenn Zeilen und Kolonnen divergieren, so möge die kurze Erwähnung dieses einfachsten Falles genügen.

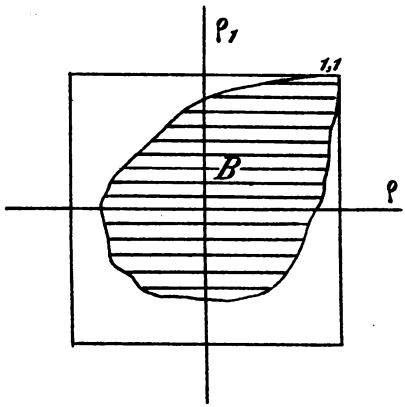
Digitized by Google

Wir erhalten so den Satz:

„Konvergiert s_m^n gegen s und ist $|s_m^n| < G$ für alle m und n, so konvergiert $s(x,y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und es gilt in jedem Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x,y=1} s(x,y) = s.“$$

Die Gleichung gilt insbesondere, wenn x und y auf beliebigen Strahlen gegen 1 konvergieren. Wählt man die reellen Axen, so geht der von Bromwich und Hardy bewiesene Satz hervor. Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz ist in diesem Falle jeder Teilbereich B des Quadrates $-1 \leqq \rho \leqq 1$, $-1 \leqq \rho_1 \leqq 1$, der $\rho = 1, \rho_1 = 1$ enthält, sonst aber keinen Punkt der Quadratseiten.



Der vorstehende Beweis ist freilich erheblich länger als das Dirichletsche Beweisverfahren. Doch erscheint dies gerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß die gleichmäßige Konvergenz ja eine viel allgemeinere Eigenschaft als die Stetigkeit darstellt.

Läßt man die Bedingung $|s_m^n| < G$ fallen, so ist die Konvergenz i. a. keine gleichmäßige mehr. Beispiel: $s(x,y) = \frac{1-y}{(1-x)^2}$;

$$s(x,y) - s_{m-1}^{n-1}(x,y) = (1-y)\, x^m \left(\frac{m}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

$$\left| s\left(1-\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right) - s_{m-1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n}\right)\right| > \frac{m^2}{2n}.$$

§ 3.

1. Wir wollen jetzt die Voraussetzung $|s_m^n| < G$ streichen und den allgemeinen Fall betrachten, in dem nur die Konvergenz von s_m^n feststeht. Durch einen Satz des Herrn Hartogs ist die Frage, wann aus der Konvergenz von $s(1,1)$ diejenige von $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ folgt, bereits vollständig beantwortet. Es besteht nämlich das Theorem: [1])

„Konvergiert $s(x,y)$ (bedingt oder unbedingt) im Punkte $(1,1)$, so gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Zeilen und Kolonnen, deren Konvergenzradius kleiner als 1 ist. Die Doppelreihe selbst konvergiert sicher in dem Kreisgebiet $|x|<\rho$, $|y|<\rho'$ absolut,

[1]) Hartogs Diss. p. 4.

Digitized by Google

wo ρ die kleinere der beiden Größen 1 und X, ρ' die kleinere der Größen 1 und Y bedeutet. (X bezw. Y ist dabei die untere Grenze der Konvergenzradien aller Zeilen bezw. Kolonnen.)"

Wir können daher von der Untersuchung des ersten Teiles des Abelschen Satzes, der Konvergenzuntersuchung, vollständig absehen und haben uns nur mit der Grenzwertrelation zu befassen. Zunächst nehmen wir an, es sei $s(x, y)$ absolut konvergent im ganzen Gebiet $|x|<1$, $|y|<1$ und $s(1, 1)$ konvergiere. Es existieren dann immer zwei Zahlen m und n derart, daß

$$|s_{m+p}^{n+q}|<G, \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = -1, 0, 1, 2 \ldots$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} b_\pi^\varkappa &= a_{m+\pi}^{n+\varkappa} \text{ für } \pi>0, \ \varkappa>0, \\ b_0^\varkappa &= s_m^{n+\varkappa} - s_m^{n+\varkappa-1}, \ \varkappa>0, \\ b_\pi^0 &= s_{m+\pi}^n - s_{m+\pi-1}^n, \ \pi>0, \\ b_0^0 &= s_m^n. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\sum_{\pi=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{q} b_\pi^\varkappa = s_{m+p}^{n+q},$$

infolgedessen

$$\sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa = s$$

und wegen der erfüllten Bedingung der Endlichkeit nach unserem Satze von § 2

$$\lim_{x,y=1} x^m y^n \sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s$$

im Bereiche (A, A_1). Nun besteht aber die Identität:

$$x^m y^n \sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s(x, y) + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)(y^n - y^\nu) + \sum_{\mu=0}^{m-1} q_\mu(y)(x^m - x^\mu) + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu (x^m - x^\mu)(y^n - y^\nu).$$

Beachtet man, daß

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu (x^m - x^\mu)(y^n - y^\nu) = 0,$$

Digitized by Google

so folgt sofort

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)(y^n-y^\nu)+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)(x^m-x^\mu)\right\}=s. \quad (1)$$

2. Es besteht nun der Satz:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\lim_{x,y=1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)(y^n-y^\nu)+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)(x^m-x^\mu)\right\}=0,$$

wenn (x, y) im Teilbereiche (B, B_1) des Bereiches (A, A_1) dem Punkte (1, 1) zustrebt, besteht darin, daß im Bereiche (B, B_1) die Funktionen $\begin{cases}p_\nu(x)\\ q_\mu(y)\end{cases}$ unter endlichen Grenzen bleiben. Diese Bedingung ist sogar schon notwendig, wenn die $\{\ \}$ in der dem Bereiche (B, B_1) angehörigen Umgebung des Punktes (1, 1) unter endlicher Grenze bleiben soll."

Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist evident. Um auch ihre Notwendigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß wegen

$$\left|s_{m-1}^{n+\varkappa}\right|<G\ (\varkappa=0,1,2\ldots) \text{ und } \left|s_{m+\pi}^{n-1}\right|<G\ (\pi=0,1,2\ldots)$$

die beiden Summen

$$y^n\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)=y^n(1-x)\sum_{\mu=0}^{\infty}s_\mu^{n-1}x^\mu$$

und

$$x^m\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)=x^m(1-y)\sum_{\nu=0}^{\infty}s_{m-1}^{\nu}y^\nu$$

im Bereich (A, A_1) und daher auch im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben. Soll also der in unserem Satze auftretende Klammerausdruck in der Umgebung des Punktes (1, 1) unter endlicher Grenze bleiben, so muß

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)\,y^\nu+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)\,x^\mu\right|<G'$$

sein für alle (x, y) des Bereiches (B, B_1), welche den Ungleichungen $|1-x|\leqq\delta$, $|1-y|\leqq\delta_1$ genügen.

Digitized by Google

Man wähle nun in B_1 n verschiedene Punkte y_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ aus, von denen keiner mit 1 zusammenfallen soll und für die $|y_\lambda - 1| \leqq \delta_1$ ist. Wegen der Voraussetzung der absoluten Konvergenz von $s(x, y)$ im Gebiete $|x| < 1$, $|y| < 1$ sind die Konvergenzradien aller Zeilen und Kolonnen $\geqq 1$, so daß man eine Zahl G'' angeben kann von der Eigenschaft:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} |q_\mu(y_\lambda)| < G''.$$

Infolgedessen ist

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\lambda^\nu p_\nu(x) = G_\lambda, \text{ wobei } |G_\lambda| < G' + G'', \lambda = 1, 2, \ldots n.$$

Da nun die Determinante dieses Gleichungssystems als Differenzenprodukt der y_λ nicht verschwindet, so kann man $p_\nu(x)$ ausdrücken in der Form: [1])

$$p_\nu(x) = c_1^{(\nu)} G_1 + c_2^{(\nu)} G_2 + \cdots c_n^{(\nu)} G_n,$$

wobei die $c_\varkappa^{(\nu)}$ alle unter endlicher Grenze G''' bleiben. Daher ist

$$|p_\nu(x)| < n G'''(G' + G'')$$

für alle x des Bereiches B, die der Ungleichung $|1 - x| \leqq \delta$ genügen. Damit ist unsere Behauptung für die Zeilen — entsprechend für die Kolonnen — erwiesen.[2])

Wir dürfen sonach in (1) die beiden Summen nicht unterdrücken, außer wenn alle in Betracht kommenden Zeilen und Kolonnen im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben. Dagegen ist offenbar

$$\lim_{x,\, y=1} \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' p_\nu(x)\,(y^n - y^\nu) = 0; \quad \lim_{x,\, y=1} \sum_{\mu=0}^{m-1}{}' q_\mu(y)\,(x^m - x^\mu) = 0,$$

wenn $\sum'$ die Summation über die in (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen bezw. Kolonnen bedeutet. Man kann ferner in (1) die Exponenten m und n durch beliebige andere ganze Zahlen m_1 und n_1 ersetzen, da ja $\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)\right| < G$ und ebenso $\left|\sum_{\mu=0}^{m-1} q_\mu(y)\right| < G$.

---

[1]) Einer ähnlichen Schlußweise bedient sich Herr Hartogs. Diss. p. 21.

[2]) Eigentlich ist zunächst nur die Endlichkeit in der dem Bereich B angehörigen Umgebung des Punktes 1 bewiesen. Vermöge der absoluten Konvergenz der $p_\nu(x)$ für $|x| < 1$ folgt daraus indessen sofort die Endlichkeit im ganzen Bereich B.

Digitized by Google

So kommen wir zu dem Ergebnis:

I. „Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und konvergiert $s_m^n(1, 1)$ gegen den Wert s, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Relation

$$\lim_{x, y=1} s(x, y) = s \tag{2}$$

im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ [1]) darin, daß in (B, B_1) die Zeilen und Kolonnen sämtlich unter endlichen Grenzen bleiben."

II. „Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und konvergiert $s_m^n(1, 1)$ gegen den Wert s, sind ferner $p_{\alpha_1}(x), p_{\alpha_2}(x) \ldots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche $B \leqq A$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y)$, $q_{\beta_2}(y), \ldots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen, die im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben (die Zahlen m und n sind endlich [2]) und entweder 0 oder $\geqq 2$) und sind m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so besteht immer im Bereiche (B, B_1) die Beziehung

$$\lim_{x, y=1}\left\{s(x, y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1} - x^{\beta_\mu})\right\} = s. \tag{3}$$

Die Reihe $s(x, y)$ selbst bleibt dagegen im Bereiche (B, B_1) nicht unter endlicher Grenze."

Wir wollen den Satz II, der im Falle $m = 0$, $n = 0$ und nur in diesem Falle in den ersten übergeht, den allgemeinen Abelschen Grenzwertsatz nennen. Sofern m und n von Null verschieden sind, besagt der Satz, daß $s(x, y)$ in der dem Bereiche (B, B_1) angehörigen Umgebung des Punktes (1, 1) nicht endlich bleibt, daß aber die Art des Unendlichwerdens durch das Verhalten einer endlichen Anzahl von Zeilen und Kolonnen charakterisiert wird.

Man kann die willkürlichen Exponenten n_1 und m_1 noch so wählen, daß je eine beliebige Zeile und Kolonne aus der Gleichung (3) wegfällt. Dies ist durchaus verständlich. Denn, da die Summe der n Zeilen in der Umgebung des Punktes (1) unter endlicher Grenze bleiben muß, so ist durch $n - 1$ Zeilen das Unendlichwerden der n^{ten} Zeile schon bestimmt. $n - 1$ Zeilen und $m - 1$ Kolonnen genügen also schon, um das Verhalten von $s(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (1, 1) zu charakterisieren und nur soviele brauchen

[1]) Diese Ungleichung soll bedeuten: (B, B_1) ist Teilbereich von (A, A_1).

[2]) Die Endlichkeit von m und n ergibt sich unmittelbar daraus, daß infolge der Konvergenz von $s(1, 1)$ die Partialsummen aller p_ν und q_μ für genügend große μ und ν unter einer festen Grenze bleiben.

Digitized by Google

auch in der Gleichung (3) auftreten. Daraus geht auch hervor, daß m und n nicht den Wert 1 haben können; sonst wäre es möglich, die Gleichung $\lim_{x,y=1} s(x,y) = s$ auszusprechen, ohne daß alle Zeilen und Kolonnen endlich blieben, im Widerspruch mit I.

Es kann vorkommen, daß sich die Gleichung (3) in einem Teilbereiche (B', B_1') von (B, B_1) auf (2) reduziert, wenn eben die in (3) auftretenden Zeilen und Kolonnen in (B', B_1') endlich bleiben. Man hat daher zu beachten, daß man aus der Konvergenz von $s(1,1)$ und der Gültigkeit von (2) für einen Bereich (B', B_1') nicht die gleiche Relation für einen beliebigen anderen Bereich $(B, B_1) > (B', B_1')$ [aber $< (A, A_1)$] schließen darf.

Bleibt $s(x,y)$ — die Konvergenz von $s(1,1)$ vorausgesetzt — in einem Bereiche (B, B_1) unter endlicher Grenze, so folgt daraus schon die Gleichung (2). Es gibt also bei konvergentem $s(1,1)$ nur die zwei Möglichkeiten:

a) $\lim_{x,y=1} s(x,y) = s$,

b) $|s(x,y)|$ hat die obere Unbestimmtheitsgrenze ∞.

Umgekehrt: Ist $\lim_{x,y=1} s(x,y)$ vorhanden und gleich s und bleiben nicht alle Kolonnen und Zeilen unter endlichen Grenzen, so kann $s(1,1)$ nicht konvergieren und — wie man leicht sieht — auch nicht endlich oszillieren.

Die Gleichung (2) ist also nicht allein keine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $s(1,1)$ (wie bei Potenzreihen einer Veränderlichen), sondern sie kann unter Umständen sogar dazu dienen, die Divergenz von $s(1,1)$ nachzuweisen. Dagegen bildet Satz II eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $s(1,1)$ und ist, wie das dritte Kapitel zeigen wird, in gewissem Sinne umkehrbar. Diese Analogie zum Abelschen Satze bei Potenzreihen einer Veränderlichen gibt uns eben die Berechtigung, Satz II den allgemeinen Abelschen Satz zu nennen.

3. Es möge das Vorhergehende durch einige Beispiele erläutert werden.

1. $$a_\mu^\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\binom{\nu-p}{\mu}, \qquad \begin{matrix}\mu = 0,1,2\ldots \\ \nu = 1,2,3\ldots\end{matrix} \qquad 0! = 1$$

$$a_\mu^0 = \binom{1-p}{\mu-1} - \frac{1}{2}\binom{3-p}{\mu}, \qquad a_0^0 = -\frac{1}{2}, \qquad 3 \leqq p < 4.$$

$s(1,1)$ ist konvergent und hat den Wert

$$s = \frac{1}{2^{p-1}}\,\frac{1-e^2}{e^2}.$$

(Dagegen sind p_0, p_1 und p_2 divergent und ihre Partialsummen bleiben nicht unter endlicher Grenze; infolgedessen versagt hier der Satz von § 2.)

Digitized by Google

Ferner ist

$$s(x, y) = \frac{1}{(1+x)^{p-1}} \left(y e^{-y(1+x)} - \frac{1+x^2}{2} \right).$$

Zeilen und Kolonnen bleiben innerhalb (A, A_1) unter endlichen Grenzen, daher muß in (A, A_1)

$$\lim_{x, y=1} s(x, y) = \frac{1}{2^{p-1}} \frac{1-e^2}{e^2}$$

sein, was man in der Tat sofort erkennt.

2. Setzt man dagegen

$$a_\mu^\nu = \frac{(-1)^{\mu+\nu-1}}{(\nu-1)!} \binom{\nu - p}{\mu}; \quad \nu \geqq 1, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots$$

$$a_\mu^0 = \left(\binom{1-p}{\mu - 1} - \frac{1}{2} \binom{3-p}{\mu} \right) (-1)^\mu$$

$$a_0^0 = -\frac{1}{2}, \qquad 3 \leqq p < 4,$$

so sind die vier ersten Zeilen eigentlich divergent, die übrigen sowie die Kolonnen alle konvergent. Man erkennt, daß $s(1, 1)$ konvergiert und den Wert 0 hat, während

$$s(x, y) = \frac{1}{(1-x)^{p-1}} \left(y e^{(x-1)y} - \frac{1+x^2}{2} \right).$$

Nach dem allgemeinen Abelschen Satze ist nun im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x, y=1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=0}^{3} p_\nu(x) (y^{n_1} - y^\nu) \right\} = 0$$

oder für $n_1 = 0$:

$$\lim_{x, y=1} \left\{ s(x, y) + \frac{1}{(1-x)^{p-1}} (1-y) - \frac{1}{1!} \frac{1}{(1-x)^{p-2}} (1-y^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!} \frac{1}{(1-x)^{p-3}} (1-y^3) \right\} = 0,$$

was man leicht verifiziert, während $s(x, y)$ selbst nicht unter endlicher Grenze bleibt.

Digitized by Google

3. Sei $s(1,1)$ konvergent und $\lim\limits_{x,y=1} s(x,y) = s(1,1)$ im Bereiche (A, A_1). Bildet man nun $s_1(x,y) = s(x,y) + (1-y)\,e^{-\frac{1}{(1-x)^2}}$, so ist wiederum $s_1(1,1)$ konvergent und gleich $s(1,1)$. Nun ist aber $\lim\limits^{x=1} e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} = 0$,[1]) wenn $x = 1 - \rho e^{\vartheta i}$ so gegen 1 strebt, daß $-\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{4}$ und es ist $\left| e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} \right| \leqq 1$ für $\vartheta = \pm\frac{\pi}{4}$. Beschränkt man also x auf einen Bereich B, für den $-\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}$, so ist

$$\lim_{x,y=1} s_1(x,y) = s.$$

Wählt man jedoch einen Teilbereich von A, der dieser Ungleichung nicht mehr genügt, so sind wir auf den Satz II angewiesen, der uns eben liefert:

$$\lim_{x,y=1} \left\{ s_1(x,y) + (y-1)\,e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} \right\} = s.$$

4. Wir wollen nun auch noch den Fall untersuchen, daß die Stelle (1, 1) eine „isolierte Stelle" bedingter Konvergenz ist, d. h. daß die Doppelreihe $s(x,y)$ für $x=1$, $y=1$ bedingt konvergiert, ohne im ganzen Gebiete $|x|<1$, $|y|<1$ absolut zu konvergieren. Nach den Untersuchungen des Herrn Hartogs[2]) sind die folgenden Fälle möglich:

1. Es ist $X<1$, $Y<1$, wobei X und Y die unteren Grenzen der Konvergenzradien aller Zeilen und Kolonnen bedeuten. Dann konvergiert die Doppelreihe für $|x|<X$, $|y|<Y$ absolut, während es nur eine endliche Anzahl von Punkten (x_0, y_0) $(|x_0|>X, |y_0|>Y)$ gibt, für welche noch bedingte Konvergenz der Reihe eintreten kann.

2. Es ist $X<1$, $Y\geqq 1$ (oder $X\geqq 1$, $Y<1$). Dann konvergiert die Reihe auch noch für $|x|<1$, $y=1$, während sie mindestens in dem Gebiete $|x|<X$, $|y|<1$ absolut konvergiert. Die Anzahl der y-Werte, für die eine solche bedingte Konvergenz eintreten kann, ist wiederum endlich.

Wir wenden uns zunächst zu Fall 1. Es ist auch hier die Relation (1) von Nr. 1 noch gültig. Der Klammerausdruck in dieser Gleichung stellt, da bis auf eine ganze rationale Funktion mit $x^m y^n \sum\limits_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa$ identisch, eine im Kreisgebiete $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergente Doppelreihe und infolgedessen eine für jeden inneren Punkt des Bereiches $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$ reguläre analytische Funktion dar. Das gleiche gilt zufolge einer in Nr. 2 gemachten

[1]) cf. Pringsheim, Münch. Ber. 1900, p. 39.
[2]) Diss. p. 18 ff.

Digitized by Google

Bemerkung von $y^{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)+x^{m}\sum_{\mu=0}^{m-1} q_\mu(y)$. Angenommen, es gebe einen Bereich $(B, B_1)\leqq(A, A_1)$, der $(0,0)$ und $(1,1)$ enthält und in dem die Funktion $s(x,y)$ regulär ist, ausgenommen $(1,1)$ und diejenigen Punkte, deren eine Koordinate 1 ist,[1]) so sind für alle Punkte von $\begin{cases}B\\B_1\end{cases}$ außer $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ sämtliche in (1) auftretenden $\begin{cases}\text{Zeilen}\\\text{Kolonnen}\end{cases}$ regulär und umgekehrt. Es wiederholen sich nun alle Schlüsse von Nr. 2 dieses Paragraphen. Diejenigen Zeilen und Kolonnen, die in B bezw. B_1 unter endlichen Grenzen bleiben und nur diese dürfen aus (1) gestrichen werden. Wir erhalten daher den Satz:

„Ist die Stelle $(1,1)$ eine isolierte Stelle bedingter Konvergenz für die Doppelreihe $s(x,y)$ $(X<1,\ Y<1)$ und gibt es einen den Punkt $(0,0)$ und $(1,1)$ enthaltenden Bereich $(B, B_1)\leqq(A, A_1)$, innerhalb dessen die Funktion $s(x,y)$ regulär ist (mit Einschluß der Begrenzung außer $(1,1)$ und denjenigen Punkten, deren eine Koordinate 1 ist), sind ferner $p_{\alpha_1}(x)\ldots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche B nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y),\ldots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen von entsprechender Eigenschaft, und m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so ist im Bereiche (B, B_1)

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+\sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1}-y^{\alpha_\nu})+\sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1}-x^{\beta_\mu})\right\}=s.$$

Zweiter Fall: $X<1$, $Y\geqq 1$. Die Kolonnen brauchen jetzt gar nicht mehr fortgesetzt zu werden, da sie alle mindestens den Konvergenzradius 1 besitzen. Die Funktion $s(x,y)$ ist in diesem Falle dann und nur dann nach dem Punkte $(1,1)$ fortsetzbar innerhalb (A, A_1), wenn es einen 0 und 1 enthaltenden Bereich $B<A$ gibt, in dem die in (1) auftretenden Zeilen regulär sind (mit Einschluß der Begrenzung von B außer $x=1$).

Unser Satz nimmt jetzt die Form an:

„Ist die Stelle $(1,1)$ eine isolierte Stelle bedingter Konvergenz für die Doppelreihe $s(x,y)$ $(X<1,\ Y\geqq 1)$ und gibt es einen $x=0$ und $x=1$ enthaltenden Bereich $B\leqq A$, so daß im Bereich (B, A_1) die Funktion $s(x,y)$ regulär ist (mit Einschluß der Begrenzung außer $(1,1)$ und den Punkten, deren eine Koordinate 1 ist), sind

[1]) Einen solchen Bereich gibt es dann und nur dann, wenn $s(x,y)$ innerhalb (A, A_1) nach der Umgebung des Punktes $(1,1)$ fortsetzbar ist.

Digitized by Google

ferner $p_{\alpha_1}(x) \ldots p_{\alpha_n}(x)$ die Zeilen, die im Bereiche B nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y) \ldots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen, welche im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ dasselbe Verhalten zeigen und sind m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so ist im Bereiche (B, B_1):

$$\lim_{x,y=1} \left\{ s(x,y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1} - x^{\beta_\mu}) \right\} = s.“$$

Beispiel:

$$s(x,y) = \frac{1}{(1+2x)^2}\left(y\, e^{-y(1+2x)} - \frac{1+4x^2}{2} \right).$$

Für $|x| < \frac{1}{2}$, $|y| < \infty$ konvergiert die Doppelreihe absolut, für $|x| > \frac{1}{2}$, $y = 1$ noch bedingt. Die Zeilen p_0, p_1, p_2 haben den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$, die übrigen den Radius ∞. Indessen sind die drei ersten Zeilen $\left(\text{nämlich } -\frac{1+4x^2}{2(1+2x)^2}, \frac{1}{(1+2x)^2}, -\frac{1}{(1+2x)}\right)$ innerhalb des Bereiches A, nach dem Punkte 1 fortsetzbar und bleiben unter endlichen Grenzen. Daher ist nach unserem Satze, da alle Kolonnen endlich bleiben:

$$\lim_{x,y=1} s(x,y) = s(1,1) = \frac{1}{9}\left(e^{-3} - \frac{5}{2} \right).$$

§ 4.

Unsere nächste Aufgabe soll darin bestehen, den Abelschen Grenzwertsatz in analoger Weise, wie es bei Potenzreihen einer Veränderlichen von Frobenius, Hölder u. a. ausgeführt worden ist, zu erweitern. Dabei möge es gestattet sein, die sich notwendig erweisenden Hilfssätze etwas allgemeiner zu fassen, als es unsere eigentliche Aufgabe verlangen würde.

Der folgende Hilfssatz ist unter dem Namen „Cauchyscher Grenzwertsatz“ bekannt:

„Ist $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = s$, so ist auch $\lim_{\nu=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots s_\nu}{\nu+1} = s.“$

Jensen[1]) hat diesem Satz noch eine allgemeinere Form gegeben, deren Übertragung auf Doppelfolgen folgendermaßen lautet:

[1]) Comptes rendus T. 106, p. 833.

Digitized by Google

I. „Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und sind m_1 und n_1 zwei Zahlen von der Eigenschaft, daß $|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}| < G$ für $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$, ist ferner $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^\nu$ eine Doppelreihe, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$1.\quad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |\alpha_\mu^\nu| \quad \text{ist divergent,}$$

$$2.\quad \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_\mu^\nu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu\right|} < G \quad \text{für jedes } m \text{ und } n, \tag{2}$$

$$3.\quad \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_{\mu_1}^\nu|}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} |\alpha_\mu^{\nu_1}|}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = 0 \tag{3}$$

für jedes μ_1 bezw. ν_1, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\,\alpha_\mu^\nu}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = s^u. \tag{4}$$

Beweis:

$$\frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} - s =$$

$$= \frac{\left(\sum_{\mu=0}^{m'}\sum_{\nu=0}^{n'} + \sum_{\mu=0}^{m'}\sum_{\nu=n'+1}^{n} + \sum_{\nu=0}^{n'}\sum_{u=m'+1}^{m} + \sum_{u=m'+1}^{m}\sum_{\nu=n'+1}^{n}\right)(s_{m_1+u}^{n_1+\nu}\,\alpha_\mu^\nu - s\,\alpha_\mu^\nu)}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu}$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

Digitized by Google

wenn wir die vier Quotienten der rechten Seite der Reihe nach mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 bezeichnen. Wegen (2) ist nun

$$|Q_4| < \varepsilon,$$

wenn man m' und n' so bestimmt, daß für $\mu \geqq m'+1$, $\nu \geqq n'+1$

$$|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu} - s| < \frac{\varepsilon}{G}.$$

Ferner ist

$$|Q_2| < (G+|s|)\frac{\sum_{\mu=0}^{m'}\sum_{\nu=n'+1}^{n}|\alpha_\mu^\nu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\mu^\nu\right|} < \varepsilon \text{ für } n \geqq N,$$

wenn man N so bestimmt, daß

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n}|\alpha_{\mu_1}^\nu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\mu^\nu\right|} < \frac{\varepsilon}{(G+|s|)(m'+1)} \text{ sofern } n \geqq N,\ \mu_1 = 0, 1, 2, \ldots m'.$$

Ebenso findet man ein M, so daß für $m \geqq M$:

$$|Q_3| < \varepsilon$$

wird. Endlich kann man noch M und N so groß angeben, daß gleichzeitig für $m \geqq M$, $n \geqq N$

$$|Q_1| < \varepsilon.$$

Somit wird die linke Seite von (5) kleiner als 4ε für jedes $m \geqq M$, $n \geqq N$, w. z. b. w.

Die Bedingung (3) ist immer erfüllt, wenn alle Zeilen und Kolonnen von $\Sigma\alpha_\mu^\nu$ absolut konvergieren; z. B. $\alpha_\mu^\nu = \frac{1}{(\mu+\nu+1)^2}$.

Für unsere Anwendungen ist indessen nur der Fall $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu\gamma_\nu$ von Bedeutung. Unter dieser Voraussetzung reduzieren sich die Bedingungen (1), (2), (3) auf die folgenden:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}|\beta_\mu| \text{ und } \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu| \text{ seien divergent,} \qquad (1')$$

Digitized by Google

$$\frac{\sum_{\mu=0}^{m}|\beta_\mu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu\right|}<G \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{\nu=0}^{n}|\gamma_\nu|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu\right|}<G. \tag{2'}$$

(3') ist durch unseren Ansatz $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu \gamma_\nu$ von selbst erfüllt.

$\beta_\mu = 1$ und $\gamma_\nu = 1$ ergeben den Satz:

„Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und $|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}|<G\left(\binom{\mu}{\nu}=0,1,2\ldots\right)$, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{(m+1)(n+1)}=s^u,$$

welcher die Erweiterung des ursprünglichen Cauchyschen Grenzwertsatzes darstellt.

Wir können in dem Falle $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu \gamma_\nu$ das erhaltene Resultat auch durch eine wiederholte Anwendung des folgenden Satzes erzielen, der ebenfalls eine Übertragung des Cauchy-Jensenschen Grenzwertsatzes bildet:

II. „Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und $|s_{m_1+\mu}^{\nu}|<g_\mu$[1]$\left(\binom{\mu}{\nu}=0,1,2\ldots\right)$, ist ferner $\sum_{\mu=0}^{\infty}|\beta_\mu|$ eine divergente Reihe, für die immer $\frac{\sum_{\mu=0}^{m}|\beta_\mu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu\right|}<G$, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{m}s_{m_1+\mu}^{n}\beta_\mu}{\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu}=s^u. \tag{6}$$

[1]) Die Ungleichung soll bedeuten: $|s_{m_1+\mu}^{\nu}|$ bleibt bei fixiertem μ für alle ν unter einer festen Grenze g_μ. Diese Grenze wird im allgemeinen von μ abhängig sein, was durch den Index angedeutet ist. Konvergiert s_μ^ν gegen einen endlichen Grenzwert, so ist das Ungleichungspaar $|s_{m_1+\mu}^{\nu}|<g_\mu$, $|s_\mu^{n_1+\nu}|<g_\nu$ äquivalent mit $|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}|<G$.

Digitized by Google

Der Beweis dieses Satzes schließt sich so eng an den entsprechenden bei einfachen Folgen an, daß es überflüssig sein dürfte, ihn hier auszuführen.

Aus diesem Satze, den wir sehr oft anzuwenden haben, leiten wir I auf folgende Weise ab: Es sei

$$t_m^n = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^n \beta_\mu}{\sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu}.$$

Dann ist

$$|t_m^n| < g_m \text{ für jedes } m \text{ und } n.$$

Ist ferner für jedes μ und n

$$|s_\mu^{n_1+n}| < g_n,$$

so ist auch:

$$|t_m^{n_1+n}| < G g_n \text{ für jedes } m \text{ und } n.$$

Ist nun $\Sigma\gamma_\nu$ eine Reihe von gleicher Eigenschaft wie $\Sigma\beta_\mu$, so findet man nach II:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} t_m^{n_1+\nu}\gamma_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu} = s \text{ oder } \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\beta_\mu\gamma_\nu}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\mu\gamma_\nu} = s.$$

Hinzugefügt sei noch, daß diese Folge die Eigenschaft besitzt, für alle m und n unter einer festen endlichen Grenze zu bleiben.

Da für jede konvergente Folge s_μ^ν zwei Zahlen m_1 und n_1 von der in I und II verlangten Eigenschaft existieren, so ist sowohl I als auch II für jede konvergente Doppelfolge gültig. Die Bedingung $|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}| < g$ bezw. $|s_{m_1+\mu}^{\nu}| < g_\mu$ ist jedoch durchaus nicht notwendig. Es kann in speziellen Fällen z. B. eintreten, daß (4) oder (6) für $m_1 = 0$, $n_1 = 0$ besteht, ohne daß $|s_\mu^\nu| < g$ bezw. $|s_\mu^\nu| < g_\mu$ ist.

Beispiel: $s_\mu^\nu = (\nu+1)^{3-\mu}$ $(\mu > 0)$; $s_0^\nu = -(\nu+1)^2 - (\nu+1)$;

$\lim_{m,n=\infty} \frac{s_0^n + s_1^n + \cdots s_m^n}{m+1} = \lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = 0$, obwohl s_0^ν, s_1^ν und s_2^ν nicht unter endlichen Grenzen bleiben; definiert man dagegen $s_0^\nu = (\nu+1)^3$, so ist dieser Grenzwert nicht mehr vorhanden. In beiden Fällen

Digitized by Google

jedoch ist $\lim_{m,n=\infty} \frac{s_3^n + s_4^n + \cdots s_{m+3}^n}{m+1} = 0$. Wir wollen diese Verhältnisse noch etwas genauer studieren:

Es sei

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s,$$

aber es sei erst für $m \geqq m_1 - m' - 1$ $(m_1 > m')$

$$\frac{\left|\sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n\right|}{m+1} < G_m \text{ oder, was dasselbe ist } |s_m^n| < g_m \text{ für } m \geqq m_1.$$

Dann ist

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\mu=0}^{m_1-m'-1} s_{m'+\mu}^n = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten, so folgt:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=m_1-m'}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s$$

oder nach leichter Umformung:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^n}{m+1} = s,$$

wobei gleichzeitig $\frac{\left|\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^n\right|}{m+1} < G_m, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$

Wir kommen so zu dem Resultat: Ist

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s \qquad (7)$$

Digitized by Google

und ist $|s_m^n| < g_m$ für $m \geqq m_1$, so ist auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^{n}}{m+1} = s. \tag{8}$$

Konvergiert s_μ^ν selbst gegen einen endlichen Grenzwert s' und ist der Grenzwert (7) vorhanden und gleich s, so folgt aus (8) und II, daß $s = s'$ sein muß.

Iterierte Anwendung dieses Ergebnisses liefert uns:

$$\text{Ist } \lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}}{(m+1)(n+1)} = s \text{ und } \begin{matrix} |s_m^n| < g_m \text{ für } m \geqq m_1 > m' \\ |s_m^n| < g_n \text{ für } n \geqq n_1 > n' \end{matrix} \tag{9}$$

so ist auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{(m+1)(n+1)} = s. \tag{10}$$

Konvergiert s_μ^ν und existiert der Grenzwert (9), so ist s auch der Grenzwert von s_μ^ν.

Man kann schließlich unter geeigneten Voraussetzungen analoge Sätze über die allgemeinen Quotienten $\frac{\sum\sum \alpha_\mu^\nu s_\mu^\nu}{\sum\sum \alpha_\mu^\nu}$ etc. aufstellen. Eine andere Verallgemeinerung, die für uns wichtiger ist, werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

§ 5.

Wir wenden uns nach den vorausgegangenen Betrachtungen der Untersuchung sogenannter Cesàroscher Mittelwerte zu, um schließlich die Resultate von § 3 zu verallgemeinern.

1. Die im folgenden zu betrachtenden Mittelwerte der Doppelfolge s_μ^ν sind von der Form

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\, \alpha_\mu^\nu(m,n) = s, \tag{1}$$

wobei die $\alpha_\mu^\nu(m,n)$ Elemente passend gewählter vierfach unendlicher Zahlenfolgen sind. Bleibt dann für alle m und n

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\, \alpha_\mu^\nu(m,n) \right| < G, \tag{2}$$

Digitized by Google

so wollen wir den Mittelwert (1) einen normal konvergenten Mittelwert nennen. Existiert der Mittelwert (1), ohne normal konvergent zu sein, kann man jedoch zwei Zahlen m' und n' angeben, derart, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{m'+\mu}^{n'+\nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(m,n) = s$$

normal konvergent ist, so wollen wir den Mittelwert (1) auf einen normal konvergenten Mittelwert reduzierbar nennen.

Unsere nächste Aufgabe besteht in dem Nachweis, daß die bei der Erweiterung des Abelschen Satzes zu verwendenden Mittelwerte auf normal konvergente reduzierbar sind.

2. Im Anschluß an Cesàro [1]) definieren wir das arithmetische Mittel k^{ter} Ordnung einer einfachen Zahlenfolge s_ν auf folgende Art:

Ist $S_n^{(\varkappa)} = S_0^{(\varkappa-1)} + S_1^{(\varkappa-1)} + \cdots S_n^{(\varkappa-1)}$, $S_n^{(0)} = s_n$, $\varkappa = 0,1,2 \ldots k$

und existiert $\lim_{n=\infty} k! \dfrac{S_n^{(k)}}{(n+1)^k}$, so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel k^{ter} Ordnung der Folge s_ν.

Wollen wir diese Definition zweckmäßig auf Doppelfolgen ausdehnen, so zeigt sich zunächst, daß wir bei der Bildung des arithmetischen Mittels beliebiger Ordnung uns die Möglichkeit offen lassen müssen, alle Glieder der Folge s_μ^ν, bei denen μ oder ν kleiner als gewisse Zahlen m' und n' sind, wegzulassen. So hat z. B. die divergente Folge $s_\mu^\nu = \left(1 + (\mu+1)^{3-\nu}\right)\left(1 + (-1)^\nu\right)$ kein konvergentes arithmetisches Mittel, wenn man alle Elemente der Folge berücksichtigt. Dagegen existiert $\lim_{m,n=\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=3}^{n+3} s_\mu^\nu = 1$. So werden wir zur der Definition veranlaßt:

Ist

$$\left.\begin{aligned} S_{m,\varkappa}^{n,\lambda} &= S_{m,\varkappa}^{0,\lambda-1} + S_{m,\varkappa}^{1,\lambda-1} + \cdots S_{m,\varkappa}^{n,\lambda-1} \\ &= S_{0,\varkappa-1}^{n,\lambda} + S_{1,\varkappa-1}^{n,\lambda} + \cdots S_{m,\varkappa-1}^{n,\lambda} \qquad \varkappa = 0,1,2 \ldots k \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} S_{\mu,\varkappa-1}^{\nu,\lambda-1}, \qquad \lambda = 0,1,2 \ldots l \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei

$$S_{m,0}^{n,0} = s_{m'+m}^{n'+n}$$

zu setzen ist und existiert

$$\lim_{m,n=\infty} k!\, l! \frac{S_{m,k}^{n,l}}{(m+1^k)(n+1)^l}, \quad (2)$$

[1]) Sur la multiplication des séries. Bull. sc. math. (2) 14. 1890, p. 114—120.

Digitized by Google

so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel der Folge s_μ^ν von der Ordnung (k, l) und dem Index (m', n'). (Um den Index anzudeuten, werden wir, wenn es erforderlich ist, $S_{m,k}^{n,l}(m', n')$ schreiben statt $S_{m,k}^{n,l}$.)

Es bestehen für $S_{m,k}^{n,l}$ die Relationen — analog denen bei einfachen Folgen —

$$S_{m,k}^{n,l} = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1} S_{\mu,k-\varkappa}^{n,l} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\lambda-1-\nu}{\lambda-1} S_{m,k}^{\nu,l-\lambda} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}\binom{n+\lambda-1-\nu}{\lambda-1} S_{\mu,k-\varkappa}^{\nu,l-\lambda} \tag{3}$$

also insbesondere:

$$S_{m,k}^{n,l} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+k-1-\mu}{k-1}\binom{n+l-1-\nu}{l-1} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}. \tag{3'}$$

Definiert man $0! = 1$, so ist in unserer Festsetzung auch die Definition des arithmetischen Mittels von der Ordnung $(0, 0)$, $(k, 0)$ und $(0, l)$ enthalten. Das Mittel von der Ordnung $(0, 0)$, welches der Grenzwert der Folge selbst ist, kann — da schon in § 3 erledigt — von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wir nehmen daher an, daß mindestens k von 0 verschieden ist.

Es sei also nunmehr

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} S_{m,k}^{n,l}(m', n') = s, \tag{4}$$

doch sei dieser Mittelwert nicht normal konvergent. Wir wollen seine Reduzierbarkeit auf einen normal konvergenten Mittelwert beweisen. Wir setzen

$$T_{m,k}^{n,l} = S_{m,k}^{n,l} \frac{l!}{(n+1)^l}. \tag{5}$$

Wegen (4) gibt es dann zwei Zahlen M und N, so daß für $m \geqq M$, $n \geqq N$

$$|T_{m,k}^{n,l}| < G(m+1)^k.$$

Dann ist auch für $m \geqq M+1$, $n \geqq N$

$$|T_{m-1,k}^{n,l}| < G(m+1)^k,$$

Digitized by Google

woraus durch Subtraktion:

$$|T^{n,l}_{m,k-1}| < 2G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+1,\ n \geqq N.$$

Also auch

$$|T^{n,l}_{m-1,k-1}| < 2G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+2,\ n \geqq N.$$

Daraus erhält man:

$$|T^{n,l}_{m,k-2}| < 4G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+2,\ n \geqq N$$

und so fortfahrend, allgemein:

$$|T^{n,l}_{m,k-\varkappa}| < 2^\varkappa G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+\varkappa,\ n \geqq N. \qquad (6)$$
$$\varkappa = 0, 1, 2, \ldots k.$$

$$< g_m \text{ für } m \geqq M+\varkappa,\ n \geqq N. \qquad (6a)$$

Ist $m_2 \geqq M+k$, so ist also

$$|T^{n,l}_{m_2+\mu,0}| < g_\mu \text{ [1]} \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots$$

Es ist nun für $m \geqq m_2 \geqq M+k$

$$\frac{k!\,T^{n,l}_{m,k}}{(m+1)^k} = \frac{k!}{(m+1)^k}\left(T^{n,l}_{m_2-1,k} + \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1}\right)$$

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!}{(m+1)^k}\left(T^{n,}_{m_2-1,k} + \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1}\right) = s$$

und der absolute Betrag des linksstehenden Ausdruckes ist kleiner als g_m.

Da nun vermöge (6)

$$\left|\frac{k!}{(m+1)^k} T^{n,l}_{m_2-1,k}\right| < G\,\frac{(m_2+1)^k}{(m+1)^k}\cdot k!$$

so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!}{(m+1)^k} \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1} = s$$

und es bleibt gleichzeitig der linksstehende Ausdruck seinem Betrage nach unter g_m. [2]

[1] Wenn $M=0$, gilt übrigens, wie leicht ersichtlich, (6) für die ganze Reihe $m = 0, 1, 2 \ldots$

[2] Selbstverständlich sind nicht alle im Laufe der Rechnung vorkommenden g_m dieselben Zahlen. Doch ist es im Interesse der Übersichtlichkeit unterblieben, die einzelnen g_m durch Indizes voneinander zu unterscheiden.

Digitized by Google

Multipliziert man diese Gleichung mit $\lim_{m,n=\infty}\left(\frac{m+1}{m-m_2+1}\right)^k=1$ und schreibt wieder m statt $m-m_2$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+\mu,k-1}=s,\\&\left|\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+\mu,k-1}\right|<g_m,\quad m=0,1,2\ldots\end{aligned}\right\}\ (7_1)$$

Nunmehr sei angenommen, man habe bereits gezeigt, daß

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}T^{n,l}_{m_2+\mu,k-\varkappa}=s\qquad(7_\varkappa)$$

und daß der absolute Betrag dieses Ausdruckes unter g_m bleibt $(m=0,1,2\ldots)$. Dann ist

$$\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}T^{n,l}_{m_2+\mu,k-\varkappa}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}\left(T^{n,l}_{m_2-1,k-\varkappa}+\sum_{i=0}^{\mu}T^{n,l}_{m_2+i,k-\varkappa-1}\right)$$

$$=T^{n,l}_{m_2-1,k-\varkappa}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}+\sum_{i=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+i,k-\varkappa-1}\sum_{\mu=i}^{m}\binom{m+\varkappa-\mu-1}{\varkappa-1}$$

$$=T^{n,l}_{m_2-1,k-\varkappa}\binom{m+\varkappa}{\varkappa}+\sum_{i=0}^{m}\binom{m+\varkappa-i}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2+i,k-\varkappa-1}.$$

Wegen (6) ist für $\varkappa\leqq k-1$

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\binom{m+\varkappa}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2-1,k-\varkappa}=0$$

und gleichzeitig die linke Seite kleiner als g_m. So erhalten wir die Gleichung:

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-\mu}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2+\mu,k-\varkappa-1}=s\qquad(7_{\varkappa+1})$$

Digitized by Google

und

$$\left|\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-\mu}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-\varkappa-1}\right|<g_m,\quad m=0,1,2\ldots$$

Da die Gleichung $(7_\varkappa)$ für $\varkappa=1$ richtig ist, so ist sie damit für alle Werte $\varkappa=1,2,\ldots k$ bewiesen. Ist nun bereits von vorneherein

$$\left|\frac{k!\,l!}{(m+1)^k(n+1)^l}S^{n,l}_{m,k}\right|<g_n,\quad n=0,1,2\ldots, \tag{8}$$

so bleibt diese Eigenschaft, wie leicht aus unserem Beweisgange ersichtlich, auch für den in (7_k) auftretenden Ausdruck bestehen und der Mittelwert in (7_k), der sich auch in der Form schreiben läßt — wenn man $m_2+m'=m_1$ setzt —

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!\,l!}{(m+1)^k(n+1)^l}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}\binom{n+l-\nu-1}{l-1}s^{n'+\nu}_{m_1+\mu}=s$$

ist dann bereits normal konvergent.

Ist aber die Ungleichung (8) nicht erfüllt, so unterscheiden wir zwei Fälle: *a)* $l=0$. Wir unterdrücken dann, wenn etwa erst für $n\geqq N$ (8) erfüllt ist, alle $n<N$ und erhalten, indem wir noch $n'+N=n_1$ setzen, sofort den normal konvergenten Mittelwert

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}s^{n_1+n}_{m_1+\mu}=s.$$

b) $l>0$. Dann wenden wir dieselbe Überlegung, die uns zu (7_k) geführt hat, unter Vertauschung von m und n noch einmal an. Ist

$$\left|\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,0}\right|<G\ \text{für}\ n\geqq N,$$

und ist $n_1-n'\geqq N+l$, so findet man den normal konvergenten Mittelwert

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{k!\,l!}{(m+1)^k(n+1)^l}\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}\binom{n+l-\nu-1}{l-1}s^{n_1+\nu}_{m_1+\mu}=s. \tag{9}$$

Zusammenfassung: Besitzt die Folge s^ν_μ ein arithmetisches Mittel s von der Ordnung (k,l) und dem Index (n',n'), so gibt es zwei Zahlen m_0, n_0 derart, daß für jedes $m_1\geqq m_0$, $n_1\geqq n_0$ das Mittel von der Ordnung (k,l) und dem Index (m_1,n_1) normal konvergent ist und ebenfalls den Wert s besitzt.

Unsere Behauptung von der Reduzierbarkeit des Cesàroschen Mittelwertes ist damit bewiesen.

Digitized by Google

Will man nun eine Folge s_μ^ν daraufhin untersuchen, ob sie einen Mittelwert besitzt, so wird man am besten gleich nach einem normal konvergenten Mittelwert fragen (ein anderer braucht gar nicht zu existieren; dazu ist auch im Falle seiner Existenz der Index unbekannt). Zu diesem Zwecke hat man zu sehen, ob es zwei Zahlenpaare m_0, n_0 und k, l gibt, für welche die Relationen bestehen:

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}s_\mu^{n_0+n}\right| < g_n \\ \left|\frac{l!}{(n+1)^l}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+l-\nu-1}{l-1}s_{m_0+m}^{\nu}\right| < g_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array} = 0, 1, 2 \ldots \quad (10)$$

Hat man zwei solche Zahlenpaare gefunden, so braucht man nur eine einzige Konvergenzuntersuchung auszuführen, indem man zu bestimmen sucht, ob der Mittelwert von der Ordnung (k, l) und dem Index (m_0, n_0) existiert. Ist dies nicht der Fall, so gibt es, wie man leicht zeigen kann, überhaupt keinen Mittelwert von der Ordnung (k, l) und man wird die Zahlen k, l jedenfalls größer wählen müssen. Vorteilhaft wird bei der Konvergenzuntersuchung auch die Verwendung der folgenden notwendigen Bedingung sein, die man ebenso wie bei einfachen Folgen beweist:

„Für die Existenz des $\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k(n+1)^l} S_{m,k}^{n,l}$ sind notwendig die Relationen:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{S_{m,k-\varkappa}^{n,l-\lambda}}{(m+1)^k(n+1)^l} = 0,$$

wobei $\varkappa$ und λ jeden Wert von 0 bis k bezw. l annehmen können und nur nicht gleichzeitig Null sein dürfen. Im Falle $\varkappa = k$, $\lambda = l$ hat man also

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{s_m^n}{(m+1)^k(n+1)^l} = 0“.$$

Es möge schließlich das Vorhergehende durch ein Beispiel erläutert werden:

$s_\mu^\nu = \frac{(-1)^\mu+1}{2}\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)(-1)^\nu$ für $\mu > 5$. $\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]$ = größte ganze Zahl, die $\leqq \frac{\nu}{2}$ ist$\right)$

$s_1^\nu = s_3^\nu = -s_5^\nu = -\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)$

$s_0^\nu = s_4^\nu = \left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)\left((-1)^\nu - 1\right)$

$s_2^\nu = \left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)\left((-1)^\nu + 1\right)$.

Digitized by Google

Wir wollen untersuchen, ob diese Folge einen Mittelwert besitzt. Die Bedingung (10) ist erfüllt für das Wertesystem $m_0 = 6$, $n_0 = 0$; $k = 0$, $l = 1$. Jedoch ist die notwendige Bedingung $\lim_{m,\, n=\infty} \frac{s_m^n}{n+1} = 0$ nicht erfüllt. Wir müssen daher die Ordnung erhöhen. In der Tat existiert erst der Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und ist für $m_1 \geqq 6$, $n_1 \geqq 0$ normal konvergent. Außerdem ist auch der Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (2, 0) und (4, 0) vorhanden, ist jedoch nicht normal konvergent.

Es sei noch erwähnt, daß wir für normal konvergente Mittelwerte den Satz haben: „Besitzt die Folge s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von dem Index (m, n), dem Werte s und der Ordnung (k, l), so hat sie auch einen normal konvergenten Mittelwert von gleichem Index und Werte und von der Ordnung (k', l'), wo $\left.\begin{matrix} k' \\ l' \end{matrix}\right\}$ jede beliebige ganze Zahl größer oder gleich $\left.\begin{matrix} k \\ l \end{matrix}\right\}$ ist".

Aus diesem Satze, der ebenso wie sein bekanntes Analogon für einfache Folgen eine Folgerung aus dem Cauchy-Jensenschen Grenzwertsatze ist, geht hervor, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den folgenden Abschnitten immer $k = l$ setzen könnten.

Ebenso wie das erwähnte Theorem scheinen auch alle ähnlichen rein arithmetischen Sätze über die Mittelwerte einfacher Folgen erhalten zu bleiben, so z. B. der Satz, daß der Cesàrosche Mittelwert von der Ordnung k immer existiert, wenn der Höldersche[1]) von derselben Ordnung vorhanden ist.[2])

3. Bekanntlich besteht nun für Potenzreihen einer Veränderlichen der folgende Satz:

$$\text{„Ist } s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{k!\, S_n^{(k)}}{(n+1)^k} = s, \text{ so ist } \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \text{ für}$$

$|x| < 1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A)

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s",$$

---

[1]) Hölder definiert den Mittelwert k^{ter} Ordnung durch die Rekursionsformel: $s_n^{(\varkappa)} = \frac{s_0^{(\varkappa-1)} + s_1^{(\varkappa-1)} + \cdots s_n^{(\varkappa-1)}}{n+1}$, $s_\nu^{(0)} = s_\nu$ $\varkappa = 1, 2, \ldots k$. (Math. Ann. 20, p. 535.)

[2]) S. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Dissertation, Berlin 1907, p. 19—22.

Digitized by Google

welcher eine Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes darstellt. Um dieses Theorem auf Doppelreihen zu übertragen, schicken wir noch folgenden Hilfssatz [1]) voraus:

„Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} \frac{a_\mu^\nu}{(\mu+1)^p(\nu+1)^q} = a$ und $\frac{|a_\mu^\nu|}{(\mu+1)^p(\nu+1)^q} < G$

für alle μ und ν, wobei p und q beliebige reelle Zahlen größer als -1 bedeuten, so ist

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu \text{ absolut konvergent für } |x|<1, |y|<1, \quad (1)$$

$$\lim_{x,y=1} (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) \quad (2)$$

im Bereiche $(A, A_1)^u$.

Beweis: (1) folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\mu+1)^p(\nu+1)^q x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$.

Um auch (2) zu beweisen, gehen wir aus von der Identität:

$$(1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} x^\mu y^\nu = 1$$

$$\left(\binom{\mu+p}{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+p+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(p+1)}\right).$$

Daraus folgt

$$(1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) =$$

$$= (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \left\{a_\mu^\nu - \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\right\} x^\mu y^\nu =$$

$$= (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \left(\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} + \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} + \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu,\nu=m+1,\,n+1}^{\infty} \right) \left(\frac{a_\mu^\nu}{\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}} - a\,\Gamma(p+1)\Gamma(q+1) \right) \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} x^\mu y^\nu.$$

[1]) Vergl. für einfache Reihen: Pringsheim, Münch. Ber. 1901, p. 518, für mehrfache Reihen: Bromwich und Hardy, Some extensions... p. 184—185.

Digitized by Google

Nun ist aber

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{(\mu+1)^p}{\binom{\mu+p}{\mu}} = \Gamma(p+1), \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{(\nu+1)^q}{\binom{\nu+q}{\nu}} = \Gamma(q+1);$$

daher folgt aus unseren Voraussetzungen, daß

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \left\{ \frac{a_\mu^\nu}{\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}} - a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) \right\} = 0$$

und daß die $\{\ \}$ ihrem absoluten Betrage nach für alle μ und ν unter einer festen Zahl G_1 bleibt.

Somit ist, wenn wir m und n so fixieren, daß für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ der absolute Betrag der $\{\ \}$ kleiner als ε wird:

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \left| \sum_{\mu,\nu=m+1,\,n+1}^{\infty} \right| <$$

$$< \varepsilon\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} |x|^\mu\,|y|^\nu$$

$$= \varepsilon \left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} \left(\frac{|1-y|}{1-|y|}\right)^{q+1}$$

$$< \varepsilon\, g^{p+1}\, g_1^{\,q+1} < \frac{\sigma}{4},$$

wenn $\varepsilon < \dfrac{\sigma}{4\,g^{p+1}\,g_1^{\,q+1}}$ gewählt wird.

Ferner:

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \left| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \right| <$$

$$< G_1\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+q}{\nu} |y|^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu} |x|^\mu$$

$$< G_1 \left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} (n+q)^n\,|1-y|^{q+1}\,(n+1)$$

$$< G_1\, g^{p+1}\,(n+q)^n\,|1-y|^{q+1}\,(n+1) < \frac{\sigma}{4}$$

Digitized by Google

wenn

$$|1-y|<\delta_1<\left(\frac{\sigma}{4\,G_1\,g^{p+1}\,(n+q)^n\,(n+1)}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Ebenso findet man ein δ, so daß für $|1-x|<\delta$

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{m}\right|<\frac{\sigma}{4}.$$

Endlich ist

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\right|<$$

$$<|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}.\,G_1\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}|x|^{\mu}\,|y|^{\nu}$$

$$<G_1\,(m+p)^m\,(n+q)^n\,(m+1)\,(n+1)\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}$$

$$<\frac{\sigma}{4}\text{ für }|1-x|<\delta,\ |1-y|<\delta_1.$$

Also ist tatsächlich

$$\left|(1-x)^{p+1}\,(1-y)^{q+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu}^{\nu}\,x^{\mu}\,y^{\nu}-a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\right|<\sigma$$

für alle (x, y) im Gebiet (A, A_1), die den Ungleichungen $|1-x|<\delta$, $|1-y|<\delta_1$ genügen.

4. Besitzen nun die Partialsummen s_{μ}^{ν} der Doppelreihe $\Sigma\,a_{\mu}^{\nu}$ einen normal konvergenten Mittelwert s von der Ordnung (k, l) und dem Index $(0,0)$, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x,y=1}(1-x)^{k+1}\,(1-y)^{l+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}=s.$$

Es ist nun leicht zu erkennen, daß

$$(1-x)^{k+1}(1-y)^{l+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}=s\,(x,y)$$

Digitized by Google

ist. Also ist $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x, y=1} s(x, y) = s.$$

Besitzt jetzt, allgemein, die Folge s_μ^ν einen Mittelwert s von der Ordnung (k, l) und dem Index (m', n'), so gibt es nach Nr. 2 zwei Zahlen m_0, n_0 derart, daß für jedes $m_1 \geqq m_0$, $n_1 \geqq n_0$ das Mittel vom Index (m_1, n_1) existiert und normal konvergent ist. Wir wählen $m_1 = m_0 + 1$, $n_1 = n_0 + 1$ und definieren

$$b_\pi^\varkappa = a_{m_1+\pi}^{n_1+\varkappa},\ b_0^\varkappa = s_{m_1}^{n_1+\varkappa} - s_{m_1}^{n_1+\varkappa-1},\ b_\pi^0 = s_{m_1+\pi}^{n_1} - s_{m_1+\pi-1}^{n_1},\ b_0^0 = s_{m_1}^{n_1}.$$

Dann konvergiert die Reihe $x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\pi, \varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut und es ist

$$\lim_{x, y=1} x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\pi, \varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s.$$

Wir folgern wie in § 3, daß

$$\lim_{x, y=1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=0}^{n_0} p_\nu(x)\,(y^{n_0+1} - y^\nu) + \sum_{\mu=0}^{m_0} q_\mu(y)\,(x^{m_0+1} - x^\mu) \right\} = s \quad (1$$

und daß dieser Klammerausdruck für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent ist. Hieraus ergibt sich: Alle Zeilen von $n_0 + 1$ (inkl.) ab, alle Kolonnen von $m_0 + 1$ ab haben mindestens den Konvergenzradius 1. Ist X die untere Grenze der Konvergenzradien der Zeilen, Y die der Kolonnen, so konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<\rho$, $|y|<\rho_1$, wenn $\begin{cases}\rho \\ \rho_1\end{cases}$ die kleinere der Zahlen $\begin{cases}X \\ Y\end{cases}$ und 1 ist.

Da die Ungleichungen (10) von Nr. 2 erfüllt sind, so beweist man leicht die Ungleichungen für den Bereich (A, A_1):

$$|p_\nu(x)|<g_\nu,\ \nu \geqq n_0+1, \qquad |q_\mu(y)|<g_\mu,\ \mu \geqq m_0+1$$

und

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n_0} p_\nu(x)\right|<G \qquad \left|\sum_{\mu=0}^{m_0} q_\mu(y)\right|<G.$$

Wir kommen so zu dem Ergebnis, daß alle Resultate und Schlüsse von § 3 auf unseren jetzigen Fall übertragen werden können. Von den Grenzwertsätzen wollen wir als wichtigsten nur den allgemeinen Abelschen Satz in erweiterter Fassung aussprechen:

Digitized by Google

„Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und besitzt die Folge s_μ^ν ein arithmetisches Mittel s von der Ordnung (k, l) und beliebigem Index, sind ferner $p_{\alpha_1}(x) \dots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche $B \leqq A$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y) \dots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen von entsprechender Eigenschaft im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ (m und n sind endlich und entweder gleich 0 oder mindestens gleich 2) und sind m_1, n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so besteht immer im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ die Beziehung

$$\lim_{x, y = 1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1} - x^{\beta_\mu}) \right\} = s.^{1})$$

Sie geht dann und nur dann in $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ über, wenn alle Zeilen und Kolonnen in (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben."

[1]) Wir haben den Mittelwert von der Ordnung (k, l) nur für ganzzahliges k und l definiert. Indessen ist schon von Hadamard (Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse, Paris 1892, p. 82) für einfache Folgen eine Definition des Mittelwertes mit nicht ganzzahliger Ordnung gegeben worden, die wir in folgender Weise auf Doppelfolgen übertragen können:

Ist $S_{m,\gamma}^{n,\delta} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+\gamma-\mu-1}{\gamma-1} \binom{n+\delta-\nu-1}{\delta-1} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}$, wobei

$\gamma \geqq 0$, $\delta \geqq 0$ und $\binom{m+\gamma-\mu-1}{\gamma-1} = \dfrac{\Gamma(m+\gamma-\mu)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(m-\mu+1)}$ und existiert

$$\lim_{m, n = \infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\delta+1)}{(m+1)^\gamma\,(n+1)^\delta} S_{m,\gamma}^{n,\delta} = s,$$

so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel der Folge s_μ^ν von der Ordnung (γ, δ) und dem Index (m', n').

Besitzt nun die Folge s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung (γ, δ) und dem Index $(0, 0)$, so bleibt unser Hilfssatz von Nr. 3 anwendbar und wir erhalten für diesen Fall dasselbe Resultat wie für die Ordnung (k, l). Ja, es läßt sich sogar, wenn man den im Text eingeschlagenen Beweisgang etwas abändert, der Satz beweisen:

„Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und besitzen die s_μ^ν einen Mittelwert s von der Ordnung (γ, δ) und dem Index $(0, 0)$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ darin, daß die sämtlichen Zeilen und Kolonnen im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben."

Soweit unterscheidet sich der Mittelwert von nicht ganzzahliger Ordnung nicht von dem von ganzzahliger Ordnung. Existiert aber ein nicht normal konvergenter Mittelwert vom Index (0, 0) und der Ordnung (γ, δ), ohne daß alle Zeilen und Kolonnen in $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ unter endlichen Grenzen bleiben, so läßt sich unser allgemeiner Abelscher Satz nicht mehr aufrecht erhalten und wir müssen in diesem Falle überhaupt auf einen Grenzwertsatz verzichten. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Anzahl der Zeilen bezw. Kolonnen, die nicht unter

Digitized by Google

Über den Bereich der absoluten Konvergenz können wir aussagen:

„Besitzt die Folge s_μ^ν einen Mittelwert von irgend einer Ordnung und beliebigem Index, so gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Zeilen und Kolonnen, deren Konvergenzradius kleiner als 1 ist. Die Doppelreihe $s(x, y)$ selbst konvergiert sicher in dem Gebiete $|x| < \rho$, $|y| < \rho_1$ absolut, wo ρ bezw. ρ_1 die kleinere der Zahlen X und 1 bezw. Y und 1 ist."[1])

Es sei noch ein Beispiel für unsere neue Erweiterung des Abelschen Satzes angeführt:

$$s(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)^2} + \frac{1-2x+x^2}{1-y^2}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, $|y| < 1$. Ferner hat, da

$$s_\mu^\nu = \frac{(-1)^\mu + 1}{2}\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)(-1)^\nu \quad (\mu \geqq 2)$$

$$s_1^\nu = -\left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right), \quad s_0^\nu = \left(\left[\frac{\nu}{2}\right]+1\right)\left(1+(-1)^\nu\right),$$

die Folge der s_μ^ν einen Mittelwert von der Ordnung $(1, 2)$ und dem Index $(0, 0)$. Der Wert desselben ist $s = \frac{1}{8}$. Da die drei ersten

endlicher Grenze [in (B, B_1)] bleiben, entweder 0 oder ∞ ist. Ebenso kann man nachweisen, daß ein Mittelwert von nicht ganzzahliger Ordnung, sofern er nicht bereits normal konvergent ist, nicht auf einen normal konvergenten Mittelwert reduzierbar ist, weshalb die im Text angewandte Methode bei nicht ganzzahliger Ordnung versagen muß.

Das folgende Beispiel möge diese Bemerkungen noch erläutern:

Sei $s(x, y) = (1-x)^{\gamma+1} e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$.*) Da $e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$ im Bereiche A_1 nicht unter endlichen Grenzen bleibt (cf. § 3, Nr. 3, Beispiel 3), so kann diese Reihe für $y = 1$ kein konvergentes oder endlich oszillierendes arithmetisches Mittel irgend einer Ordnung haben. Daher kann vermöge Gleichung (10) von Nr. 2 $s(x, y)$ für $x = 1$, $y = 1$ kein arithmetisches Mittel irgend einer ganzzahligen Ordnung besitzen. Dagegen existiert das Mittel von der Ordnung $(\gamma, 0)$ und dem Index $(0, 0)$. Es ist nämlich $s(x, y) = (1-x)^{\gamma+1}(1-y)\sum S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} x^\mu y^\nu$, also ist $\sum S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} x^\mu y^\nu = \frac{e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}}{1-y}$ und daraus $S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} = 0$ für $\mu > 0$, $\lim_{\mu,\nu=\infty} \frac{S_{\mu,\gamma}^{\nu,0}}{(\mu+1)^\gamma} \Gamma(\gamma+1) = 0$; nach § 3, Nr. 3, Beispiel 3, gibt es einen Bereich $B_1 < A_1$, in dem $e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$ endlich bleibt; somit besteht in (A, B_1) die Gleichung: $\lim_{x,y=1} s(x, y) = s = 0$, während im ganzen Bereiche (A, A_1) überhaupt kein Grenzwertsatz aufrecht zu erhalten ist, da alle Kolonnen unendlich werden.

[1]) Erweiterung eines von Herrn Hartogs, Diss. p. 4, gegebenen Satzes, die man auch leicht direkt ableiten kann.

*) $\gamma > 0$, aber nicht ganzzahlig.

Digitized by Google

Kolonnen im Bereiche A_1 nicht unter endlicher Grenze bleiben, so besagt unser allgemeiner Satz:

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+(x^{m_1}-1)\left(\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1-y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+(x^{m_1}-x)\left(-\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{2}{1-y^2}\right)+(x^{m_1}\quad x^2)\left(\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1-y^2}\right)\right\}=\frac{1}{8}$$

oder

$$\lim_{x,y=1}\left\{\frac{1}{(1+x)(1+y)^2}+\frac{x^{m_1}-1+x-x^2}{(1+y)^2}\right\}=\frac{1}{8}.$$

Setzt man dagegen $x=e^{\varphi i}$, $y=e^{\psi i}$ und sind φ und ψ von 0 und π verschieden, so hat $s(x,y)$ für $x=e^{\varphi i}$, $y=e^{\psi i}$ ebenfalls noch einen Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (0, 0). Man findet

$$\lim_{\substack{x=e^{\varphi i}\\ y=e^{\psi i}}} s(x,y)=\frac{1}{(1+e^{\varphi i})(1+e^{\psi i})^2}+\frac{1-2e^{\varphi i}+e^{2\varphi i}}{1-e^{2\psi i}},$$

da jetzt alle Zeilen und Kolonnen endlich bleiben.

5. Unsere neue Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes gilt natürlich in der in § 3 angegebenen Weise auch für solche Konvergenzstellen des Cesàroschen Mittelwertes, welche außerhalb des Bereiches der absoluten Konvergenz von $s(x,y)$ liegen; es wird wohl nicht nötig sein, den dort gegebenen Satz eigens für den jetzigen Fall auszusprechen. Dagegen soll die hiehergehörige Erweiterung zweier Hartogsscher Sätze angegeben werden.

Herr Hartogs hat den folgenden Satz bewiesen: [1])

$s(x,y)$ kann, sobald $|x|>X$ ist, höchstens für τ (feste) Werte von y noch konvergieren. Gibt es Zeilen, und zwar in nur endlicher Anzahl, welche X zum Konvergenzradius besitzen, so ist τ gleich der Differenz der Stellenzeiger ν der ersten und der letzten unter denselben; gibt es jedoch keine oder unendlich viele solcher Zeilen, so ist $\tau=0$.

Die Erweiterung lautet:

„$s(x,y)$ kann, sobald $|x|>X$ ist, höchstens für τ (feste) Werte von y noch Cesàrosche Mittelwerte, gleichviel welcher Ordnung, besitzen“.[2])

Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie bei Herrn Hartogs, so daß er übergangen werden darf. Ferner bleibt die von Herrn Hartogs gegebene Zusammenstellung der möglichen Fälle (a. a. O., p. 21 u. 22) wörtlich gültig, wenn man nur das Wort „Konvergenz“

[1]) Diss. § 7, p. 21.

[2]) Der übrige Teil des Satzes bleibt ungeändert auch für die weitere Fassung gültig. — Unter den τ y-Werten sind auch diejenigen inbegriffen, für die $s(x,y)$ möglicherweise konvergiert.

Digitized by Google

entsprechend abändert. — Als Beispiel sei das l. c. p. 22 gegebene mit einer kleinen Modifikation hier angeführt:

$$s(x,y)=\frac{y^2-y^5}{1-2x}+\frac{1}{1+y}$$

$X=\frac{1}{2}\cdot Y=1$. Für $x=1$ $\left(\text{sogar jedes } |x|>\frac{1}{2}\right)$ und $y=\sqrt[3]{1}$ hat die Reihe noch einen Mittelwert von der Ordnung $(0,1)$. Es ist nämlich, wenn $y^3=1$ ist, für $n\geqq 5$

$$s_m^n(1,y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu y^\nu=\sum_{\nu=0}^{n}e^{\frac{2k+3}{3}\nu\pi i}\quad(k=0,1,2);$$

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{\sum_{\nu=5}^{5+n}s_m^\nu}{n+1}=\frac{1}{1+e^{\frac{2k\pi i}{3}}}.$$

Die fünfte und zweite Zeile hat den Konvergenzradius $X=\frac{1}{2}$. Tatsächlich ist hier die Anzahl der y-Werte, für die ein Mittelwert existiert, gleich τ, d. h. gleich 3.

Der zweite Satz des Herrn Hartogs lautet:

„Konvergieren für $y=1$ sämtliche Kolonnen (bedingt oder unbedingt) und konvergiert die Doppelreihe $s(x,1)$ für $x=1$, so konvergiert sie auch für $|x|<1$“.

Wir verallgemeinern:

„Besitzen sämtliche Kolonnen einen Mittelwert von der Ordnung l und besitzt s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung (k,l) und dem Index $(0,n_0)$ ($m_0=0$ ist eine Folge der ersten Voraussetzung), so besitzt $s(x,y)$ für $|x|<1$, $y=1$ einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung $(0,l)$ und dem Index $(0,n_0)$“.

Beweis: Setzt man

$$Q_m^{n,\lambda}(n_0)=\sum_{\nu=0}^{n}Q_m^{\nu,\lambda-1}(n_0),\quad\lambda=1,2,\ldots l,$$

$$Q_m^{n,0}(n_0)=\sum_{\nu=0}^{n+n_0}a_m^\nu,$$

Digitized by Google

so ist nach Voraussetzung

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} S^{n,l}_{m,k}(0, n_0) \equiv$$

$$\equiv \lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} \sum_{\pi=0}^{\mu} Q_\pi^{n,l}(n_0) = s. \quad (1)$$

Unsere Behauptung lautet dann dahin, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu Q_\mu^{n,l}(n_0) \quad (2)$$

für $|x| < 1$ vorhanden ist.

Nach Nr. 2 (6) ist

$$\left| \frac{l!}{(n+1)^l} \sum_{\pi=0}^{\mu} Q_\pi^{n,l}(n_0) \right| < 2^k \cdot G\,(\mu+1)^k, \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ n\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots,$$

woraus folgt, daß

$$\left| \frac{l!}{(n+1)^l} Q_\mu^{n,l}(n_0) \right| < 2^{k+1} G\,(\mu+1)^k.$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=0}^{m+p} x^\mu Q_\mu^{n+q,l}(n_0) - \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu Q_\mu^{n,l}(n_0) =$$

$$= \sum_{\mu=m+1}^{m+p} x^\mu Q_\mu^{n+q,l}(n_0) + \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu \left(Q_\mu^{n+q,l}(n_0) - Q_\mu^{n,l}(n_0) \right)$$

$$\left| \sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} x^\mu Q_\mu^{n_1+q,l}(n_0) \right| < \sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} 2^{k+1} G\,(\mu+1)^k |x|^\mu$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle p, q und n_1, wenn man m_1 so fixiert, daß

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} (\mu+1)^k |x|^\mu < \frac{\varepsilon}{2^{k+2} G}$$

für alle p, was wegen der Konvergenz von $\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^k |x|^\mu$ für $|x| < 1$ immer möglich ist. m_1 ist nun fixiert. Da die Kolonnen

Digitized by Google

alle ein Mittel von der Ordnung l besitzen, so läßt sich eine Zahl n_1 so angeben, daß

$$\left| Q_\mu^{n_1+q,l}(n_0) - Q_\mu^{n_1,l}(n_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(m_1+1)}, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots m_1.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m_1} x^\mu \left(Q_\mu^{n_1+q,l}(n_0) - Q_\mu^{n_1,l}(n_0) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und folglich

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m_1+p} x^\mu Q_\mu^{n_1+q,l}(n_0) - \sum_{\mu=0}^{m_1} x^\mu Q_\mu^{n_1,l}(n_0) \right| < \varepsilon \text{ für alle } p \text{ und } q \text{ w. z. b. w.}$$

Daß dieser Mittelwert normal konvergent ist, bedarf wohl keines weiteren Beweises.

Beispiel: $s(x,y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)^2}$ konvergiert absolut für $|x|<1$, $|y|<1$; für $x = e^{\varphi i}$, $y = e^{\psi i}$ (φ und ψ von 0 und π verschieden) existiert der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (0, 0). Infolgedessen existiert für $|x|<1$, $y = e^{\psi i}$ der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (0, 2) und dem Index (0, 0), für $|y|<1$, $x = e^{\varphi i}$ der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (1, 0) und dem Index (0, 0).

Anmerkung.

Zur Ergänzung dieses Kapitels mögen hier noch einige Erweiterungen des in der Einleitung erwähnten Satzes 2, der die Konvergenz der Zeilenreihe voraussetzt, angeführt werden. Die sehr einfachen Beweise dürfen wohl übergangen werden.

Der von Bromwich und Hardy gegebene Beweis[1]) des Satzes 2 stützt sich darauf, daß man unter Voraussetzung der Endlichkeit der Partialsummen die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\mu(y)$ und ihre Übereinstimmung mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu y^\nu$ zeigen kann. Durch zweimalige Anwendung des Abelschen Grenzwertsatzes für einfache Reihen folgt dann die Gleichung

$$\lim_{y=1} \lim_{x=1} s(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$$

für den Bereich (A, A_1).

[1]) l. c., p. 166—168.

Digitized by Google

Die Voraussetzung der Endlichkeit der Partialsummen ist indes eine sehr enge. Zunächst ist klar, daß der Grenzwertsatz sicher besteht, wenn $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu$ für $|y|<1$ absolut konvergiert. Bezeichnen wir mit R den einen Maximalradius der Potenzreihe (nach Herrn Hartogs), d. h. die obere Grenze aller r, für die ein von Null verschiedenes r' existiert, so daß $s(x,y)$ für $|x|<r$, $|y|<r'$ absolut konvergiert, so können wir den Satz aussprechen:

Konvergiert die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ und ist $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und $R>1$, so besteht im Bereiche (A, A_1) die Gleichung

$$\lim_{y=1}\lim_{x=1} s(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu.$$

Es ist also nur noch der Fall $R=1$ von Interesse. Hier kann man aber leicht den Satz aufstellen:

Konvergiert die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ und ist $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und $R=1$, so besteht in (A, A_1) die Gleichung $\lim_{y=1}\lim_{x=1} s(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ sicher, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu$ ist für $|y|<1$ absolut konvergent.

b) Bezeichnet man mit g_ν die obere Grenze des absoluten Betrags der Partialsummen der ν^{ten} Zeile, so ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{g_\nu} \leqq 1.$$

c) Es ist für alle x im Bereiche A und alle $|y| \leqq \rho < 1$

$$|s(x,y)| < G_\varrho$$

wie nahe auch ρ der 1 kommt.

Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn $s(x,y)$ für $x=1$, $|y| \leqq \rho < 1$ regulär ist.

Dieser Satz läßt eine Erweiterung zu für den Fall, daß die Zeilen alle arithmetische Mittel derselben Ordnung besitzen und die Reihe dieser Mittelwerte selbst wieder konvergiert oder einen Mittelwert besitzt.

Digitized by Google

Endlich kann man auch den Fall betrachten, daß die Zeilen zwar alle konvergieren, aber die $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ eigentlich divergent [1]) ist. Dann läßt sich nämlich der Satz aufstellen:

Ist die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ eigentlich divergent und konvergiert $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut, so besteht die Gleichung:

$$\lim_{\varrho_1=1} \lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty,$$

wenn eine der obigen Bedingungen *a*) *b*) *c*) erfüllt ist; und ohne weiteres ist diese Gleichung richtig, wenn $R>1$.

Schließlich sollen noch zwei Beispiele angegeben werden, in denen das Verhalten der Funktion $s(x, y)$ diametral verschieden von dem der Zeilenreihe ist und aus denen hervorgeht, daß der Satz 2 der Einleitung im Gegensatz zu Satz 1 kaum so modifiziert werden kann, daß er allgemein gültig ist.

1. Betrachten wir die Funktion:

$$s(x, y) = \frac{x + (2y-1) \sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^\lambda y^\lambda x^{2^\lambda}}{1-y}$$

Die Doppelreihe ist für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent; ihre Zeilenreihe konvergiert für $x=1$, $y=1$ gegen Null. Für $x=1$, $\varrho_1>\frac{1}{2}$ divergiert indessen die Kolonnenreihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\mu(\varrho_1)$ eigentlich. Daher ist $\lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty$ und also auch

$$\lim_{\varrho_1=1} \lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty,$$

obgleich die Zeilenreihe gegen Null konvergiert. (Es ist hier wesentlich, daß die absolute Konvergenz von $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$

[1]) Für Doppelreihen hat Herr Bromwich (Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 6, 1908, p. 68) gezeigt, daß $\lim_{\varrho, \varrho_1=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty$, wenn $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ eigentlich divergiert und die Partialsummen der Zeilen und Kolonnen unter endlichen Grenzen g_ν und g_μ bleiben. Diese letztere Voraussetzung ist unnötig eng und kann unter Anwendung bekannter Schlußweisen durch die Bedingung ersetzt werden, daß $p_\nu(\varrho)$ und $q_\mu(\varrho_1)$ im Intervalle $0 \leqq \varrho \leqq 1$, $0 \leqq \varrho_1 \leqq 1$ unter endlichen Grenzen bleiben. (Auch diese Bedingung ist nicht notwendig.)

Digitized by Google

feststeht. In der Tat zeigt das Beispiel $s(x, y) = \frac{1-x}{(1-y)(1-2xy)}$, bei dem die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu = 0$ ist, während die Kolonnenreihe für $\rho_1 > \frac{1}{2}$ eigentlich divergiert, daß der Grenzwertsatz wieder in Kraft treten kann, wenn die Reihe $s(x, y)$ nicht im ganzen Gebiet $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert.)

2. Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu$ eine Reihe mit dem Konvergenzradius 1, welche die Punkte einer reellen von unten gegen 1 konvergierenden Zahlenfolge $(y_\varkappa)$ zu Nullstellen besitzt und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$ eine eigentlich divergente Reihe, für die $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} = 1$. Man bestimme eine Zahlenfolge b_λ durch die Rekursionsformel:

$$a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \cdots a_0 b_\nu = \gamma_\nu$$

und dann eine monoton ins Unendliche wachsende Folge ganzer Zahlen m_λ so, daß

$$\overline{\lim_{\lambda=0}} \sqrt[m_\lambda]{|b_\lambda|} = 1.$$

Dann ist

$$s(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^{m_\lambda} y^\lambda$$

dargestellt durch eine für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergente Doppelreihe, deren Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$ eigentlich divergiert, während für jeden Wert $y = y_\varkappa$ $\lim_{x=1} s(x, y_\varkappa) = 0$ und infolgedessen $\overline{\lim_{y=1}} \lim_{x=1} |s(x, y)| = 0$ ist.

Digitized by Google

II. Der Abelsche Grenzwertsatz für dreifache Reihen.

§ 6.

Nachdem im vorhergehenden Kapitel der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen seine Erledigung gefunden hat, sollen jetzt dieselben Untersuchungen für dreifache Reihen ausgeführt werden. Die angewandten Beweismethoden erlauben uns dabei, sehr viele Ergebnisse des I. Kapitels zu übernehmen, so daß es uns möglich wird, die Aufmerksamkeit nahezu ausschließlich auf die merkwürdigen Unterschiede zwischen dreifachen und zweifachen Reihen zu richten.

1. In dem einfachsten Falle, daß die Partialsummen der dreifachen Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ unter endlicher Grenze bleiben, ist schon von Bromwich und Hardy (l. c. p. 166 o.) darauf aufmerksam gemacht worden, daß der Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes sich von dem Beweis bei zweifachen Reihen nicht prinzipiell unterscheidet und wir können unter Berufung auf die genannten Autoren den Satz an die Spitze stellen:

„Bleiben die Partialsummen der dreifachen Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ unter endlicher Grenze und konvergiert die Reihe gegen s, so konvergiert

$$s(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$$ [1])

für $|x_\nu| < 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ absolut und es gilt im Bereiche (A_1, A_2, A_3) [2]) die Relation:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s.$$"

---

[1]) Da wir jetzt die gleichwertigen Indizes μ_1, μ_2, μ_3 nebeneinander schreiben, o sollen in diesem Kapitel obere Indizes wieder eingeklammert werden.

[2]) D. h. in dem Teil des Kreisgebietes $|x_\nu| \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$, der gleichzeitig den Ungleichungen $\frac{|1 - x_\nu|}{1 - |x_\nu|} < g_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ genügt. Bromwich und Hardy setzen übrigens, wie schon in der Einleitung erwähnt, x_1, x_2, x_3 reell voraus.

Was den Beweis des Satzes betrifft, so kann er wie bei Doppelreihen auf zwei Arten geschehen, entweder nach der Dirichletschen Methode oder durch Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz in einem bestimmten, dem früheren Bereiche $\mathfrak{B}$ entsprechenden sechsdimensionalen Gebiet.

Digitized by Google

Liegt nun eine beliebige konvergente Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ vor, so sehen wir wiederum von der Untersuchung des Konvergenzbereiches ab und nehmen an, es sei $s(x_1, x_2, x_3)$ für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent. Wie früher können wir wieder eine neue Reihe $\sum b_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ aus der vorgelegten Reihe bilden, welche ebenfalls gegen s konvergiert und deren Partialsummen überdies unter endlicher Grenze bleiben. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$\sum_{\mu_1=0}^{m_1}\sum_{\mu_2=0}^{m_2}\sum_{\mu_3=0}^{m_3} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = s_{m_1,m_2,m_3}$$

$$s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} - s_{\mu_1-1,\mu_2,\mu_3} = \Delta_1 s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$$

und definieren entsprechend $\Delta_2 s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ und $\Delta_3 s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ und ist

$$|s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}| < G \quad \text{für} \quad \mu_\nu \geqq m_\nu - 1,$$

so definieren wir

$$b_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} = \Delta_1\Delta_2\Delta_3 s_{m_1+\pi_1,\,m_2+\pi_2,\,m_3+\pi_3} = a_{m_1+\pi_1,\,m_2+\pi_2,\,m_3+\pi}$$

$$\text{wenn } \pi_1, \pi_2, \pi_3 > 0,$$

dagegen

$$b_{0,\pi_2,\pi_3} = \Delta_2\Delta_3 s_{m_1,\,m_2+\pi_2,\,m_3+\pi_3} \quad \text{wenn } \pi_2 > 0,\ \pi_3 > 0$$

$$b_{\pi_1,0,0} = \Delta_1 s_{m_1+\pi_1,\,m_2,\,m_3} \qquad \text{„} \quad \pi_1 > 0$$

und entsprechend

$$b_{\pi_1,0,\pi_3},\ b_{\pi_1,\pi_2,0},\ b_{0,\pi_2,0},\ b_{0,0,\pi_3} \text{ und } b_{0,0,0} = s_{m_1,m_2,m_3}$$

und betrachten wie früher:

$$s_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi_1,\pi_2,\pi_3=0}^{\infty} b_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3}.$$

$\sum b_{\pi_1,\pi_2,\pi_3}$ ist jetzt ebenfalls konvergent, hat den Wert s und genügt der Ungleichung:

$$\left|\sum_{\pi_1,\pi_2,\pi_3=0}^{p_1,p_2,p_3} b_{\pi_1,\pi_2,\pi_3}\right| < g \quad \text{für alle } p_1, p_2, p_3.$$

Dann ist nach dem oben angeführten Satze im Bereiche (A_1, A_2, A_3):

$$\lim_{x_1,x_2,x_3=1} s_1(x_1, x_2, x_3) = s.$$

Digitized by Google

Man weist nun ohne Schwierigkeit die Identität nach:

$$\left.\begin{aligned} & x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \sum_{\pi_1,\pi_2,\pi_3=0}^{\infty} b_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3} = \\ & = \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{m_1-1,m_2-1,m_3-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1})(x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3})\, a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} + \\ & + C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} + \\ & + C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \\ & + s(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn C jeweils die Summation über die drei aus der $\{\ \}$ durch zyklische Vertauschung der Indizes zu bildenden Ausdrücke bedeutet.

Da nun der erste Term der rechten Seite für $\lim x_\nu = 1$ gegen Null konvergiert, so folgt zunächst aus der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ unter allen Umständen der Grenzwertsatz:

$$\lim_{x_1,x_2,x_3=1} \left(s(x_1, x_2, x_3) + C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \right.$$

$$\left. + C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right) = s. \quad (2)$$

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgesucht werden, daß man die beiden Zusatzsummen weglassen darf, d. h. daß sie für $\lim x_\nu = 1$ verschwinden.

2. Zu dem angegebenen Zwecke erweist es sich als notwendig, die Art des Unendlichwerdens zweifacher Reihen näher zu betrachten.

Es sei $s(x_1, x_2)$ eine für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$ absolut konvergente Doppelreihe, die im Bereiche $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2 = 1$ über alle Grenzen wächst.[1]) Ferner seien $s_{\mu_2}(x_1)$ und $s_{\mu_1}(x_2)$ einfache Reihen,[2]) die ebenfalls

[1]) D. h. $\overline{\lim_{x_1,x_2=1}} |s(x_1, x_2)| = \infty$.

[2]) Die Verschiedenheit des Arguments soll immer gleichzeitig Verschiedenheit der Funktionen bedeuten, so daß also $s_0(x_1)$ eine ganz andere Funktion von x_1 darstellt als $s_0(x_2)$ von x_2.

Digitized by Google

für $|x_1|<1$, $|x_2|<1$ absolut konvergieren und im Bereiche B_1 bezw. B_2 in der Umgebung der Stelle $x_1=1$ bezw. $x_2=1$ über alle Grenzen wachsen. Dann ist auch für den Ausdruck

$$S(x_1, x_2)=\sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s_{\mu_1}(x_2)+\sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s_{\mu_2}(x_1)$$

die obere Grenze des absoluten Betrages in der dem Bereiche (B_1, B_2) angehörigen Umgebung des Punktes $x_1, x_2=1$ unendlich.

Es können nun die folgenden beiden Fälle eintreten:

a) Es ist ein $S(x_1, x_2)$ durch Wahl der endlichen Zahlen M_1 und M_2 und der $s_{\mu_1}(x_2)$, $s_{\mu_2}(x_1)$, von denen beliebig viele, nur nicht alle, gleich Null sein dürfen, angebbar, so daß:

$$|s(x_1, x_2)-S(x_1, x_2)|<G$$

im Bereiche (B_1, B_2), wenn $|1-x_1|<\delta_1$, $|1-x_2|<\delta_2$. Diese letztere Ungleichung soll im folgenden, da uns ausschließlich das Verhalten der Reihen an der Stelle $x_1, x_2=1$ interessiert, immer stillschweigend vorausgesetzt werden, wenn von dem Bereiche (B_1, B_2) die Rede ist. [Entsprechend bei den Bereichen (B_2, B_3), (B_3, B_1) und (B_1, B_2, B_3).]

b) Es gibt kein $S(x_1, x_2)$ von der verlangten Eigenschaft.

Die Doppelreihen des Falles *a*) wollen wir als Reihen erster Art in (B_1, B_2) bezeichnen, die des Falles *b*) als solche zweiter Art in (B_1, B_2).

Einige Beispiele mögen diese Klassifikation der Doppelreihen erläutern:

1. Die Reihe $s(x_1, x_2)=\dfrac{1}{2-(x_1+x_2)}$ wächst an der Stelle $x_1, x_2=1$ im Bereiche (A_1, A_2) über alle Grenzen. Es ist hier unmöglich, einen Ausdruck $S(x_1, x_2)$ anzugeben, der von $s(x_1, x_2)$ subtrahiert eine endlich bleibende Funktion ergäbe. Denn es ist $|s(x_1, x_2)|<\begin{cases} G_{x_1} & \text{für jedes } x_2 \\ G_{x_2} & \text{„ „ } x_1 \end{cases}$, welche Ungleichungen auch für $S(x_1, x_2)$ gelten müßten und nach § 3 Nr. 2 zur Folge hätten, daß jedes der $s_{\mu_1}(x_2)$ und $s_{\mu_2}(x_1)$ von $S(x_1, x_2)$ endlich bleibt. Dann müßte aber auch $s(x_1, x_2)$ unter endlicher Grenze bleiben. Unser $s(x_1, x_2)$ ist also von der zweiten Art.

2. Betrachten wir dagegen

$$s(x_1, x_2)=\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\sum_{\mu_2=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu_2}(\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!}x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}=\sum_{\mu_1=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{\mu_1}x_2}-1)\,x_1^{\mu_1},$$

Digitized by Google

so bleibt $s(x_1, x_2)$ an der Stelle $x_1, x_2 = 1$ nicht unter endlicher Grenze, während

$$\left| s(x_1, x_2) + \sum_{\mu_1=0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \right| = \left| \sum_{\mu_1=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_1}\, x_2} x_1^{\mu_1} \right| < g.$$

Also ist $s(x_1, x_2)$ von der ersten Art.

Die Art der Doppelreihen ist von der Wahl des Bereiches (B_1, B_2) abhängig; so ist die Reihe

$$s(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - x_1} + e^{-\frac{1}{(1-x_1)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(1-x_2)^2}}$$

von der Art 1, wenn der Bereich $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ gemäß § 3, Nr. 3, Beispiel 3, passend gewählt wird, während im ganzen Bereich (A_1, A_2) die Reihe von der zweiten Art ist.

Eine zweifache Reihe kann in der Umgebung des Punktes (1, 1) unter endlicher Grenze bleiben, ohne daß die in ihr enthaltenen einfachen Reihen sich ebenso verhalten, während anderseits auch die einfachen Reihen endlich bleiben können, ohne daß die Funktion $s(x_1, x_2)$ an der Stelle (1, 1) endlich bleibt.

Beispiele: $\sum_{\mu_1=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_1}\, x_2} x_1^{\mu_1}$ bleibt unter endlicher Grenze, während die Zeilen $\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!} x_1^{\mu_1}$ über alle Grenzen wachsen.

$\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \frac{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}}{(\mu_1 + \mu_2 + 1)^2}$ bleibt in der Umgebung der Stelle $x_1, x_2 = 1$ nicht endlich, während alle Zeilen und Kolonnen an der Stelle (1, 1) sogar einen endlichen Grenzwert besitzen.

Selbst wenn aber $s(x_1, x_2)$ von der ersten Art unendlich wird und auch Zeilen und Kolonnen von $s(x_1, x_2)$ unendlich werden, besteht zwischen den Zeilen und Kolonnen von $s(x_1, x_2)$ und dem $S(x_1, x_2)$, welches $s(x_1, x_2)$ in seinem Unendlichwerden kompensiert, kein Zusammenhang, wie das Beispiel $s(x_1, x_2) = \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu_2} (\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ lehrt. Denn diese Reihe besitzt unendlich viele Zeilen, welche in der Umgebung der Stelle (1, 1) über alle Grenzen wachsen, während in dem zugehörigen $S(x_1, x_2)$ nur eine einzige Zeile auftritt $\left(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \right)$ und gerade an der Stelle, an der die vorgelegte Reihe überhaupt keine Zeile besitzt.

Digitized by Google

Es besteht also im allgemeinen kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Art der Doppelreihe und dem Verhalten ihrer Zeilen und Kolonnen. Wohl aber existiert ein solcher, wenn die Partialsummen der Reihe $s(1, 1)$ von einem bestimmten Indexpaar ab unter endlicher Grenze bleiben. Man kann nämlich den folgenden Satz beweisen:

1. Bleiben die Partialsummen $\sum_{\mu_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\mu_n=0}^{m_n} a_{\mu_1 \ldots \mu_n} = s_{m_1 \ldots m_n}$ der Reihe $\sum a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n}$ sämtlich unter endlicher Grenze, so bleibt auch die Reihe $\sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} = s(x_1, x_2 \ldots x_n)$ im Bereiche $(A_1, A_2 \ldots A_n)$ unter endlicher Grenze.

Beweis: Es ist

$$s(x_1, x_2 \ldots x_n) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} s_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}.$$

Daher

$$|s(x_1, x_2 \ldots x_n)| < g\,|1-x_1|\,|1-x_2|\ldots|1-x_n| \sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} |x_1|^{\mu_1} |x_2|^{\mu_2} \ldots |x_n|^{\mu_n}$$

$$= g \frac{|1-x_1|}{1-|x_1|} \cdot \frac{|1-x_2|}{1-|x_2|} \cdots \frac{|1-x_n|}{1-|x_n|} < g\, g_1\, g_2 \cdots g_n$$

w. z. b. w.

Daraus können wir die Folgerung ziehen:

2. Bleiben die Partialsummen s_{m_1, m_2} der Reihe $\sum_{\mu_1, \mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2}$ für $m \geqq M_1$, $n \geqq N_1$ unter endlicher Grenze, so ist in $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ $s(x_1, x_2)$ entweder endlich oder wird von der ersten Art unendlich und es ist in diesem Falle

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} - \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_2^{\mu_2} - \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} \right| < g,$$

d. h. das zu $s(x_1, x_2)$ gehörige $S(x_1, x_2)$ ist jetzt aus Zeilen und Kolonnen der Doppelreihe gebildet.

Der Satz leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß die Partialsummen von $\sum_{\mu_1, \mu_2=M_1+1, M_2+1}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ der Bedingung des Satzes 1 genügen und daß diese Reihe somit in (A_1, A_2) unter endlicher Grenze bleibt.

Digitized by Google

Endlich soll noch die Bemerkung ausgesprochen werden:

3. Wird $s(x_1, x_2)$ in (B_1, B_2) von der ersten Art unendlich, und sind

$$S(x_1, x_2) = \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s_{\mu_1}(x_2) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s_{\mu_2}(x_1)$$

und

$$S'(x_1, x_1) = \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s'_{\mu_1}(x_2) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s'_{\mu_2}(x_1)$$

zwei Ausdrücke, die das Unendlichwerden von $s(x_1, x_2)$ aufheben, so daß also:

$$|s(x_1, x_2) - S(x_1, x_2)| < G \text{ und } |s(x_1, x_2) - S'(x_1, x_2)| < G,$$

so folgt, daß

$$|s_{\mu_1}(x_2) - s'_{\mu_1}(x_2)| < g, \quad |s_{\mu_2}(x_1) - s'_{\mu_2}(x_1)| < g.$$

Es folgt nämlich aus den beiden vorausgesetzten Ungleichungen:

$$\left| \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} \left(s_{\mu_1}(x_2) - s'_{\mu_1}(x_2)\right) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} \left(s_{\mu_2}(x_1) - s'_{\mu_2}(x_1)\right) \right| < G',$$

woraus sich nach bekannter Schlußweise die Behauptung ergibt.

§ 7.

1. Nunmehr sind wir in der Lage, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Grenzwertsatz $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ aufzusuchen.

Wir wollen von $s(x_1, x_2, x_3)$ annehmen, daß die Partialsummen s_{μ_1, μ_2, μ_3} für $\mu_\nu \geqq m_\nu - 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ unter endlicher Grenze bleiben sollen und daß $s(x_1, x_2, x_3)$ im Bereiche $(B_1, B_2, B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ ebenfalls unter endlicher Grenze bleibt. Da dann die Reihe

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3 = m_1, m_2, m_3}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$$

in (B_1, B_2, B_3) nach § 6, Nr. 2, Satz 2, unter endlicher Grenze bleibt, so folgt dasselbe von

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} s(x_1, x_2, x_3) - \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=m_1,m_2,m_3}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \equiv \\ \equiv C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} \\ - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \\ + \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{m_1-1,m_2-1,m_3-1} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Von dem letzten Gliede der rechten Seite dürfen wir wegen seiner Endlichkeit absehen, so daß also

$$\left.\begin{aligned} \left| C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} - \right. \\ \left. - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right| < G. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nun legen wir den x_1 m_1 voneinander und von 1 verschiedene Werte, $x_1^{(\nu)}$ bei, die gleichzeitig dem Bereich B_1 und dem Kreisgebiet $|1 - x_1| < \delta_1$ angehören, und bestimmen m_1 verschiedene Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m_1}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu_1 \neq \mu_1' \\ 1 \quad \text{„} \quad \mu_1 = \mu_1' \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mu_1 = 0, 1, \ldots m_1 - 1. \\ (\mu_1' \text{ sei eine beliebige Zahl} \\ \text{dieser Reihe.}) \end{matrix} \quad (3)$$

Wir bilden jetzt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \left(C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} - \right.$$

$$\left. - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \right\} \right) \Bigg|$$

$$< G \sum_{\nu=1}^{m_1} |\lambda_\nu| < G'.$$

Digitized by Google

Jede der Reihen $\sum_{\mu_1, \mu_2 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ und

$\sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_3^{\mu_3}$ stellt eine einfache Potenzreihe in x_2 bezw. x_3 dar; ebenso enthält die zweite $\{\ \}$ der Ungleichung nur noch einfache Reihen in x_2 und x_3. Daher können wir setzen:

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_3^{\mu_3} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1, \mu_2 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_2^{\mu_2} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1, m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \right\} \equiv$$

$$\equiv - \sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1')}(x_3) - \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1')}(x_2),$$

so daß mit Rücksicht auf (3), wenn wir wieder μ_1 statt μ_1' schreiben:

$$\left| \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} - \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right| < g \tag{4}$$

$$\mu_1 = 0, 1, \ldots m_1 - 1.$$

Jede $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ ist also in (B_1, B_2) entweder endlich oder wird höchstens von der ersten Art unendlich. Die gleiche Aussage gilt selbstverständlich auch für die durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehenden Doppelreihen.

Aus (2) und (4) folgt nun:

$$\left| C \left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1, m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right| < G''$$

Digitized by Google

oder

$$\left| C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} \left(p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) + p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) - \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right) x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} \right| < G''.$$

Bezeichnen wir der Abkürzung halber die ( ) mit $q_{\mu_2,\mu_3}(x_1)$, so ist

$$\left| C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) \right\} \right| < G''.$$

Durch passende Wahl von m_2 festen Werten $x_2^{(\nu)}$ und geeignete Bestimmung von m_2 Konstanten $\varkappa_\nu$ erhalten wir durch gleiche Schlußweise, wie oben:

$$\left| \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) + \sum_{\nu=1}^{m_2} \varkappa_\nu \sum_{\mu_1,\mu_3=0}^{m_1-1,\,m_3-1} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_1,\mu_3}(x_2^{(\nu)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{m_2} \varkappa_\nu \sum_{\mu_1,\mu_2=0}^{m_1-1,\,m_2-1} x_1^{\mu_1} (x_2^{(\nu)})^{\mu_2} q_{\mu_1,\mu_2}(x_3) \right| < G'' \sum_{\nu=1}^{m_2} |\varkappa_\nu| < G'''$$

oder, wie wir zur Abkürzung schreiben können:

$$\left| \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) + \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} q'_{\mu_1}(x_3) \right| < G'''.$$

Aus dieser Ungleichung folgt aber bekanntlich:

$$|q_{\mu_2,\mu_3}(x_1)| < g'$$

oder:

$$\left| p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) + p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) - \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right| < g'.^{1}) \quad \begin{matrix} \mu_2 = 0, 1, 2, \ldots m_2 - 1 \\ \mu_3 = 0, 1, 2, \ldots m_3 - 1 \end{matrix} \tag{5}$$

Damit sind die notwendigen Bedingungen gefunden:

1. Jede der m_1 Reihen $\sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ muß in (B_2, B_3) entweder endlich bleiben oder darf höchstens von der ersten Art unendlich werden. Gleiches gilt von den durch zyklische

[1]) Entsprechend hat man durch zyklische Vertauschung der Indizes noch zwei andere Ungleichungssysteme.

Digitized by Google

Vertauschung hervorgehenden Reihen. (Für die Reihen $\sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$, für welche $\mu_1 \geqq m_1$ ist, ist die Forderung gemäß § 6, Nr. 2, Satz 2, von selbst erfüllt.)

2. Ersetzt man in (2) die Doppelreihen durch die Ausdrücke $\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2)$ und faßt diese mit den $\sum_{\mu_\nu=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_\nu^{\mu_\nu}$ zusammen, so müssen alle resultierenden einfachen Reihen unter endlichen Grenzen bleiben [in (B_1, B_2, B_3)].

Wir wollen eine Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$, für die es zu jedem M_1, M_2, M_3 ein $m_\nu \geqq M_\nu$ gibt, so daß $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} - \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=m_1,m_2,m_3}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ den angegebenen Bedingungen 1 und 2 genügt, reduktibel in (B_1, B_2, B_3) nennen.

Bleiben die Partialsummen von $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ von einem bestimmten Indextripel ab unter endlicher Grenze, so leuchtet aus den angestellten Überlegungen unmittelbar ein, daß die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) auch hinreichend ist dafür, daß $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) endlich bleibt und wir haben das Ergebnis:

Bleiben die Partialsummen s_{μ_1,μ_2,μ_3} der Reihe $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ für $\mu_\nu \geqq m_\nu$ unter endlicher Grenze und ist $s(x_1, x_2, x_3)$ für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) unter endlicher Grenze bleibt, in der Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3).[1])

2. Es soll nun gezeigt werden, daß im Falle der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ für die Gleichung $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ auch hinreicht. (Ihre Notwendigkeit ergibt sich aus dem Resultat von Nr. 1.) Dazu brauchen wir noch eine Eigenschaft der $p_{\mu_i}^{(\mu_2)}(x_3)$. Nehmen wir nämlich an, es sei $|s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}| < g$

[1]) Es sei hier ausdrücklich erwähnt, daß nur vom Verhalten der dreifachen Reihe in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ die Rede ist. Die Reihe braucht nicht im ganzen Gebiet (B_1, B_2, B_3) endlich sein, wie das Beispiel $s(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1) \sum_{\mu_2=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_2} x_3} x_2^{\mu_2}$ lehrt. Dieses Verhalten hat bei zweifachen Reihen — die Bedingungen des eben ausgesprochenen Satzes vorausgesetzt — kein Analogon.

Digitized by Google

für $\mu_\nu \geqq m_\nu - 1$ und es seien die Ungleichungen (4) und (5) der vorigen Nummer erfüllt. Dann ist

$$\sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$$

entweder endlich oder von der ersten Art in (A_1, A_3), und zwar ist nach § 6, Nr. 2, Satz 2

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} - \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu_3 = 0}^{m_3 - 1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \right| < G.$$

Anderseits ist aber

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \left\{ \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} - \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} x_1^{\mu_1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_3 = 0}^{m_3 - 1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) \right\} \right| < G,$$

woraus man nach § 6, Nr. 2, Satz 3 schließt, daß

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_3^{\mu_3} \right| < g,$$

während nach (5) von Nr. 1:

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_3^{\mu_3} \right| < g'.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Ungleichungen folgt

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) \right| < g'', \tag{1}$$

zu welcher Ungleichung durch Vertauschung der Indizes sich fünf weitere gesellen.

Wir knüpfen nun an Gleichung (2) von § 6 an, welche lautet:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} \left(s(x_1, x_2, x_3) + C \left\{ \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \right.$$

$$\left. + C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2 - 1, m_3 - 1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right) = s. \tag{2}$$

Digitized by Google

Nach Gleichung (4) der vorigen Nummer ist

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} C \left\{ - \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right\} = 0 \quad (3)$$

und nach (1)

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} C \left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{m_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{m_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right\} = 0. \quad (4)$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (4), so folgt:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) +$$

$$+ C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1, m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2}) (x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \left(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} - p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) - p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) \right) \right\} =$$

woraus sich nach (5) der vorigen Nummer sofort ergibt:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s.$$

Wir können nunmehr den Satz aussprechen:

A. „Konvergiert die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Punkte $x_1, x_2, x_3 = 1$ gegen s und ist die Reihe für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so ist für das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$$

im Bereiche $(B_1, B_2, B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ im gleichen Bereiche notwendig und hinreichend".

Da schließlich die Endlichkeit von $s(x_1, x_2 x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) im Verein mit der Konvergenz der Reihe in $x_1, x_2, x_3 = 1$ die Reduktibilität bedingt, so können wir dem Satze auch die Fassung geben:

B. „Konvergiert die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Punkte $x_1, x_2, x_3 = 1$ gegen s und ist die Reihe für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so ist für das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$$

im Bereiche $(B_1, B_2 B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ notwendig und hinreichend, daß die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im gleichen Bereiche in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ unter endlicher Grenze bleibt".

Digitized by Google

Die Fassung B wird dann immer von Vorteil sein, wenn man das Verhalten der Funktion $s(x_1, x_2, x_3)$ an der Stelle $x_1, x_2, x_3 = 1$ schon kennt und nur noch die Gewißheit braucht, daß die im Punkte 1 konvergente Reihe dort auch den Grenzwert der Funktion darstellt, während die Fassung A uns ein Mittel an die Hand gibt, auch wenn wir noch gar nichts über die Funktion $s(x_1, x_2, x_3)$ wissen, durch Untersuchung ihrer zwei- und einfachen Reihen die Frage nach dem Grenzwert von $s(x_1, x_2, x_3)$ zu entscheiden.

Beispiel:

$$s(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1)(1 - x_2) \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt[3]{\mu_3}} - e^{-x_2 \sqrt[3]{\mu_3}}) x_3^{\mu_3}.$$

Da in (A_1, A_3) bezw. in (A_2, A_3) die Reihe $\sum e^{-x_1 \sqrt[3]{\mu_3}} x_3^{\mu_3}$ bezw. $\sum e^{-x_2 \sqrt[3]{\mu_3}} x_3^{\mu_3}$ unter endlicher Grenze bleibt, so ist $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = 0$. Da indes die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ für $x_1, x_2, x_3 = 1$ konvergent ist, so müssen wir dasselbe Resultat — wenn auch infolge der Wahl des Beispiels auf einem ungleich umständlicheren Wege — durch Satz A erhalten.

Es ist

$$a_{0,0,\mu_3} = 0,\ a_{1,0,\mu_3} = -\sqrt{\mu_3},\ a_{\mu_1,0,\mu_3} = \frac{(-\sqrt{\mu_3})^{\mu_1}}{\mu_1!} - \frac{(-\sqrt{\mu_3})^{\mu_1 - 1}}{(\mu_1 - 1)!} \quad (\mu_1 \geqq 2)$$

$$a_{0,1,\mu_3} = +\sqrt[3]{\mu_3},\ a_{1,1,\mu_3} = -\sqrt[3]{\mu_3} + \sqrt{\mu_3},\ a_{\mu_1,1,\mu_3} = -a_{\mu_1,0,\mu_3} \quad (\mu_1 \geqq 2)$$

$$a_{0,\mu_2,\mu_3} = -\frac{(-\sqrt[3]{\mu_3})^{\mu_2}}{\mu_2!} + \frac{(-\sqrt[3]{\mu_3})^{\mu_2 - 1}}{(\mu_2 - 1)!} \quad (\mu_2 \geqq 2)$$

$a_{1,\mu_2,\mu_3} = -a_{0,\mu_2,\mu_3}$, während alle anderen $a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = 0$ sind.

Die Partialsummen s_{μ_1,μ_2,μ_3} bleiben unter endlicher Grenze, wenn $\mu_1 \geqq 1$, $\mu_2 \geqq 1$. Wir wählen daher $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$. Der Ausdruck $\left(\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3 = 0}^{\infty} - \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3 = m_1, m_2, m_3}^{\infty} \right) (a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3})$ ist dann mit $s(x_1, x_2, x_3)$ identisch.

Die Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1,0,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} = (1 - x_1) \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt{\mu_3}} - 1) x_3^{\mu_3}$ ist in (A_1, A_3) von der ersten Art und es ist

$$\left| \sum_{\mu_1,\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1,0,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} + \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} - x_1 \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} \right| < g.$$

Digitized by Google

Also ist

$$p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) = \begin{cases} -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \\ \sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Ferner ist die Reihe

$$\sum_{\mu_1, \mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1, 1, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} = \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (1-x_1) \sqrt[3]{\mu_3}\, x_3^{\mu_3} + (x_1 - 1) \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt[3]{\mu_3}} - 1) x_3^{\mu_3}$$

von der ersten Art und es ist:

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1, 1, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} - \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} + \right. \\ \left. + x_1 \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} \right| < g.$$

Sonach ist

$$p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) = \begin{cases} \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1. \end{cases}$$

Ebenso findet man:

$$p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) = \begin{cases} \sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0 \\ \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1. \end{cases}$$

Man sieht nun, daß in der Tat auch die Bedingung (5) von Nr. 1 erfüllt ist und $s(x_1, x_2, x_3)$ in (A_1, A_2, A_3) also reduktibel ist.

Gleich den Doppelreihen hat die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Falle der Konvergenz von $s(1,1,1)$ nur die beiden Möglichkeiten: *a)* $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$; *b)* $\overline{\lim}_{x_1, x_2, x_3 = 1} |s(x_1, x_2, x_3)| = \infty$.

Digitized by Google

Während aber bei Doppelreihen im Falle *a*) alle einfachen Reihen (Zeilen und Kolonnen) unter endlichen Grenzen bleiben müssen, können in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ bei dreifachen Reihen eine endliche Anzahl zweifacher und sogar eine unendliche Anzahl einfacher Reihen unendlich werden. Besitzt jedoch die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ eine einzige zweifache Reihe, die in B_ν von der zweiten Art unendlich wird, so kann von der Grenzwertgleichung $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ in (B_1, B_2, B_3) [1]) keine Rede sein. Wohl aber behält auch in diesem Falle die Gleichung (2) von § 6 ihre Giltigkeit, die wir in diesem Falle als den allgemeinen Abelschen Satz ansehen können. Es ist ferner möglich, in dieser Gleichung alle unter endlicher Grenze bleibenden einfachen und zweifachen Reihen wegzulassen.

Endlich können wir die ausgeführten Untersuchungen ohneweiters auf den Fall übertragen, daß die Reihe $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ einen Cesàroschen Mittelwert[2]) von der Ordnung[2]) (k_1, k_2, k_3) und beliebigem Index[2]) besitzt. Die Sätze über normal konvergente Mittelwerte und die Reduzierbarkeit beliebiger Mittelwerte auf normal konvergente lassen leicht eine Verallgemeinerung auf dreifache Reihen zu, welche uns ohneweiters die Gleichung (2) von § 6, Nr. 1, liefert, so daß die in diesem Kapitel angestellten Betrachtungen auch den Fall der Existenz des Cesàroschen Mittelwertes erledigen. Die Sätze *A* und *B* bleiben wörtlich erhalten, wenn nur die Voraussetzung der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ durch die der Existenz eines Cesàroschen Mittelwertes ersetzt wird.

Durch sinngemäße Ausdehnung der in § 6, Nr. 2, ausgeführten Klassifikation zweifacher auf n-fache Reihen ist es schließlich möglich, für beliebige n-fache Reihen notwendige Bedingungen für den Abelschen Grenzwertsatz aufzustellen, die den Bedingungen 1 und 2 von Nr. 1 dieses Paragraphen analog sind. Es ist wahrscheinlich, daß diese Bedingungen sich auch als hinreichend erweisen und ich hoffe, bei anderer Gelegenheit darauf zurückkommen zu können.

---

[1]) Indessen ist es immer noch möglich, daß in einem Bereiche $(B'_1, B'_2, B'_3) < (B_1, B_2, B_3)$ die Gleichung besteht.

[2]) Eine besondere Definition dieser Bezeichnungen für dreifache Reihen dürfte überflüssig sein.

Digitized by Google

III. Die Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes für Doppelreihen.

§ 8.

Es ist bei Potenzreihen einer Veränderlichen eine bekannte Tatsache, daß der Abelsche Grenzwertsatz nicht ohne weiteres umkehrbar ist, d. h. daß aus $\lim_{x=1} s(x) = s$ nicht die Konvergenz von $s(1)$ gefolgert werden kann. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für Doppelreihen. Indessen hat Herr Pringsheim für einfache Reihen[1]) gezeigt, daß in einem besonders einfachen Fall, wenn nämlich in der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu + i\beta_\nu)$ die α_ν und β_ν unter sich von einem bestimmten ν ab gleich bezeichnet sind, aus der Gleichung $\lim_{\varrho=1} s(\varrho) = s$ auf die Konvergenz von Σa_ν geschlossen werden kann. Dieses Ergebnis läßt sich auch auf Doppelreihen übertragen:

„Sind in der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\alpha_\mu^\nu + i\beta_\mu^\nu)$ sowohl die α_μ^ν als auch die β_μ^ν unter sich von gleichem Zeichen, ausgenommen höchstens diejenigen Glieder, deren Indizes beide kleiner als zwei endliche Zahlen m_1 und n_1 sind, so ist für die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig und hinreichend, daß $\lim_{\varrho,\varrho_1=1} s(\rho,\rho_1) = s$ existiert".

Beweis: Bezeichnen wir $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^\nu \rho^\mu \rho_1^\nu$ mit $\sigma(\rho,\rho_1)$, $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \beta_\mu^\nu \rho^\mu \rho_1^\nu$ mit $\tau(\rho,\rho_1)$, so spaltet sich unsere Grenzwertrelation in zwei Gleichungen:

$$\lim_{\varrho,\varrho_1=1} \sigma(\rho,\rho_1) = \sigma, \quad \lim_{\varrho,\varrho_1=1} \tau(\rho,\rho_1) = \tau.$$

Sind alle α_μ^ν gleich bezeichnet, so muß $\sigma_m^n = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu$, wenn überhaupt konvergent, die Bedingung der Endlichkeit erfüllen. Nach § 2 ist also die Existenz des $\lim_{\varrho,\varrho_1=1} \sigma(\rho,\rho_1)$ für die Konvergenz von $\sigma(1,1)$ notwendig.

[1]) Münch. Ber. 1900, Bd. 30, p. 39 ff.

Digitized by Google

Um zu zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, nehmen wir etwa an, daß alle α_μ^ν positiv sind. Dann ist

$$\sigma_m^n(\rho, \rho_1) < \sigma(\rho, \rho_1).$$

Da nun $\sigma(\rho, \rho_1)$ monoton zunimmt, wenn ρ und ρ_1 der 1 sich nähern, so ist

$$\sigma(\rho, \rho_1) < \sigma \text{ für } \rho < 1,\ \rho_1 < 1.$$

Infolgedessen ist auch

$$\sigma_m^n(\rho, \rho_1) < \sigma \text{ für } \rho < 1,\ \rho_1 < 1$$

und daher

$$\sigma_m^n \leqq \sigma.$$

Die σ_m^n bilden aber, da alle $\alpha_\mu^\nu > 0$ sind, eine monoton zunehmende Folge und da sie alle unter einer endlichen Grenze σ bleiben, so besitzt nach einem bekannten Satze[1]) die Folge einen endlichen Grenzwert σ', der nach dem Abelschen Satze mit σ übereinstimmen muß.

Die gleiche Überlegung gilt für den imaginären Teil. — Sind endlich die Bedingungen des gleichen Vorzeichens für $\mu < m_1$, $\nu < n_1$ (gleichzeitig!) nicht erfüllt, so nehme man die Summe $\sum_{\mu=0}^{m_1-1} \sum_{\nu=0}^{n_1-1} a_\mu^\nu$ weg und wende auf die übrig bleibende Doppelreihe den gleichen Beweis an.

§ 9.

1. Dem Beweis des schon in der Einleitung erwähnten Tauberschen Satzes haben wir noch einige Betrachtungen vorauszuschicken. Es handelt sich zunächst darum, notwendige Bedingungen für die Konvergenz einer Doppelreihe aufzustellen, die zusammen mit der Existenz des $\lim_{x,\,y=1} s(x,y)$ sich sodann als hinreichend erweisen werden.

Es besteht — wenn wir uns gleich etwas allgemeiner fassen, als es unmittelbar notwendig ist — der Satz:

„Ist $\lim_{m=\infty} |b_m| = \infty$ und $\sum_{\mu=0}^{m} \frac{|b_\mu - b_{\mu-1}|}{|b_m|} < G$, so ist für die Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig, daß

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_{m_1}^n \cdot b_0 + \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0,n} b_\mu}{b_m} = 0$$

[1]) Pringsheim, Über zweifach unendliche Zahlenfolgen. Math. Ann. Bd. 53, p. 293.

Digitized by Google

für jedes $m_1 \geqq m_0$, wenn m_0 die erste Zahl ist, für die $|s^{\nu}_{m_0+\mu}| < g_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)^{\alpha}$.[1])

Beweis: Setzt man $b_0 = \beta_0$, $b_\mu - b_{\mu-1} = \beta_\mu$ $(\mu > 0)$, so hat $\sum \beta_\mu$ die für Satz II von § 4 verlangten Eigenschaften. Soll $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} s^{\nu}_{\mu} = s$ existieren, so gibt es eine Zahl m_0 derart, daß für $m_1 \geqq m_0$

$$|s^{\nu}_{m_1+\mu}| < g_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots$$

Definieren wir nun $t^{\nu}_0 = 0$, $t^{\nu}_{\mu} = s^{\nu}_{m_1+\mu-1}$ $(\mu > 0)$, so erfüllt diese Folge die Bedingungen des eben erwähnten Satzes. Somit ist

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} s^{n}_{m_1+\mu-1}\beta_\mu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\beta_\mu} = \lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} t^{n}_{\mu}\beta_\mu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\beta_\mu} = s.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der folgenden:

$$\lim_{m,\,n=\infty} s^{n}_{m_1+m} = s,$$

so geht unter Berücksichtigung der Identität

$$s^{n}_{m_1+m}\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} s^{n}_{m_1+\mu-1}\beta_\mu = s^{n}_{m_1} b_0 + \sum_{\mu=1}^{m} q^{0,n}_{m_1+\mu} b_\mu$$

hervor:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{b_0\, s^{n}_{m_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} q^{0,n}_{m_1+\mu} b_\mu}{b_m} = 0\,^{2}) \quad \text{w. z. b. w.} \tag{1}$$

In der Form

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{b_0\, s^{n}_{m_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} (s^{n}_{m_1+\mu} - s^{n}_{m_1+\mu-1})\, b_\mu}{b_m} = 0 \tag{1a}$$

ist die Bedingung notwendig für die Konvergenz jeder Doppelfolge s^{ν}_{μ}.

Ist ferner $|s^{n_1+\nu}_{\mu}| < g_\nu$ $(n_1 \geqq n_0)$, so ist auch, wie aus dem Gang des Beweises ersichtlich

[1]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines von **Kronecker** und **Jensen** gegebenen Satzes. (Comptes Rendus 103 (1886), p. 980 bezw. Comptes Rendus 106 (1888), p. 835.)

[2]) Dieser Beweis lehnt sich ganz an den des entsprechenden Satzes bei einfachen Reihen an. cf. **Pringsheim**, Münch. Ber. 30, p. 45.

Digitized by Google

$$\left| \frac{b_0 s_{m_1}^{n_1+\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} \left(s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu} - s_{m_1+\mu-1}^{n_1+\nu}\right) b_\mu}{b_m} \right| < g'_\nu \text{ für } n_1 \geqq n_0, \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

Ebenso wie (1) und (1 a) besteht auch, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu-1})$ eine Reihe gleicher Eigenschaft wie $\sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_\mu$ ist, die Gleichung

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{c_0 s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n} p_{n_1+\nu}^{0,\, m}\, c_\nu}{c_n} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{c_0 s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(s_m^{n_1+\nu} - s_m^{n_1+\nu-1}\right) c_\nu}{c_n} = 0. \tag{2a}$$

Wir können insbesondere die Bedingung (2 a) auf die in (1) auftretende Doppelfolge $\frac{1}{b_m}\left(b_0 s_{m_1}^{n} + \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0,\, n}\, b_\mu\right)$ anwenden und erhalten dadurch wiederum eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum a_\mu^\nu$, nämlich

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{b_0 c_0 s_{m_1}^{n_1} + b_0 \sum_{\nu=1}^{n} p_{n_1+\nu}^{0,\, m_1} c_\nu + c_0 \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0,\, n_1} b_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu c_\nu a_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{b_m\, c_n} = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (1) und aus Symmetriegründen auch für (2) dar und ist eine viel schwächere Bedingung für die Konvergenz von $\sum a_\mu^\nu$ als (1) und (2).

Ist $m_0 = n_0 = 0$, so kann man auch $m_1 = n_1 = 0$ setzen. Wählt man endlich noch $b_\mu = \mu + 1$, $c_\nu = \nu + 1$, so geht der Satz hervor:

„Ist $|s_\mu^\nu| < \begin{cases} G_\mu \\ G_\nu \end{cases}$ für alle μ und ν, so ist für die Konvergenz von $s_\mu^\nu = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu$ notwendig, daß

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, q_\mu^{0,\, n}}{m+1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m,\, n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, p_\nu^{0,\, m}}{n+1} = 0.$$

Digitized by Google

Jede der beiden Bedingungen hat zur Folge, daß auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}(\mu+1)(\nu+1)\,a_\mu^\nu}{(m+1)(n+1)} = 0\text{“}.$$

In dem allgemeinen Falle eines beliebigen m_0, n_0 hat man endlich den Satz:

„Für die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ ist es notwendig, daß zwei Zahlen m_0, n_0 existieren, so daß für jedes $m_1 \geqq m_0$, $n_1 \geqq n_0$

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_{m_1}^n + \sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q_{m_1+\mu}^{0,\,n}}{m+1} = 0 \text{ und } \left|\frac{s_{m_1}^n + \sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q_{m_1+\mu}^{0,\,n}}{m+1}\right| < \eta_m$$

$$(m = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p_{n_1+\nu}^{0,\,m}}{n+1} = 0 \text{ und } \left|\frac{s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p_{n_1+\nu}^{0,\,m}}{n+1}\right| < \eta_n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).\text{“}$$

2. Es sind endlich noch einige sehr wichtige Transformationen, die wir im folgenden Paragraphen fortwährend anzuwenden haben werden, zu beweisen bezw. soweit sie schon bekannt sind, zusammenzustellen.

Transformation I.

Für einfache Reihen:

„Konvergiert $s(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$, so gilt in demselben Kreise:

$$s(x) = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu, \quad \text{wobei } s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda.\text{“} \qquad (\text{I}a)$$

(Pringsheim, Münch. Ber. 30, p. 47.)

Für endliche Summen besteht die Identität:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = (1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu x^\nu + s_n x^n. \quad \text{(Ebendort.)} \qquad (\text{I}b)$$

Digitized by Google

Für Doppelreihen:

„Konvergiert $s(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$, so gilt in diesem Gebiete die Transformation:

$$s(x,y)=(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} s_\mu^\nu x^\mu y^\nu, \quad \text{wobei } s_\mu^\nu=\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\varkappa^\lambda{}^{\mu}. \quad (\text{I}c)$$

Beweis: Es konvergiert für $|x|<1$, $|y|<1$ sowohl $s(x,y)$ als auch $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$ absolut, infolgedessen auch das Produkt beider Reihen, nämlich

$$\frac{s(x,y)}{(1-x)(1-y)}=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} s_\mu^\nu x^\mu y^\nu.$$

[Beweis nach Herrn Pringsheim l. c.; für den Fall $|s_\mu^\nu|<G$ wurde die Transformation schon von Bromwich und Hardy hergeleitet (Some extensions ... p. 164).]

Transformation II.

Einfache Reihen:

„Konvergiert $s(x)$ für $|x|<1$, so ist im gleichen Gebiete:

$$s(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}x^\nu+(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{S_\nu}{\nu+2}x^\nu, \quad (\text{II}a)$$

wobei $$S_\nu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(\lambda+1)\,a_\lambda.^{\mu}$$

Für endliche Summen hat man

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}x^\nu+(1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{S_\nu}{\nu+2}x^\nu+\frac{S_n x^n}{n+1}. \quad (\text{II}b)$$

(Pringsheim l. c.)

Doppelreihen:

„Konvergiert $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$, so ist im gleichen Gebiete:

$$s(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+$$

$$+(1-x)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+ \quad (\text{II}c)$$

$$+(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)}x^\mu y^\nu.$$

Digitized by Google

Dabei ist

$$S_\mu^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\varkappa+1)(\lambda+1)\, a_\varkappa^\lambda\, {}^{\mu}.$$

Beweis: Da $s(x, y)$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert, so gilt das nämliche für $\frac{\partial^2 (x y\, s(x, y))}{\partial x\, \partial y} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\mu+1)(\nu+1)\, a_\mu^\nu\, x^\mu y^\nu$. Multipliziert man diese Doppelreihe mit der im gleichen Gebiete absolut konvergenten Reihe $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$, so folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} S_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$. Dann konvergieren aber alle auf der rechten Seite von (II c) auftretenden Doppelreihen absolut im gleichen Gebiete. Die Übereinstimmung beider Seiten von (II c) beweist man unschwer durch Koeffizientenvergleich.

Es ist klar, daß man innerhalb des Bereiches der absoluten Konvergenz auch die Transformationen (I a), (II a) auf die Doppelreihe anwenden kann, da hier zwischen Doppelreihe und Kolonnen- oder Zeilenreihe kein Unterschied besteht.

Setzt man

$$\sum_{\varkappa=0}^{\mu} (\varkappa+1)\, a_\varkappa^\lambda = P_\lambda^{\nu,\mu}, \quad \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_\lambda^{0,\mu} = \mathfrak{P}_\nu^{0,\mu},$$

so erhält man durch Anwendung von (II a)

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{(\mu+2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} y^\nu =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu+2} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^{0,\mu} y^\nu - (1-y) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{\nu+2} y^\nu \right\}.$$

Nun ist wegen (I a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^{0,\mu} y^\nu = (1-y) \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^{0,\mu} y^\nu.$$

Daher wird

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu =$$

$$= (1-y) \left\{ \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+2} x^\mu y^\nu - \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)} x^\mu y^\nu \right\}.$$

Digitized by Google

Wendet man das analoge Verfahren auf die dritte Summe in (II c) an, so geht schließlich die Transformation hervor:

$$\left.\begin{aligned} s(x,y) = &\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu + \\ &+ (1-x)(1-y)\left\{ \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+2} x^\mu y^\nu + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu}}{\nu+2} x^\mu y^\nu - \right. \\ &\left. - \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)} x^\mu y^\nu \right\} \\ &\left(\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} Q_\varkappa^{0,\nu};\quad Q_\varkappa^{0,\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\lambda+1)\, a_\varkappa^\lambda\right). \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}\,d)$$

Für endliche Summen und $x=1$, $y=1$ hat man die Identität:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = &\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} + \\ &+ \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_m^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)} + \\ &+ \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}\,c)$$

Wendet man noch auf die zweite und dritte Summe rechts die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{S_n}{n+1} \quad [\text{aus } (\mathrm{II}\,b)] \qquad (\mathrm{II}\,f)$$

an, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = &\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} + \\ &+ \frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} + \frac{\mathfrak{Q}_m^{0,n}}{n+1} - \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II}\,e')$$

Digitized by Google

§ 10.

1. Nach diesen Vorbereitungen können wir nunmehr an die Erweiterung des Tauberschen Satzes herantreten. Es soll zunächst eine von Landau[1]) für einfache Reihen hergeleitete Erweiterung des Tauberschen Satzes auf Doppelreihen folgendermaßen ausgedehnt werden:

„Bleiben die Partialsummen jeder Zeile der Doppelreihe $\sum a_\mu^\nu$ dem absoluten Betrage nach unter g_ν, ebenso die der Kolonnen unter g_μ, ist ferner

$$\lim_{m,n=\infty} s(x_m, y_n) = s \tag{1}$$

für die Punktfolgen $\begin{Bmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \dots \\ y_1 y_2 \dots y_n \dots \end{Bmatrix}$ der Bereiche $\begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix}$, für welche

$$\begin{Bmatrix} \lim x_m = 1 \\ m=\infty \\ \lim y_n = 1 \\ n=\infty \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} |1 - x_m| \\ |1 - y_n| \end{Bmatrix} \text{ nie zunimmt}^2),$$

und bestehen die Gleichungen

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} \equiv \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (\mu+1)\, a_\mu^\nu}{m+1} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\mathfrak{Q}_m^{0,n}}{n+1} \equiv \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, a_\mu^\nu}{n+1} = 0, \tag{3}$$

so ist, wenn man $\left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] = (m)$, $\left[\frac{1}{|1-y_n|}\right] = (n)$ setzt:

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} a_\mu^\nu = s\text{“}.$$

Beweis: Die Voraussetzungen $|p_\nu^{0,\mu}| < g_\nu$, $|q_\mu^{0,\nu}| < g_\mu$ haben zur unmittelbaren Folge, daß auch

$$|s_\mu^\nu| < G_\mu \quad \text{und} \quad |s_\mu^\nu| < G_\nu$$

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys., Bd XVIII, p. 15—18. Der folgende Beweis lehnt sich an die Methoden von Herrn Pringsheim (Münch. Ber. 30, p. 47 ff.) und Herrn Landau an.

[2]) Die letztere Voraussetzung, die einer einfacheren Beweisführung zuliebe gemacht ist, bildet keine Beschränkung unseres Satzes.

Digitized by Google

für jedes μ und ν. Daraus folgt zunächst, daß

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| = \left|\frac{m+2}{m+1}\, s_m^n - \frac{s_0^n + s_1^n + \cdots s_m^n}{m+1}\right| < G_n \cdot \frac{2m+3}{m+1} < G_n'.$$

Da ferner

$$\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, q_\mu^{0,n}}{m+1},$$

so ist

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| < \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, g_\mu}{m+1} < G_m'$$

und es existiert folglich nach (2) eine Zahl G derart, daß

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| < G \tag{2a}$$

und ebenso

$$\left|\frac{\mathfrak{Q}_m^{0,n}}{n+1}\right| < G \tag{3a}$$

für alle m und n.

Aus (2) und der ersten dieser Ungleichungen folgt nach § 9, 1, daß auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)} \equiv \lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\mu+1)(\nu+1)}{(m+1)(n+1)}\, a_\mu^\nu = 0 \tag{4}$$

und

$$\left|\frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}\right| < G \tag{4a}$$

(man kann eine Zahl G angeben, für die (2a), (3a) und (4a) gleichzeitig bestehen).

Wir behaupten zunächst, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}\, (x_m)^\mu (y_n)^\nu = s.^{1}) \tag{5}$$

[1]) Um Verwechslungen mit der Schreibweise der Doppelfolgen zu vermeiden, soll die μ^{te} Potenz von x_m mit $(x_m)^\mu$ bezeichnet werden.

Digitized by Google

Wir gehen von der Transformation (II d) aus. Die Gleichung (5) besteht sicher, wenn einzeln im Bereiche $(A\,A_1)$:

$$\lim_{x,\,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\,\mu}}{\mu+2}\,x^\mu y^\nu=0$$

$$\lim_{x,\,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\,\nu}}{\nu+2}\,x^\mu y^\nu=0$$

$$\lim_{x,\,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)}\,x^\mu y^\nu=0.$$

Daß diese Gleichungen aber wirklich statthaben, folgt aus (2), (2 a), (3), (3 a), (4), (4 a) und dem Hilfssatze § 5, Nr. 3, wenn man dort $p=q=0$ setzt.

2. Wir zeigen nun zweitens, daß

$$\lim_{m,\,n=\infty}\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}=s.$$

Es ist

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=\\ =\Bigg(\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}+\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=(n)+1}^{\infty}+\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}+\\ +\sum_{\mu,\,\nu=(m)+1,\,(n)+1}^{\infty}\Bigg)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right).\end{aligned}\right\}$$

Bestimmt man zwei Zahlen m_1 und n_1 so, daß für $\mu\geqq(m_1)$, $\nu\geqq(n_1)$

$$\left|\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g\,g_1} \tag{6 a}$$

und gleichzeitig

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\,\mu}}{\mu+1}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g\,g_1}\ ^1) \tag{6 b}$$

$$\left|\frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\,\nu}}{\nu+1}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g\,g_1},\ ^1) \tag{6 c}$$

[1]) Diese Ungleichungen werden erst später Verwendung finden.

Digitized by Google

so ist für $m \geqq m_1$, $n \geqq n_1$:

$$\sum_{\mu,\nu=(m)+1,(n)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu <$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\, g g_1} \frac{1}{\big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \sum_{\mu,\nu=(m)+1,(n)+1}^{\infty} |x_m|^\mu |y_n|^\nu$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\, g g_1 \big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \cdot \frac{1}{(1-|x_m|)(1-|y_n|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \cdot \frac{1}{|1-x_m||1-y_n|} \quad \left(\text{da } \begin{Bmatrix} x_m \\ y_n \end{Bmatrix} \text{ in } \begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix} \text{ gelegen}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{13},$$

da

$$\frac{1}{|1-x_m|} < \left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] + 1 = (m) + 1;$$

$$\frac{1}{|1-y_n|} < \left[\frac{1}{|1-y_n|}\right] + 1 = (n) + 1.$$

Um die Summe $\sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}$ zu behandeln, müssen wir sie nach (IIb) transformieren:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} (y_n)^\nu = \sum_{\nu=0}^{(n)+1} P_\nu^{0,\mu} (y_n)^\nu -$$

$$- (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{\nu+2} (y_n)^\nu - \frac{1}{(n)+2} S_\mu^{(n)+1} (y_n)^{(n)+1}.$$

Durch Anwendung von (Ib) auf $\sum_{\nu=0}^{(n)+1} P_\nu^{0,\mu} (y_n)^\nu$ erhält man hieraus:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu =$$

$$= (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu -$$

$$- (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu +$$

$$+ (y_n)^{(n)+1} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu -$$

$$- \frac{1}{(n)+2} (y_n)^{(n)+1} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu.$$

Digitized by Google

Es ist nun:

$$(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=$$

$$=(1-y_n)\left(\sum_{\nu=0}^{(n_1)-1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}+\sum_{\nu=(n_1)}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\right)\left(\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right).$$

Nach $(2a)$ ist mit Berücksichtigung von $|1-y_n|\leqq\frac{1}{(n)}$

$$(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n_1)-1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu<$$

$$<\frac{(n_1)\,G}{\big((m)+3\big)\,(n)\,(1-|x_m|)}<\frac{(n_1)\,Gg}{(n)\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}$$

$$<\frac{(n_1)\,Gg}{(n)}<\frac{\varepsilon}{13},$$

wenn $(N_1)>\frac{13\,(n_1)\,Gg}{\varepsilon}$ und $n\geqq N_1$.

Wegen $(6b)$ ist

$$\left|(1-y_n)\sum_{\nu=(n_1)}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<$$

$$\frac{\big((n)-(n_1)+1\big)\,\varepsilon}{(n)\big((m)+3\big)\,13\,gg_1(1-|x_m|)}<\frac{\varepsilon}{13\,g_1\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}<\frac{\varepsilon}{13}.$$

Infolgedessen ist für $n\geqq N_1>n_1$, $m\geqq m_1$

$$\left|(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{2\varepsilon}{13}.$$

Ferner ist

$$\left|(y_n)^{(n)+1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{13\,gg_1\big((m)+3\big)\,(1-|x_m|)}<\frac{\varepsilon}{13\,g_1\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}<\frac{\varepsilon}{13}.$$

Digitized by Google

Genau dieselben Schlüsse gelten für die beiden anderen Summen, in denen $\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+1}$ durch $\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}$ ersetzt ist. Also ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{6\varepsilon}{13}$$

$$\text{für } n\geqq N_1>n_1,\ m\geqq m_1.$$

Entsprechend zeigt man, daß

$$\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=(n)+1}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{6\varepsilon}{13}$$

$$\text{für } m\geqq M_1>m_1,\ n\geqq n_1,$$

wobei

$$(M_1)>\frac{13(m_1)Gg_1}{\varepsilon}.$$

Für $m\geqq M_1$, $n\geqq N_1$ ist daher

$$\left|\left(\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}-\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\right)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right)\right|<\varepsilon$$

oder

$$\lim_{m,n=\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}-\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\right)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right)=0.$$

Addiert man diese Gleichung zu (5), so folgt

$$\lim_{m,n=\infty}\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=s. \quad (7)$$

3. Bevor wir weiterfahren, soll bemerkt werden, daß, wenn $\lim_{\mu,\nu=\infty}c_\mu^\nu=0$ und $|c_\mu^\nu|<G$ für alle μ und ν, nach dem Cauchyschen Grenzwertsatze immer gilt:

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{\mu=0}^{m}|c_\mu^n|=0 \text{ und } \lim_{m,n=\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|c_m^\nu|=0. \quad (8)$$

Digitized by Google

Durch Anwendung von (II f) auf $\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}$ ergibt sich nun:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu} - \frac{1}{(n)+2} S_\mu^{(n)+1},$$

daher

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) - \frac{1}{(n)+2} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right).$$

Beachtet man, daß

$$|(x_m)^\mu - 1| = |1 - x_m| \,.\, |1 + x_m + (x_m)^2 + \cdots (x_m)^{\mu-1}|$$

$$< \mu\,|1 - x_m| \leqq \frac{\mu}{(m)},$$

so ergibt sich:

$$\left| \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) \right| < \frac{1}{(m)} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{|\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}|}{\mu+1}$$

$$\left| \frac{1}{(n)+2} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) \right| < \frac{1}{(m)} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{|S_\mu^{(n)+1}|}{(\mu+1)\left((n)+2\right)}$$

und hieraus nach (2), (2 a), (4), (4 a) und (8)

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} \left(1 - (x_m)^\mu\right) = 0 \quad (9)$$

Nach (II b) ist ferner

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{(m)+1} Q_\mu^{0,n} (x_m)^\mu - (1 - x_m) \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^n}{\mu+2} (x_m)^\mu - \frac{S_{(m)+1}^n}{(m)+2} (x_m)^{(m)+1}.$$

Digitized by Google

Nach (I b) hat man

$$\sum_{\mu=0}^{(m)+1} \mathfrak{Q}_\mu^{0,n}(x_m)^\mu = (1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)} \mathfrak{Q}_\mu^{0,n}(x_m)^\mu + (x_m)^{(m)+1}\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n}.$$

Daher ist

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right| =$$

$$= \left|(1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)}\mathfrak{Q}_\mu^{0,n}(x_m)^\mu - (1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{\mu+2}(x_m)^\mu + \right.$$

$$\left. + (x_m)^{(m)+1}\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n} - (x_m)^{(m)+1}\frac{S_{(m)+1}^n}{(m)+2}\right| \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$< \frac{1}{(m)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{|\mathfrak{Q}_\mu^{0,n}|}{n+1} + \frac{1}{(m)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{|S_\mu^n|}{(\mu+2)(n+1)} + \frac{|\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n}|}{n+1} + \frac{|S_{(m)+1}^n|}{(m+2)(n+1)}.$$

Nach (3), (3 a), (4), (4 a) und (8) ist also

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu = 0 \qquad (10)$$

und

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right| < 4G \qquad (10\,a)$$

für alle m und n.

Nun ist:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu\left(1-(y_n)^\nu\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{1-(y_n)^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|$$

$$< \frac{1}{(n)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{1}{\nu+1}\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|,$$

da $|(y_n)^\nu - 1| < \frac{\nu}{(n)}$.

Digitized by Google

Nach (10), (10 a) und (8) ist also

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu \left(1-(y_n)^\nu\right) = 0. \quad (11)$$

Addiert man jetzt (7), (9) und (11), so folgt

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} = s \quad (12)$$

Aus der Identität (II c'), die für unseren Fall lautet:

$$\sum_{\mu=0}^{(m)+1} \sum_{\nu=0}^{(n)+1} a_\mu^\nu = \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} +$$

$$+ \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\,(m)+1}}{(m)+2} + \frac{\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,\,(n)+1}}{(n)+2} - \frac{S_{(m)+1}^{(n)+1}}{\left((m)+2\right)\left((n)+2\right)},$$

folgt dann vermöge (2), (3) und (4):

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)+1} \sum_{\nu=0}^{(n)+1} a_\mu^\nu = s,$$

wofür man, da wegen (2), (3) und (4)

$$\lim_{m,\,n=\infty} q_m^{0,\,n} = 0, \quad \lim_{m,\,n=\infty} p_n^{0,\,m} = 0, \quad \lim_{m,\,n=\infty} a_m^n = 0,$$

auch schreiben kann:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} a_\mu^\nu = s, \quad (13)$$

w. z. b. w.

4. Kommen nun in der Reihe der (m) bezw. (n) alle ganzen Zahlen $\geqq M$ bezw. $\geqq N$ vor, so besagt (13), daß $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ konvergiert und s zum Wert hat.

Es wird in manchen Fällen vorteilhaft sein, an Stelle der Bedingungen (2) und (3) einfachere, aber freilich auch engere Bedingungen zu kennen. So ist nach dem Cauchyschen Grenzwertsatz (2) und (3) sicher erfüllt, wenn

Digitized by Google

$$\lim_{m,\,n=\infty} m\,q_m^{0,n} = 0 \quad ^1) \tag{2'}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty} n\,p_n^{0,m} = 0. \tag{3'}$$

Finden diese Relationen auch dann noch statt, wenn man die a_μ^ν durch ihre absoluten Beträge ersetzt, so konvergiert die Doppelreihe für alle Stellen $x = e^{\varphi i}$, $y = e^{\psi i}$, für welche die Bedingung der Endlichkeit und (1) erfüllt ist. (2') und (3') können in diesem Falle ersetzt werden durch die äquivalenten Relationen:

$$\lim_{m=\infty} m \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_m^\nu| = 0 \tag{2''}$$

$$\lim_{n=\infty} n \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu^n| = 0. \tag{3''}$$

Aber gerade aus dieser Form ersieht man, daß die Anwendbarkeit dieses speziellen Kriteriums beschränkt sein wird, da die absolute Konvergenz aller Zeilen und Kolonnen (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Voraussetzung bildet. Im Gegensatz hiezu sind, wenn von der Reihe $\sum a_\mu^\nu$ schon feststeht, daß alle Zeilen bezw. Kolonnen unter g_ν bezw. g_μ bleiben, die Bedingungen (2), (3) und (1) (letztere im Sinne dieser Nummer) für die Konvergenz von $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

5. Wir wollen nun das erhaltene Resultat dazu verwenden, um für eine beliebige Doppelreihe notwendige und hinreichende Konvergenzbedingungen aufzustellen und so dem „allgemeinen Abelschen Grenzwertsatze" einen „allgemeinen Tauberschen Satz" als Umkehrung gegenüberstellen.

Wir machen wie früher von der Doppelreihe $s(x, y)$ die eine Voraussetzung, daß sie für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert. Dann ist nach § 3 zur Konvergenz von $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig die Existenz zweier den Bereichen $\left\{\begin{matrix} A \\ A_1 \end{matrix}\right\}$ angehörigen Punktfolgen

$$\left\{\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_m \ldots \\ y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots \end{matrix}\right\} \quad \left(\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{m=\infty} x_m = 1 \\ \lim\limits_{n=\infty} y_n = 1 \end{matrix}\right\}\right),$$

[1]) Es entsprechen diese Bedingungen der bekannten Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} n\,a_n = 0$ bei einfachen Reihen.

Digitized by Google

von der Eigenschaft, daß

$$\lim_{m,\,n=\infty}\left\{s(x_m, y_n)+\sum_{\nu=1}^{n'} p_{\alpha_\nu}(x_m)\left((y_n)^{n''}-(y_n)^{\alpha_\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{m'} q_{\beta_\mu}(y_n)\left((x_m)^{m''}-(x_m)^{\beta_\mu}\right)\right\}=s, \tag{1}$$

wenn p_{α_ν}, q_{β_μ} wie früher die bei der gewählten Art des Grenzüberganges nicht unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen und Kolonnen und m'', n'' zwei ganze Zahlen sind.

An Stelle von (2) und (3) haben wir jetzt nach § 9, Nr. 1, zu schreiben:

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{s^n_{m_1}+\sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1}=0 \tag{2a}$$

$$\left|\frac{s^n_{m_1}+\sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1}\right|<g_m, \qquad m=0,1,2,3\ldots \tag{2b}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{s^{n_1}_m+\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1}=0 \tag{3a}$$

$$\left|\frac{s^{n_1}_m+\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1}\right|<g_n, \qquad n=0,1,2,3\ldots \tag{3b}$$

Wir definieren nun wie p. 8:

$$b^\nu_\mu=a^{n_1+\nu}_{m_1+\mu},\quad b^\nu_0=s^{n_1+\nu}_{m_1}-s^{n_1+\nu-1}_{m_1},\quad b^0_\mu=s^{n_1}_{m_1+\mu}-s^{n_1}_{m_1+\mu-1},\quad b^0_0=s^{n_1}_{m_1}.$$

Dann schreibt sich (2) und (3), wenn wir Zeilen und Kolonnen der Reihe $\sum b^\nu_\mu$ mit $\bar{p}$, $\bar{q}$ bezeichnen:

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)\,\bar{q}^{0,\,n}_\mu}{m+1}=0 \tag{2'a}$$

$$|\bar{q}^{0,\,n}_\mu|<g'_\mu\ \text{(folgt unmittelbar aus (2b))}, \qquad \mu=0,1,2\ldots \tag{2'b}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\,\bar{p}^{0,\,m}_\nu}{n+1}=0 \tag{3'a}$$

$$|\bar{p}^{0,\,m}_\nu|<g'_\nu\ \text{(folgt unmittelbar aus (3b))}, \qquad \nu=0,1,2\ldots \tag{3'b}$$

Digitized by Google

Aus $(2'b)$ und $(3'b)$ folgt, daß $\alpha_n \leqq n_1$, $\beta_m \leqq m_1$; ferner ist aus diesen Gleichungen ersichtlich, daß man in (1) die Zahlen m'' und n'' durch m_1 und n_1 ersetzen darf und daß es in derselben Gleichung erlaubt ist, $\sum_{\nu=1}^{n'} p_{\alpha_\nu}(x_m)$ bezw. $\sum_{\mu=1}^{m'} q_{\beta_\mu}(y_n)$ zu $\sum_{\nu=0}^{n_1-1} p_\nu(x_m)$ bezw. $\sum_{\mu=0}^{m_1-1} q_\mu(y_n)$ zu ergänzen. Man erhält dann

$$\lim_{m,\,n=\infty}\left\{s(x_m, y_n) + \sum_{\nu=0}^{n_1-1} p_\nu(x_m)\left((y_n)^{n_1} - (y_n)^\nu\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=0}^{m_1-1} q_\mu(y_n)\left((x_m)^{m_1} - (x_m)^\mu\right)\right\} = s.$$

Nun ist aber nach § 3 Nr. 1 die $\left\{\ \right\}$ bis auf eine für $x=1, y=1$ verschwindende ganze rationale Funktion von x und y mit $x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ identisch. Infolgedessen hat man auch:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu (x_m)^\mu (y_n)^\nu = s.$$

Für die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu$ sind also die Bedingungen des in Nr. 1 bis 4 bewiesenen Satzes erfüllt, d. h.

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} b_\mu^\nu = s \quad \text{oder} \quad \lim_{m,\,n=0} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = s,$$

wenn wir von den Punktfolgen $x_1\, x_2 \ldots x_m \ldots$ bezw. $y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$ voraussetzen, daß in der Reihe der (m) bezw. (n) alle ganzen Zahlen $\geqq M$ bezw. $\geqq N$ vorkommen.

So erhalten wir den allgemeinen Tauberschen Satz:

„Konvergiert $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut, so ist für die Konvergenz von $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ die gleichzeitige Erfüllung der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

1. Bezeichnet $\begin{Bmatrix} x_1, x_2 \ldots x_m \ldots \\ y_1, y_2 \ldots y_n \ldots \end{Bmatrix}$ zwei Punktfolgen der Bereiche $\begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix}$, für welche

Digitized by Google

$a)$ $$\begin{cases} \lim\limits_{m=\infty} x_m = 1 \text{ [1]} \\ \lim\limits_{n=\infty} y_n = 1, \end{cases}$$

$b)$ in der Reihe der Zahlen

$$\begin{Bmatrix} (m) = \left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] \\ (n) = \left[\frac{1}{|1-y_n|}\right] \end{Bmatrix}$$

alle ganzen Zahlen $\begin{Bmatrix} \geqq M \\ \geqq N \end{Bmatrix}$ vorkommen, so muß

$$\lim_{m,\,n=\infty} \left\{ s(x_m, y_n) + \sum_{\nu=1}^{n'} p_{\alpha_\nu}(x_m)\left((y_n)^{n''} - (y_n)^{\alpha_\nu}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\mu=1}^{m'} q_{\beta_\mu}(y_n)\left((x_m)^{m''} - (x_m)^{\beta_\mu}\right)\right\} = s \quad (1)$$

sein, wobei $p_{\alpha_\nu}(x)$, $q_{\beta_\mu}(y)$ die bei der gewählten Art des Grenzüberganges nicht unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen bezw. Kolonnen sind und m'' und n'' zwei ganze Zahlen vorstellen sollen.

2. Es müssen bei hinreichend groß gewähltem m_1 und n_1 die Gleichungen bestehen:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s^n_{m_1} + \sum_{\mu=1}^{m} (\mu+1)\, q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1} = 0 \quad (2a)$$

$$\left| \frac{s^n_{m_1} + \sum_{\mu=1}^{m} (\mu+1)\, q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1} \right| < g_m, \quad m = 0, 1, 2\ldots \quad (2b)$$

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s^{n_1}_m + \sum_{\nu=1}^{n} (\nu+1)\, p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1} = 0 \quad (3a)$$

$$\left| \frac{s^{n_1}_m + \sum_{\nu=1}^{n} (\nu+1)\, p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1} \right| < g_n, \; n = 0, 1, 2\ldots\text{“}. \quad (3b)$$

[1]) Die Bedingung, daß $|1-x_m|$ nie zunimmt, kann wie schon bemerkt, weggelassen werden.

Digitized by Google

Systeme von Größen mit zwei Einheiten und nicht notwendig assoziativer Multiplikation.

Von **Friedrich Rulf** in Wien.

Unter einer Größe mit zwei Einheiten verstehen wir einen Ausdruck $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 \equiv \alpha$, in dem ε_1 und ε_2 irgend zwei Dinge, sogenannte Einheiten, sind und a_1 und a_2 zwei gemeine komplexe Zahlen, die mit ε_1 und ε_2 in einer Weise verbunden zu denken sind, die den formalen Gesetzen der Multiplikation genügt; die neuen Inbegriffe $a_1 \varepsilon_1$ und $a_2 \varepsilon_2$ sind dann in einer Weise mit einander verbunden zu denken, die den formalen Gesetzen der Addition genügt. Unter einem System von Größen verstehen wir vorläufig die Gesamtheit der Größen, die mittels derselben Einheiten ε_1 und ε_2 durch willkürliche Wahl von a_1 und a_2 gebildet werden können.

Die Summe und Differenz zweier Größen desselben Systems $\alpha = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$ und $\beta = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$ definieren wir durch die Gleichung $\alpha \pm \beta = (a_1 \pm b_1) \varepsilon_1 + (a_2 \pm b_2) \varepsilon_2$.

Für die Multiplikation stellen wir vier Forderungen auf:

A. Ihre Eindeutigkeit.
B. Die Erhaltung des Systems.
C. Das Distributionsgesetz.
D. Das Kommutationsgesetz.

Die zweite Forderung sagt aus, daß das Produkt zweier Größen demselben System wie diese selbst angehören soll. Es müssen also insbesondere drei Gleichungen der Form bestehen:

1. $\varepsilon_1^2 = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$, 2. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$, 3. $\varepsilon_2^2 = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2$.

Anderseits bestehen infolge *A.* keine Gleichungen derselben Form mit anderen Zahlenkoeffizienten. Aus *C.* und *D.* folgt dann, daß wir das Produkt irgend zweier Größen des betrachteten Systems angeben können, sowie die in 1. 2. und 3. auftretenden Zahlenkoeffizienten gegeben sind.

Das Bestehen des Assoziationsgesetzes wurde oben nicht gefordert und dadurch haben wir uns von dem von Weierstraß, Dedekind und Kronecker eingenommenen Standpunkt entfernt, insofern als sie auch das Assoziationsgesetz forderten und die hiedurch charakterisierten Größensysteme untersuchten, der

Digitized by Google

erstere infolge arithmetischen Interesses [1]), die beiden letzteren im Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Zahlen [2]) bezw. der Divisoren-(Modul)Systeme algebraischer Funktionen.[3]) Diese Größensysteme fallen sowohl unter die von uns betrachteten als unter die mit assoziativer aber nicht notwendig kommutativer Multiplikation, die hauptsächlich infolge ihres Auftretens in der Gruppentheorie eine eingehendere Behandlung erfahren haben.[4]) Wegen dieses Umstandes schränkte auch Study [5]) die Bezeichnung System komplexer Zahlen auf Größensysteme ein, in denen die Multiplikation den Forderungen *A.*, *B.*, *C.* und dem Assoziationsgesetz genügt und eine sogenannte Haupteinheit existiert. Dem wird hier insoferne Rechnung getragen, als wir unter Voraussetzung der Forderungen *A.*, *B.*, *C.*, *D.* von Systemen komplexer Größen sprechen.

Die Systeme komplexer Größen sollen im folgenden von vorwiegend arithmetischen Gesichtspunkten aus untersucht werden. Demgemäß wird der erste Abschnitt von besonderen Faktoren unter Annahme einer beliebigen endlichen Anzahl von Einheiten handeln. Im zweiten Abschnitt werden die verschiedenen Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten durch möglichst einfache Repräsentanten angegeben. Im dritten wird der Zusammenhang der Systeme komplexer Größen mit zwei Einheiten mit gewissen speziellen Kegelschnittnetzen auseinandergesetzt. Dabei ergibt sich eine bisher wohl noch nicht bemerkte Erzeugungsweise der Kegelschnittnetze mit einem Grundpunkt und nicht zerfallender Hessescher Kurve. Im vierten Abschnitte werden noch einmal die verschiedenen Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten von geometrischen Gesichtspunkten aus gewonnen. Im fünften Abschnitt wird ein kurzer Ausblick auf den Zusammenhang der Systeme mit drei Einheiten mit geometrischen Fragen gegeben. Zum Schluß folgt eine tabellarische Zusammentsellung der Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten.

Besondere Faktoren.

Wir nehmen die Multiplikationsregeln in der Form an:

$$\varepsilon_i . \varepsilon_k = \sum_{s=1}^{n} c_{iks}\, \varepsilon_s, \text{ wobei } c_{iks} = c_{kis}.$$

Unter welchen Bedingungen ist dann die Division $\alpha . \xi = \beta$ ausführbar, wenn ξ als die zu bestimmende Größe gedacht ist? Die Gleichung

$$\sum_i a_i \varepsilon_i . \sum_k x_k \varepsilon_k = \sum_p b_p \varepsilon_p \qquad (1)$$

[1]) Gött. Nachr. 1884.
[2]) Gött. Nachr. 1885.
[3]) Berl. Ber. 1888.
[4]) Vergl. Enc. I A 4, Study.
[5]) Gött. Nachr. 1889, p. 238.

Digitized by Google

führt zu

$$\sum_{i,k} c_{ikp}\, a_i\, x_k = b_p \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Dieses System von Gleichungen ist bestimmt nach den x auflösbar, wenn die Determinante

$$\left| \sum_{i} c_{ikp}\, a_i \right| \tag{3}$$

nicht verschwindet, und zwar existiert in diesem Falle eine und nur eine Lösung ξ. Verschwindet dagegen obige Determinante, so existiert entweder keine Lösung ξ oder es gibt deren unendlich viele. Letzteres tritt ein, wenn β so gewählt wird, daß der Rang der Matrix von (3) bei ihrer Erweiterung durch die aus den b_p gebildete Kolonne nicht erhöht wird. Ist in diesem Falle r der Rang, so gibt es ∞^{n-r} Lösungen ξ. Wir fragen weiter, wie viele Zahlen β obiger Eigenschaft zu unserem festen α gehören. Wir greifen aus (2) r linear unabhängige Gleichungen heraus und nehmen eine beliebige weitere hinzu. Die Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades der aus diesen $r+1$ Gleichungen hervorgehenden Matrix müssen dann verschwinden, insbesondere jene, in denen eine Kolonne aus Zahlen b_p besteht. Die letzte Gleichung können wir auf $n-r$ Arten wählen und kommen so zu $n-r$ linearen homogenen Gleichungen, zwischen den n Zahlen b_p, die die notwendige und hinreichende Bedingung dafür sind, daß die durch die Kolonne der b_p erweiterte Matrix von (3) den Rang r hat. [6]) Obige $n-r$ Gleichungen sind linear unabhängig und folglich können wir zu dem geg. α die Größe β noch auf ∞^r Arten so wählen, daß ein Quotient ξ existiert. Diese $\infty^r \beta$ erfüllen ebenso wie die ∞^{n-r} zu irgend einem bestimmten aus ihnen gehörigen Quotienten ξ eine lineare Mannigfaltigkeit. Bezeichnen wir die Gesamtheit der aus einer Größe γ durch Multiplikation mit irgend einer gemeinen komplexen Zahl k hervorgehenden Größen $k.\gamma$ als Größenschar, so können wir sagen, daß obige Mannigfaltigkeit der $\infty^r \beta$ sich in ∞^{r-1} Größenscharen anordnet, [7]) während sich die betrachteten $\infty^{n-r} \xi$ nur dann in Größenscharen anordnen, wenn $\beta = 0 \equiv \sum_k 0.\varepsilon_k$ ist.

Da die Größe $\beta = 0$ unter obigen ∞^r Vielfachen von α immer vorkommt, bezeichnete Weierstraß ein α, für das die Determinante (3) verschwindet, als Nullteiler. [8]) Die ∞^{n-r} Lösungen ξ sind selbstverständlich auch Nullteiler. Verschwindet (3) identisch, d. h. für jedes α, so ist jede Größe des Systems Nullteiler und die Division im allgemeinen unmöglich. Während in den Systemen höherer

[6]) Vergl. Pascal, Repertorium. 2. Aufl., I. Bd., p. 72—73.

[7]) Für $n = 2$ kann folglich nur eine endl. Anzahl solcher Größenscharen vorhanden sein.

[8]) Gött. Nachr. 1884 p. 398.

Digitized by Google

komplexer Zahlen jedes Vielfache eines Nullteilers wieder ein Nullteiler ist, braucht dies bei den komplexen Größen, wie spätere Beispiele zeigen werden, durchaus nicht der Fall zu sein.

Die Gleichung $\alpha.\xi = \alpha$ hat, wenn α nicht ein Nullteiler ist, eine und nur eine Lösung ξ, die wir als Relativeinheit der Größenschar $k.\alpha$ bezeichnen.[9]) Wir fragen, ob umgekehrt auch jede Größe α Relativeinheit von einer anderen ξ ist. $\xi.\alpha = \xi$ führt zu

$$\sum_{i,k} c_{ikp} x_i a_k = x_p \text{ für } p = 1, 2, \ldots n.$$

Eine von $\xi = 0$ verschiedene Lösung existiert also dann und nur dann, wenn die Determinante

$$\left| \sum_k c_{ikp} a_k - d_{ip} \right| \tag{4}$$

verschwindet, wobei $d_{ip} = 1$ für $i = p$ und $d_{ip} = 0$ für $i \neq p$ ist. Da sie im allgemeinen nicht verschwindet, wird α im allgemeinen nicht Relativeinheit einer anderen Größe sein. Ist aber (4) vom Range $r < n$, so ist α Relativeinheit von ∞^{n-r-1} Größenscharen, die eine lineare Mannigfaltigkeit erfüllen. Setzen wir (4) gleich Null, so erhalten wir eine in den a_k inhomogene Gleichung n^{ten} Grades. Betrachten wir eine bestimmte Größenschar $k.\alpha$, so folgt hieraus weiter, daß in ihr im allgemeinen n Relativeinheiten vorkommen. Setzen wir die Koeffizienten von k^n, $k^{n-1}, \ldots k$ gleich Null, so erhalten wir n homogene Gleichungen zwischen den n Zahlen a. Daraus folgt, daß im allgemeinen jede Größenschar mindestens eine Relativeinheit enthält, daß es mindestens $n!$ Größenscharen gibt, die nicht mehr als je eine Relativeinheit enthalten usw. Ein Nullteiler besitzt im allgemeinen keine Relativeinheit, doch gibt es Systeme, in denen Nullteiler mit unendlich vielen Relativeinheiten vorkommen.

Haupteinheit nennt man eine Größe, die bei der Multiplikation alle anderen Größen reproduziert. Für eine Haupteinheit α besteht die Gleichung $\xi.\alpha = \xi$ für jedes ξ. Daraus folgt:

$$\sum_{i,k} c_{ikp} x_i a_k \equiv x_p \text{ für } p = 1, 2, \ldots n$$

und weiter:

$$\sum_k c_{ikp} a_k = d_{ip} \text{ für } i, p = 1, 2, \ldots n,$$

[9]) In Systemen komplexer Zahlen gibt es insoferne keine Relativeinheiten, als jede Relativeinheit einer Zahl, die kein Nullteiler ist, eine Haupteinheit ist. Vergl. Scheffers, Leipz. Ber. 1889, p. 293.

Digitized by Google

wenn $d_{ip} = 1$ für $i = p$ und $d_{ip} = 0$ für $i \neq p$ ist. Dafür, daß eine Haupteinheit existiert — mehr als eine kann ja nicht existieren —, ist es demnach notwendig und hinreichend, daß sowohl jene aus den c_{ikp} gebildete Matrix, in deren Zeilen k variiert, während in den Kolonnen i und p variieren, als auch die aus dieser Matrix durch Beifügen der Kolonne der d_{ip} abgeleitete vom Range n sind.

Unter einer Eigenwurzel verstehen wir eine Größe ξ, die ihr eigenes Quadrat ist: $\xi^2 = \xi$. Das führt zu:

$$\sum_{i,k} c_{ikp} x_i x_k = x_p \quad \text{für } p = 1, 2, \ldots n.$$

Diese Gleichungen haben 2^n oder unendlich viele Wurzeln, unter welchen $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ als jedenfalls isolierte auftritt, wie man durch Deutung der Gleichungen als Hyperflächen im R_n unmittelbar erkennt. Es gibt also höchstens $2^n - 1$ von der trivialen Eigenwurzel 0 verschiedene Eigenwurzeln oder deren unendlich viele.[10]) Fällt einer der 2^n Schnittpunkte der n Hyperflächen in den unendlich fernen R_{n-1}, so kommt eine Eigenwurzel zum Wegfall und es tritt an ihre Stelle, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden, eine Nullwurzelschar.

Nullwurzel nennen wir eine Größe, deren Quadrat gleich Null ist: $\xi^2 = 0$ oder:

$$\sum_{i,k} c_{ikp} x_i x_k = 0 \quad \text{für} \quad p = 1, 2, \ldots n.$$

Es folgt, daß es im allgemeinen keine von der trivialen $\xi = 0$ verschiedenen Nullwurzeln gibt, daß es aber in besonderen Fällen endlich viele bis zu 2^{n-1} oder aber schon unendlich viele aber keineswegs mehr als ∞^{n-2} Nullwurzelscharen geben kann, falls nicht alle c_{ikp} verschwinden. Jede Nullwurzelschar bringt eine Eigenwurzel zum Wegfall. Die Summe der Anzahlen der Eigenwurzeln und der Nullwurzelscharen ist, falls sie endlich ist, gleich $2^n - 1$.

Die Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten.

Sind die in den Multiplikationsregeln auftretenden Koeffizienten c_{ikp} gegeben, so ist das Rechnen in dem betreffenden System vollkommen bestimmt. Man betrachtet infolgedessen zwei Systeme als identisch, die gleiche Koeffizienten c_{ikp} besitzen, ganz unabhängig davon, was die ε_i bedeuten. Gehen wir von dem System mit den Einheiten ε_i durch eine linear homogene Substitution mit nicht

[10]) Eine von 0 und der Haupteinheit verschiedene komplexe Zahl kann nur dann eine Eigenwurzel sein, wenn sie zugleich ein Nullteiler ist.

Digitized by Google

verschwindender Determinante:

$$\varepsilon_i' = \sum_k s_{ik}\,\varepsilon_k \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

zum System mit den Einheiten ε_i' über, so enthält dieses dieselben Größen wie das erstere und wird als mit ihm äquivalent oder zu demselben Typus gehörig bezeichnet. Sind die s_{ik} sämtlich reell, so sagt man, die Systeme wären nicht nur von demselben Typus, sondern auch von derselben Gestalt.[11]) Man beschränkte sich bisher auf die Unterscheidung reeller Gestalten und dem wollen wir uns im folgenden anschließen. Reell nennen wir einen Typus, in dem alle Koeffizienten c_{ikp} reell sind. Zwei reelle Typen, die durch eine reelle Substitution in einander übergeführt werden können, haben dann dieselbe reelle Gestalt. Entsprechend wie es bei den komplexen Zahlen geschieht, ist jetzt die Aufgabe zu stellen, alle Typen und reellen Gestalten durch möglichst einfache Repräsentanten anzugeben, d. h. durch ihnen angehörige Systeme, in deren Multiplikationsregeln möglichst wenige von 0 und 1 verschiedene c_{ikp} auftreten. Dieses Ziel wird man erreichen, indem man als Einheiten besondere Faktoren wählt. Die Unterscheidung der Typen wird dadurch von dem Auftreten der oben angegebenen besonderen Faktoren abhängig gemacht.

Im Falle $n = 2$ nehmen wir, um nicht viele Indizes schreiben zu müssen, die Multiplikationsregeln in der Form an:

$$\varepsilon_1^2 = a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_1\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = c_1\,\varepsilon_1 + c_2\,\varepsilon_2.$$

Es gibt 3 von 0 verschiedene Eigenwurzeln ξ. Sie sind aus den Gleichungen:

$$a_1 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 = x_1 \tag{1}$$

$$a_2 x_1^2 + 2 b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 = x_2 \tag{2}$$

zu berechnen. Wir nehmen an, daß weder $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, noch $x_1 \neq 0$, $x_2 = 0$ eine Eigenwurzel liefert und schließen die triviale Eigenwurzel $\xi = 0$ von unseren Betrachtungen aus. Wir multiplizieren (1) und (2) mit x_2 bezw. x_1 und bilden die Differenz:

$$a_2 x_1^3 + (2 b_2 - a_1)\, x_1^2 x_2 + (c_2 - 2 b_1)\, x_1 x_2^2 - c_1 x_2^3 = 0. \tag{3}$$

Setzen wir $\frac{x_1}{x_2} = y$, so bekommen wir:

$$a_2 y^3 + (2 b_2 - a_1)\, y^2 + (c_2 - 2 b_1)\, y - c_1 = 0. \tag{4}$$

[11]) Study, Gött. Nachr. 1889, p. 240.

Digitized by Google

Aus dieser Gleichung sind die drei Größenscharen zu berechnen, denen die Eigenwurzeln angehören. Für jede Wurzel von (4) ist nämlich auch (3) erfüllt und (1) oder (2) kann immer in der betreffenden Größenschar erfüllt werden, woraus dann (2) bezw. (1) folgt.

Wir nehmen an, daß drei von Null verschiedene Eigenwurzeln vorhanden sind.

Unter den hier möglichen Fällen betrachten wir zunächst den, daß mindestens zwei der drei Eigenwurzeln verschieden sind. Wählen wir sie als neue Einheiten, so bekommen wir die allgemeinste Typenklasse in der Form:

$$\text{I. T. 1. R.:}\quad \varepsilon_1^2=\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1.\varepsilon_2=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2^2=\varepsilon_2,\quad (1-4b_1b_2\neq 0).$$

b_1 und b_2 sind dabei wesentliche Parameter, denn ein bestimmter Typus obiger Klasse kann höchstens auf sechs Arten durch verschiedene Parameter b_1, b_2 dargestellt werden, da wir nur auf drei Arten unter den drei Eigenwurzeln zwei auswählen können.

Für die dritte Eigenwurzel bekommen wir aus (1) und (2):

$$x_1+2b_1x_2=1 \tag{5}$$

$$2b_2x_1+x_2=1, \tag{6}$$

woraus unter der Bedingung $\Delta\equiv 1-4b_1b_2\neq 0$ folgt:

$$x_1=\frac{1-2b_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{1-2b_2}{\Delta}. \tag{7}$$

Gehen wir durch die Substitution

$$\varepsilon_1'=\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2'=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2$$

zu neuen Einheiten über, so folgt, falls $x_2\neq 0$ ist:

$$\varepsilon_1'.\varepsilon_2'=\frac{1-b_1-b_2}{\Delta}\varepsilon_1'+b_2\varepsilon_2',$$

so daß die Parameterwerte b_1', b_2' eines zum System mit den Parameterwerten b_1, b_2 äquivalenten Systems mit letzteren durch eine Substitution der von:

$$S:\quad b_1'=b_2,\quad b_2'=b_1$$

$$T:\quad b_1'=b_1,\quad b_2'=\frac{1-b_1-b_2}{1-4b_1b_2}$$

Digitized by Google

erzeugten Gruppe: $1,\ S,\ T,\ S.T,\ T.S,\ S.T.S \equiv T.S.T$ zusammenhängen.[12])

Im Falle $\Delta = 0$ ist $b_2 = \frac{1}{4b_1}$, so daß (5) und (6) nur dann mit einander verträglich sind, wenn $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ ist. Dann existieren aber unendlich viele Eigenwurzeln, so daß dieser Fall nicht unter *A.* zu betrachten ist.

Um die in der ersten Typenklasse enthaltenen reellen Gestalten zu bekommen, haben wir die Koeffizienten in den ursprünglichen Multiplikationsregeln sämtlich reell anzunehmen. Sind dann die drei Eigenwurzeln sämtlich reell, so können wir durch eine reelle Substitution zwei von ihnen zu Einheiten machen und kommen so zum 1. R. des I. T. mit reellem b_1 und b_2. Umgekehrt gehört der I. R. des I. T. für beliebige reelle b_1 und b_2 einer reellen Gestalt an. Sind zwei der Eigenwurzeln konjugiert komplex:

$$(p_1 \pm i p_2)\,[\varepsilon_1 + (q_1 \pm i q_2)\,\varepsilon_2] = \begin{cases} \eta_1, \\ \eta_2, \end{cases}$$

wobei $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2$ reell sind und ε_1 die reelle Eigenwurzel ist. so führen wir neue Einheiten ein:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_2 = \frac{q_2\,\varepsilon_2' - q_1\,\varepsilon_1'}{q_1^2 + q_2^2}.$$

Dann wird:

$$\left.\begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{matrix}\right\} = \frac{(p_1 \pm i p_2)\,q_2}{q_2 \pm i q_1}\,(\varepsilon_1' \pm i\varepsilon_2') = (r_1 \pm i r_2)\,(\varepsilon_1' \pm i\varepsilon_2'). \qquad (8)$$

Aus $\eta_1^2 = \eta_1$ oder $\eta_2^2 = \eta_2$ folgt dann durch Trennung des Reellen vom Imaginären und Auflösung der erhaltenen Gleichungen nach $\varepsilon_1'.\varepsilon_2'$ und $\varepsilon_2'^2$:

$$\varepsilon_1'.\varepsilon_2' = \frac{r_1\,\varepsilon_2' - r_2\,\varepsilon_1'}{2\,(r_1^2 + r_2^2)}, \qquad \varepsilon_2'^2 = \frac{(r_1^2 + r_2^2 - r_1)\,\varepsilon_1' - r_2\,\varepsilon_2'}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Setzen wir noch:

$$\frac{-r_2}{r_1^2 + r_2^2} = s_1, \quad \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2} = s_2,$$

[12]) Ist $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 \neq \frac{1}{2}$ oder $b_1 \neq \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{2}$, so fällt die dritte Eigenwurzel mit ε_2 bezw. ε_1 zusammen und obige Gruppe besteht aus den Substitutionen 1, *S.*

Digitized by Google

so sind wir durch lauter reelle Substitutionen zu den Multiplikationsregeln gelangt:

I. T. 2. r. G. 1. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1,\ \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{s_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2}{2},\ \varepsilon_2^2 = (1 - s_2)\varepsilon_1 + s_1 \varepsilon_2.$

Gehen wir durch die komplexe Substitution (8) zu den Einheiten η_1, η_2 über, so kommen wir zum 1. R. des I. T.

Auf eine entsprechende Form kann man auch die 1. r. G. bringen. Sind ε_1, $\eta_1 = p_1(\varepsilon_1 + p\varepsilon_2)$, $\eta_2 = q_2(\varepsilon_1 + q\varepsilon_2)$ die drei reellen Eigenwurzeln und führen wir die Substitution:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1',\ \varepsilon_2 = -\frac{(p+q)\varepsilon_1' + (p-q)\varepsilon_2'}{2pq}$$

aus, so wird:

$$\eta_1 = \frac{p_1}{2q}(q-p)(\varepsilon_1' + \varepsilon_2') = r_1(\varepsilon_1' + \varepsilon_2'),$$

$$\eta_2 = \frac{q_1}{2p}(p-q)(\varepsilon_1' - \varepsilon_2') = r_2(\varepsilon_1' - \varepsilon_2').$$

Lösen wir $\eta_1^2 = \eta_1$ und $\eta_2^2 = \eta_2$ nach $\varepsilon_1' . \varepsilon_2'$ und $\varepsilon_2'^2$ auf, so bekommen wir:

$$\varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{(r_2 - r_1)\varepsilon_1' + (r_2 + r_1)\varepsilon_2'}{4 r_1 r_2},\quad \varepsilon_2'^2 = \frac{(r_1 - 2 r_1 r_2 + r_2)\varepsilon_1' + (r_2 - r_1)\varepsilon_2'}{2 r_1 r_2}.$$

Setzen wir noch

$$\frac{r_2 - r_1}{2 r_1 r_2} = s_1, \qquad \frac{r_2 + r_1}{2 r_1 r_2} = s_2,$$

so nehmen die Multiplikationsregeln die Form an:

I. T. 1. r. G. 1. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1,\ \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{s_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2}{2},\ \varepsilon_2^2 = (s_2 - 1)\varepsilon_1 + s_1 \varepsilon_2.$

Kehren wir jetzt zum I. T. 1. R. zurück, so bekommen wir für die Koeffizienten der Nullteilerpaare aus $\xi . \eta = 0$, wobei $\xi \neq 0$ und $\eta \neq 0$ vorausgesetzt ist:

$$x_1 y_1 + b_1(x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0$$

$$b_2(x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_2 y_2 = 0.$$

Digitized by Google

Wäre $b_1 = b_2 = 0$, dann wären schon ε_1 und ε_2 die Nullteiler. Nehmen wir zunächst an, daß das nicht der Fall und etwa $b_2 \neq 0$ ist, so ergibt sich:

$$x_1 : x_2 = (1 - \sqrt{\Delta}) : (-2b_2), \quad y_1 : y_2 = (1 + \sqrt{\Delta}) : (-2b_2).$$

Führen wir die Substitution aus:

$$\varepsilon_1' = k(1 - \sqrt{\Delta})\varepsilon_1 - 2kb_2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2' = l(1 + \sqrt{\Delta})\varepsilon_1 - 2lb_2\varepsilon_2,$$

wobei k und l Parameter sind, so ist:

$$\varepsilon_1'^2 = kt_1\varepsilon_1' + \frac{k^2}{l}t_2\varepsilon_2', \quad \varepsilon_2'^2 = \frac{l^2}{k}u_1\varepsilon_1' + lu_2\varepsilon_2'. \tag{9}$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} t_1 &= -(1 + b_2)\sqrt{\Delta} - 2b_1b_2 - b_2 + 1 \\ t_2 &= \quad (1 - b_2)\sqrt{\Delta} + 2b_1b_2 + b_2 - 1 \\ u_1 &= -(1 - b_2)\sqrt{\Delta} + 2b_1b_2 + b_2 - 1 \\ u_2 &= \quad (1 + b_2)\sqrt{\Delta} - 2b_1b_2 - b_2 + 1. \end{aligned}$$

Setzen wir endlich:

I. T. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = p_1\varepsilon_1' + p_2\varepsilon_2', \quad \varepsilon_1'.\varepsilon_2' = 0, \quad \varepsilon_2'^2 = q_1\varepsilon_1 + q_2\varepsilon_2,$

a) so können wir, falls $t_2 \neq 0$ und $u_1 \neq 0$ ist, durch passende Wahl von k und l die Form erreichen:

I. T. a. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = a\varepsilon_1' + \varepsilon_2', \quad \varepsilon_1'.\varepsilon_2' = 0, \quad \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_1' + c\varepsilon_2'.$ [13])

Diesen Typus können wir auch auf die Form bringen:

I. T. a. 3. R.
$$\begin{aligned} &\varepsilon_1'^2 = a'\varepsilon_1' + (1 - a')\varepsilon_2', \quad \varepsilon_1'\varepsilon_2' = 0, \\ &\varepsilon_2'^2 = (1 - b')\varepsilon_1' + b'\varepsilon_2', \quad (a' \neq 1, \ b' \neq 1). \end{aligned}$$

Wir bekommen nämlich für k und l die Gleichungen:

$$l = \frac{k^2 t_2}{1 - kt_1},$$

$$k^3(t_2^2 u_1 - t_1 t_2 u_2) + k^2(t_2 u_2 - t_1^2) + 2kt_1 - 1 = 0.$$

[13]) Da weder $a\varepsilon_1' + \varepsilon_2'$ noch $\varepsilon_1' + c\varepsilon_2'$ ein Nullteiler ist, liegt hier ein Beispiel dafür vor, daß die Vielfachen eines Nullteilers nicht wieder Nullteiler zu sein brauchen.

Digitized by Google

Die letzte Gleichung hat immer Wurzeln, da der Koeffizient von k^3 gleich $4 b_2 \Delta$, also von Null verschieden ist. $t_1 = 0$ führt ebenfalls zu Lösungen l und k und $1 - k t_1 = 0$ zur Bedingung $t_2^2 . u_1 = 0$, die der Annahme widerspricht.

b) $t_2 = 0$ oder $u_1 = 0$ führen durch Quadrieren zu:

$$b_2^2 . b_1 (b_1 + b_2 - 1) = 0.$$

Ist $b_1 = 0$, so gelangen wir, indem wir in (9) $k = -\frac{1}{b_2}$, $l = \frac{1}{2}$ setzen zur Typenklasse:

I. T. b. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1'$, $\varepsilon_1' . \varepsilon_2' = 0$, $\varepsilon_2'^2 = d \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$, $(d \neq 0)$,

wobei diese Darstellung mit der unter I. T. 1. R. enthaltenen durch die Gleichungen $b_1 = 0$, $d = b_2 (1 - b_2)$ zusammenhängt. ε_1' besitzt hier unendlich viele Relativeinheiten: $\frac{v_1 \varepsilon_1' + v_2 \varepsilon_2'}{v_1}$.

Der Fall $b_1 + b_2 = 1$ liefert nichts neues, da wir von den Parametern $b_1 = 1 - b_2$, b_2 durch die Substitution STS der oben angegebenen Gruppe zu den Parametern $b_1' = 0$, $b_2' = b_2$ gelangen.

c) Endlich ist noch der Fall $b_1 = b_2 = 0$ zu betrachten. In ihm fallen zwei Eigenwurzeln mit den Nullteilern zusammen, so daß der erste Repräsentant mit dem zweiten identisch ist:

I. T. c. 1. u. 2. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$.

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ist die dritte Eigenwurzel; da sie ε_1 und ε_2 bei der Multiplikation reproduziert, ist sie Haupteinheit. Dieser Typus enthält zwei reelle Gestalten entsprechend den oben angegebenen zwei reellen Gestaltenklassen, die in der ersten Typenklasse enthalten sind. Wie oben folgt, indem wir noch $\eta_1 . \eta_2 = 0$ setzen:

I. T. c. $\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ r. G. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2 = \pm \varepsilon_1$.

Wir nehmen jetzt an, daß die drei Eigenwurzeln in eine zusammenfallen. Wählen wir sie als Einheit, so haben die Multiplikationsregeln die Form:

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2,$$

wobei b_1, b_2, c_1, c_2 der Bedingung unterworfen sind, daß eine von 0 und ε_1 verschiedene Eigenwurzel nicht vorkommt. (1) und (2) nehmen hier die Form an:

$$x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 = x_1 \tag{10}$$

$$2 b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 = x_2 \tag{11}$$

Digitized by Google

und haben von $x_1 = x_2 = 0$ abgesehen nur noch das Lösungspaar $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ gemeinsam, und zwar dreifach. Setzen wir $x_2 = 0$, so ist (11) befriedigt und aus (10) folgt $x_1 = 0, 1$. Soll $2 b_2 x_1 + c_2 x_2 = 1$ durch $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ befriedigt werden können, so folgt $b_2 = \frac{1}{2}$. Setzen wir $x_1 = 1 - c_2 x_2$ in (10) ein, so bekommen wir:

$$(2 b_1 - c_2) x_2 + (c_2^2 - 2 b_1 c_2 + c_1) x_2^2 = 0. \qquad (12)$$

Es muß also $2 b_1 = c_2$ und $c_2 (2 b_1 - c_2) \neq c_1$, d. h. $c_1 \neq 0$ sein. Setzen wir:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = \frac{-2 b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{c_1}},$$

so erhalten wir:

II. T. 1. R. $\quad \varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_1'.$

Dieser Typus enthält zwei reelle Gestalten. Die drei zusammenfallenden Eigenwurzeln sind ja bei einem reellen Typus immer reell und ist noch $c_1 > 0$, so ist auch obige Substitution reell. Ist $c_1 < 0$, so setzen wir in ihr an Stelle von $\sqrt{c_1} \ldots \sqrt{-c_1}$; dann ist sie wieder reell, an Stelle von $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$ tritt aber $\varepsilon_2^2 = -\varepsilon_1$, so daß die reellen Gestalten repräsentiert sind durch:

II. T. $\left.\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}\right\}$ r. G. $\quad \varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_2'}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = \pm \varepsilon_1'.$

Den zweiten Repräsentanten des II. T. erhalten wir durch Beziehung auf die Nullteiler. Wir setzen:

$$\eta_1 = 2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad \eta_2 = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

und bekommen:

II. T. 2. R. $\quad \eta_1^2 = 3 \eta_1 + \eta_2, \quad \eta_1 . \eta_2 = 0, \quad \eta_2^2 = \eta_1 + 3 \eta_2.$

Für die 1. r. G. sind die Nullteilerscharen reell, für die 2. r. G. konjugiert komplex.

B. III. Wir nehmen an, daß zwei von 0 verschiedene Eigenwurzeln vorhanden sind. Sind sie getrennt, so haben wir denselben Ansatz zu machen wie unter I. und b_1 und b_2 so einzuschränken, daß keine dritte Eigenwurzel existiert. Das ist, wie (5) und (6)

Digitized by Google

zeigen der Fall, wenn $\Delta \equiv 1 - 4 b_1 b_2 = 0$ und dabei nicht $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ ist. Daraus ergibt sich:

III. T. 1. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{1}{4 b_2} \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2, \quad \left(b_2 \neq \frac{1}{2}, 0\right).$

Die Nullteilerscharen fallen in der Nullwurzelschar $k(\varepsilon_1 - 2 b_2 \varepsilon_2)$ zusammen. Die Substitution:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = \frac{2 b_2}{1 - 2 b_2} (\varepsilon_1 - 2 b_2 \varepsilon_2)$$

liefert dann:

III. T. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = b_2 (\varepsilon_1' + \varepsilon_1'), \quad \varepsilon_2'^2 = 0, \quad \left(b_2 \neq \frac{1}{2}, 0\right).$

Hätten wir statt der Eigenwurzel ε_1 die andere ε_2 beibehalten, so wäre im 2. R. nur an Stelle von b_2 der Parameter $b_2' = \frac{1}{4 b_2}$ getreten, so daß äquivalente Typen durch diese Substitution zusammenhängen.

Für einen im III. T. enthaltenen reellen Typus sind die Eigenwurzeln entweder reell getrennt oder konjugiert komplex, die Nullwurzelschar jedenfalls reell. Im ersten Falle lassen sich die beiden oben angegebenen Repräsentanten durch reelle Substitutionen erreichen. Im zweiten wählen wir eine Nullwurzel als eine Einheit und die andere so, daß die Eigenwurzeln in der Form (8) erscheinen. Durch dieselben Überlegungen wie dort erhalten wir zunächst die Multiplikationsregeln:

$$\varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{s_1 \varepsilon_1' + s_2 \varepsilon_2'}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = - s_2 \varepsilon_1' + s_1 \varepsilon_2'.$$

Setzen wir noch

$$\varepsilon_1' = s_2 \varepsilon_1'', \quad \varepsilon_2' = s_1 \varepsilon_2'', \quad \frac{s_2^2}{s_1^2} = t,$$

so bekommen wir:

III. T. 2. r. G. $\varepsilon_1''^2 = 0, \quad \varepsilon_1'' . \varepsilon_2'' = \frac{\varepsilon_1'' + \varepsilon_2''}{2}, \quad \varepsilon_2''^2 = - t \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' \quad (t > 0).$

Auf demselben Wege, auf dem wir oben einen Repräsentanten der 1. r. G. des I. T. erhielten, erhalten wir hier:

III. T. 1. r. G. $\varepsilon_1''^2 = 0, \quad \varepsilon_1'' . \varepsilon_2'' = \frac{\varepsilon_1'' + \varepsilon_2''}{2}, \quad \varepsilon_2''^2 = t \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'', \quad (t > 0).$

Digitized by Google

IV. Fallen die beiden von Null verschiedenen Eigenwurzeln zusammen, so nehmen wir die Multiplikationsregeln zunächst in der unter II. angegebenen Form an. Es folgt dann wie dort zunächst $b_2 = \frac{1}{2}$, aus (12) folgt aber jetzt:

$$2b_1 - c_2 \neq 0, \quad c_2^2 - 2b_1 c_2 + c_2 = 0,$$

so daß die Multiplikationsregeln lauten:

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2^2 = c_2 (2b_1 - c_2) \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2.$$

Setzen wir:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = \frac{c_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{c_2 - 2b_2},$$

so bekommen wir:

IV. T. (r. G.) $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = 0.$

Da für einen reellen Repräsentanten des Typus IV die Eigenwurzel und die Nullwurzelschar immer reell sind, enthält IV eine einzige reelle Gestalt.

Von ε_2' verschiedene Nullteilerscharen sind nicht vorhanden.

C. Wir nehmen an, daß eine einzige von Null verschiedene Eigenwurzel vorhanden ist. Dann sind 2 (getrennte oder zusammenfallende) Nullwurzelscharen vorhanden. Wählen wir die Eigenwurzel und eine Nullwurzel als Einheiten, so lauten die Multiplikationsregeln zunächst:

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = 0.$$

Wir haben die Bedingung dafür aufzustellen, daß keine zweite Eigenwurzel existiert. (10) und (11) nehmen die Form an:

$$x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 = x_1, \quad x_2 (2b_2 x_1 - 1) = 0.$$

Aus $x_2 = 0$ folgt wieder: $x_1 = 0, 1$. Wir haben die Fälle $b_2 \neq 0$ und $b_2 = 0$ zu trennen.

V. $b_2 \neq 0$. Setzen wir $x_1 = \frac{1}{2b_2}$ in der ersten Gleichung ein, so bekommen wir die Gleichung

$$1 - 2b_2 + 4b_1 b_2 x_2 = 0,$$

Digitized by Google

die durch keinen Wert x_2 befriedigt werden darf, so daß $b_2 \neq \frac{1}{2}$ und $b_1 = 0$ sein muß.

V. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_2 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = 0 \quad \left(b_2 \neq 0, \frac{1}{2}\right).$

Von $k . \varepsilon_2$ verschiedene Nullteiler- bezw. Nullwurzelscharen sind nicht vorhanden, so daß ein reeller Repräsentant des V. T. immer durch reelle Substitutionen in den oben angegebenen überführt werden kann, wobei dann b_2 reell ist.

Ist $b_2 = 0$ und $b_1 \neq 0$, so lauten die Multiplikationsregeln:

VI. T. 1. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^2 = 0.$

Hier ist noch eine von $k \varepsilon_2$ verschiedene Nullwurzelschar $k (2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ vorhanden. Setzen wir $\varepsilon_1' = 2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ und $\varepsilon_2' = \varepsilon_2$, so erhalten wir:

VI. T. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = 0, \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2', \quad \varepsilon_2'^2 = 0.$

Im VI. T. ist jede Größe ein Nullteiler und gepaarte Nullteilerscharen $k (x_1 \varepsilon_1' + x_2 \varepsilon_2')$, $k (y_1 \varepsilon_1' + y_2 \varepsilon_2')$ hängen durch die Gleichung $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{y_1}{y_2}$ zusammen. $k \varepsilon_1$ bezw. $k (\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$ und 0 sind die einzigen Größen, die dividiert werden können.

Sind für ein reelles System die Nullwurzelscharen reell, so können wir die reelle Gestalt, der es angehört, durch den 2. R. des VI. T. repräsentieren. Einen anderen Repräsentanten finden wir, indem wir $\eta_1 = \varepsilon_1$ als eine Einheit und die andere η_2 so wählen, daß $\varepsilon_1' = \eta_1 + \eta_2$ und $\varepsilon_2' = -\eta_1 + \eta_2$ ist. Dann folgt:

VI. T. 1. r. G. $\eta_1^2 = \eta_1 \quad \eta_1 . \eta_2 = 0, \quad \eta_2^2 = -\eta_1.$

Sind die Nullwurzelscharen konjugiert komplex, so wählen wir wieder $\eta_1 = \varepsilon_1$, aber η_2 so, daß $\varepsilon_1' = i \eta_1 + \eta_2$ und $\varepsilon_2' = -i \eta_1 + \eta_2$ ist. Dann folgt:

VI. T. 2. r. G. $\eta_1^2 = \eta_1, \quad \eta_1 \cdot \eta_2 = 0, \quad \eta_2^2 = \eta_1.$

I. Ist endlich $b_1 = b_2 = 0$, also:

VII. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 0,$

so sind die Größen $k \varepsilon_1$ und 0 die einzigen dividierbaren Größen. $k \varepsilon_2$ gibt mit jeder Größe multipliziert 0 und ist deshalb als

Digitized by Google

Hauptnullteilerschar zu bezeichnen. Anderseits gehört $k\varepsilon_2$ jedem Paare von Nullteilerscharen an.

D. Wir nehmen an, es sei überhaupt keine von Null verschiedene Eigenwurzel vorhanden. Dann sind drei Nullwurzelscharen vorhanden. Eine Nullwurzel wählen wir als eine Einheit, so daß $a_1 = a_2 = 0$ ist. Von den in (3) auftretenden Koeffizienten darf
VIII. dann höchstens c_1 von Null verschieden sein. Wir nehmen an $c_2 \neq 0$ und $b_1 \neq 0$. Dann ist $b_2 = 0$ und $c_2 = 2b_1 \neq 0$. Setzen wir:

$$\varepsilon_1' = \frac{c_1}{2b_1^2} \cdot \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{b_1},$$

so nehmen die Multiplikationsregeln die Form an:

VIII. T. (r. G.) $\varepsilon_1'^2 = 0, \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_2'^2 = 2(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$.

Die drei Nullwurzelscharen fallen hier in $k.\varepsilon_1'$ zusammen. Von der Nullwurzelschar verschiedene Paare von Nullteilerscharen sind nicht vorhanden. Jede Größe $k\varepsilon_1'$ hat unendlich viele Relativeinheiten $p_1\varepsilon_1' + \varepsilon_2'$. Unser Typus enthält eine reelle Gestalt, die sich vermöge der obigen reellen Substitution durch den angegebenen Repräsentanten darstellen läßt.

IX. Ist $c_1 \neq 0$ und $b_1 = 0$, so ist auch $b_2 = c_2 = 0$:

IX. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$.

Hier sind die Größen $k.\varepsilon_1$ und 0 die einzigen dividierbaren. $k.\varepsilon_1$ ist die einzige Nullwurzel- und Hauptnullteilerschar und gehört jedem Paare von Nullteilerscharen an. Der Typus enthält eine reelle Gestalt.

Ist $c_1 = 0$, so müssen wir auf (1) und (2) zurückgehen. Diese Gleichungen lauten jetzt:

$$2b_1 x_1 x_2 = x_1, \quad 2b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 = x_2.$$

Daraus, daß sie keine von $x_1 = x_2 = 0$ verschiedene Lösung besitzen sollen, folgt $c_2 = 0$ und außerdem entweder $b_1 = 0$ oder
X. $b_2 = 0$. Wir nehmen an, es sei $c_1 = 0$, $b_1 \neq 0$.

Dann folgt:

X. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^2 = 0$.

Hier sind nur die Größen $k\varepsilon_1$ und 0 dividierbar. Paare von Nullteilerscharen $k(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2)$, $k(y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2)$ hängen durch $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{y_1}{y_2}$ zusammen.

Digitized by Google

I. Ist $c_1 = 0$ und $b_1 = b_2 = 0$, so folgt:

XI. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = 0.$

E. Schließlich ist noch der Fall zu betrachten, daß unendlich viele Eigenwurzeln existieren. Dann verschwinden in (3) alle Koeffizienten, so daß $a_2 = c_1 = 0$ und $a_1 = 2b_2$, $c_2 = 2b_1$ ist. Setzen wir $\varepsilon_1 = 2b_2 \varepsilon_1'$ und $\varepsilon_2 = 2b_1 \varepsilon_2'$,[14]) so folgt:

XII. T. 1. R. (r. G.) $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2'.$

Es existieren hier die ∞^1 Eigenwurzeln $r\varepsilon_1' + (1-r)\varepsilon_2'$, so daß jede Größenschar eine enthält, von der Schar $k(\varepsilon_1' - \varepsilon_2')$ abgesehen, die die einzige Nullwurzelschar ist. Paare verschiedener Nullteilerscharen sind nicht vorhanden. Setzen wir $\varepsilon_1'' = \varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'' = (\varepsilon_1' - \varepsilon_2')r$, so erhalten wir:

XII. T. 2. R. (r. G.) $\varepsilon_1''^2 = \varepsilon_1'', \quad \varepsilon_1'' . \varepsilon_2'' = \frac{\varepsilon_2''}{2}, \quad \varepsilon_2''^2 = 0.$

Da für ein reelles System die angegebenen Substitutionen reell sind, enthält unser Typus eine reelle Gestalt, die durch die beiden obigen Repräsentanten vertreten wird.

Systeme von Größen mit zwei Einheiten und Kegelschnittnetze mit mindestens einem Grundpunkt. Die besonderen Faktoren.

Die allgemeinen Multiplikationsregeln haben die Form:

1. $\varepsilon_1^2 = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2$, 2. $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$, 3. $\varepsilon_2^2 = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2$.

Bilden wir das Produkt von irgend zwei Größen, so ergibt sich eine Gleichung der Form

$$4. \quad (d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2)(e_1 \varepsilon_1 + e_2 \varepsilon_2) = f_1 \varepsilon_1 + f_2 \varepsilon_2,$$

die wir als Produktbildung bezeichnen wollen. Diese Gleichung bezw. eine mit ihr identische erhalten wir, wenn wir 1, 2, 3 mit den Faktoren $d_1 e_1$, $d_1 e_2 + d_2 e_1$, $d_2 e_2$ multiplizieren und addieren. Fassen wir ε_1 und ε_2 als Parallelkoordinaten in der Ebene auf, so stellen 1, 2, 3 drei linear unabhängige Kegelschnitte durch den Ursprung dar und 4 einen Kegelschnitt des durch sie bestimmten Netzes. Umgekehrt entsprechen jedem Kegelschnitt K^2 des obigen

[14]) $b_1 = 0$ oder $b_2 = 0$ würde zu bereits betrachteten Typen mit endlich vielen Eigenwurzeln führen.

Digitized by Google

Netzes unendlich viele Produktbildungen, die sich aber nur durch Zahlenfaktoren unterscheiden, so daß wir immer in denselben Größenscharen bleiben. Um das zu zeigen, bringen wir in seiner Gleichung die quadratischen Glieder auf die linke, die linearen auf die rechte Seite. Das absolute Glied fehlt, da alle Kegelschnitte des Netzes durch den Ursprung gehen. Die binäre quadratische Form läßt sich, von Zahlenfaktoren abgesehen eindeutig, in das Produkt von zwei Linearfaktoren zerlegen, so daß wir zu einer Gleichung der Form 4 gelangen.

Die nächste Frage wird die sein, welcher besonderen Art die hier zu betrachtenden Kegelschnittnetze sind. Wir behaupten: „Einem Kegelschnittnetz entspricht dann und nur dann ein den eingangs aufgestellten Forderungen A, B, C, D genügendes System von Größen mit zwei Einheiten, wenn es mindestens einen Grundpunkt besitzt und die unendlich ferne Gerade nicht einem zerfallenden Kegelschnitt des Netzes angehört". Es sei gleich bemerkt, daß die zweite Bedingung die Netze nur metrisch aber nicht projektiv einschränkt.

Daß die erste Bedingung notwendig ist, wissen wir bereits, die zweite ist es ebenfalls, weil man durch lineare Kombination von 1, 2, 3 mittels von 0 verschiedener Koeffizienten nicht zu einer Gleichung der Form $(d_1\,\varepsilon_1 + d_2\,\varepsilon_2)\,\varepsilon_3 = 0$ gelangen kann, in der ε_3 die homogeneisierende Veränderliche bedeutet. Es ist noch zu beweisen, daß die Bedingungen auch hinreichend sind. Sind $(a\,\varepsilon)_3^2 = 0$, $(b\,\varepsilon)_3^2 = 0$, $(c\,\varepsilon)_3^2 = 0$ die Gleichungen von irgend drei linear unabhängigen Kegelschnitten eines obigen Bedingungen unterworfenen Netzes, so ist infolge der zweiten

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{22} \\ b_{11}, b_{12}, b_{22} \\ c_{11}, c_{12}, c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Daraus folgt, daß durch jeden unendlich fernen Punkt $d_1\,\varepsilon_1 + d_2\,\varepsilon_2 \equiv (d\,\varepsilon)_2 = 0$ eine und nur eine Parabel des Netzes geht, da wir durch geeignete lineare Kombination der drei Kegelschnittgleichungen ihre in ε_1 und ε_2 quadratischen Glieder auf die Form $(d\,\varepsilon)_2^2$ bringen können. Dabei dehnen wir die Bezeichnung Parabel auf Paare paralleler Geraden und auf Doppelgeraden aus. Ebenso gibt es eine und nur eine Nicht Parabel, die durch das beliebig gewählte unendlich ferne Punktepaar $(d\,\varepsilon)_2\,(e\,\varepsilon)_2 \equiv (f\,\varepsilon)_2^2 = 0$ geht. Wählen wir jetzt einen Grundpunkt des Büschels, es ist ja mindestens einer vorhanden, als Ursprung, zwei beliebige Punkte der unendlich fernen Geraden als unendlich ferne Punkte der Koordinatenachsen, so haben die zwei Parabeln bezw. die Nicht-Parabel durch diese unendlich fernen Punkte Gleichungen der Form 1, 3 bezw. 2, womit die aufgestellten Bedingungen als hinreichend nachgewiesen sind.

Digitized by Google

Es ist möglich, eine Abbildung der Größenscharen anzugeben, die mit der der Produktbildungen in engem Zusammenhang steht. Wir ordnen der Schar $k(d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2) \equiv k\,\delta$ die Gerade $\delta = 0$ durch den Ursprung o zu. Um diese Abbildung umkehrbar eindeutig zu machen, ordnen wir noch der Schar $k \cdot 0$ „die unbestimmte Gerade durch o" $0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 = 0$ zu.

Es sei K^2 der der Produktbildung $\varkappa\lambda = \mu$ entsprechende Kegelschnitt. Er gehört dem durch $\varkappa\lambda = 0$ und $\mu\varepsilon_3 = 0$ bestimmten Kegelschnittbüschel an. Der Multiplikation der Größen $\varkappa$ und λ entspricht mithin folgende Konstruktion: Die Geraden $\varkappa = 0$ und $\lambda = 0$ schneiden die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten, durch die ein Kegelschnitt K^2 des dem Größensystem entsprechenden Netzes geht. Der Tangente von K^2 in o entspricht eine Größenschar, der das Produkt angehört.

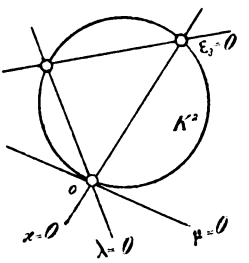


Fig. 1.

Ein besonderes Interesse werden die zerfallenden Kegelschnitte des Netzes beanspruchen; sie führen zu den besonderen Faktorenpaaren. Die Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte erfüllen die Hessesche Kurve H^3 des Netzes, die in jedem Grundpunkt einen Doppelpunkt hat.[15]) Ein im Endlichen liegender von o verschiedener Punkt h von H^3 ist Doppelpunkt für einen Kegelschnitt K^2, der entweder in die Verbindungsgerade von h mit o und eine von ihr verschiedene Gerade zerfällt oder aber aus der Doppelgeraden $[o\,h]$ besteht, falls diese H^3 angehört. Im ersten Fall hat K^2 eine Gleichung der Form $\varkappa(\lambda + l_3) = 0$, $l_3 \neq 0$, was zur Produktbildung $\varkappa\lambda = -l_3\varkappa$ führt. Die Größenschar, die der durch o gehenden Geraden $x = 0$ von K^2 entspricht, wird demnach durch Multiplikation mit den Größen jener Schar reproduziert, deren Bild $\lambda = 0$ durch o geht und zur zweiten Geraden $\lambda + l_3 = 0$ von K^2 parallel ist. In der Schar $k\lambda$ gibt es eine und nur eine Größe, nämlich $\lambda' = -\frac{\lambda}{l_3}$, die jede Größe aus $k \cdot \varkappa$ genau reproduziert. λ' ist die Relativeinheit der Größenschar $k\varkappa$. Da eine durch den Doppelpunkt o von H^3 gehende Gerade, falls sie keine Doppelpunktstangente ist und H^3 nicht zerfällt, H^3 in einem von o verschiedenen Punkte schneidet, folgt, daß eine Größe im allgemeinen eine Relativeinheit besitzt. Um zu erfahren, wie viel Relativeinheiten in einer gegebenen Größenschar auftreten, haben wir zu fragen, wie viele zu der ihr entsprechenden Geraden parallele Geraden zerfallenden Netzkegelschnitten angehören. Die durch den unendlich fernen Punkt u der Geraden gehenden Kegelschnitte des Netzes bilden ein Büschel, das drei zerfallende Kegelschnitte enthält.

[15]) Gundelfinger: Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte (Leipzig 1895), p. 384.

Digitized by Google

Es gehören mithin drei Gerade durch u zerfallenden Netzkegelschnitten an. Da die durch o gehende in Wegfall kommt, folgt, daß eine Größenschar im allgemeinen zwei Relativeinheiten enthält. — Besteht K^2 aus der Doppelgeraden $[o\,h]$, so hat seine Gleichung die Form $\varkappa^2 = 0$ und $k\,\varkappa$ ist eine Nullwurzelschar. — Ist h einer der drei unendlich fernen Punkte von H^3, so hat der zerfallende Netzkegelschnitt vom Doppelpunkt h, falls er nicht eine Doppelgerade ist, eine Gleichung der Form $\varkappa(\varkappa + k_3) = 0$, $k_3 \neq 0$, und führt zur Eigenwurzel $\varkappa' = -\frac{\varkappa}{k_3}$.

Falls H^3 nicht zerfällt, bilden die Doppelpunktstangenten D_1 und D_2 in o den einzigen zerfallenden Netzkegelschnitt mit dem Doppelpunkt o.[16]) Seine Gleichung $\varkappa\lambda = 0$ läßt erkennen, daß den Doppelpunktstangenten $\varkappa = 0$ und $\lambda = 0$ die Nullteilerscharen entsprechen. Wir haben im 1. Abschnitt gesehen, daß die Vielfachen der Größen einer Nullteilerschar, für die die dort mit 3 bezeichnete Determinante den Rang r hat, eine lineare Mannigfaltigkeit von ∞^{r-1} Größenscharen erfüllen. Da r im Falle $n = 2$ im allgemeinen gleich 1 ist, folgt, daß hier die Vielfachen der Größen einer Nullteilerschar wieder eine Größenschar erfüllen. Die Netzkegelschnitte durch den unendlich fernen Punkt einer Doppelpunktstangente von H^3 werden sich folglich im Doppelpunkt berühren. Greifen wir nun auf einer Doppelpunktstangente einen beliebigen Punkt p heraus, so können die durch ihn gehenden Netzkegelschnitte nicht sämtlich zerfallen, ohne daß H^3 zerfiele,[17]) wir können mithin durch ihn Geraden legen, die nicht einem zerfallenden Netzkegelschnitt angehören. Wählen wir eine von diesen Geraden als unendlich ferne, so entspricht dem Netz auch im neuen Koordinatensystem ein Größensystem und es folgt wieder, daß die durch p gehenden Netzkegelschnitte sich in o berühren. Ferner muß der vierte Schnittpunkt von zwei Netzkegelschnitten, die sich in p schneiden und folglich in o berühren, auf der nicht durch p gehenden Doppelpunktstangente liegen, da D_1 und D_2 einen zerfallenden Kegelschnitt ihres Büschels bilden. Hiedurch sind die Geraden D_1 und D_2 projektiv aufeinander und aufs Büschel der Geraden durch o bezogen. Dabei entsprechen die beiden unendlich fernen Punkte von D_1 und D_2 einander nicht, da das Geradenpaar D_1, D_2 der einzige durch sie gehende Netzkegelschnitt ist. Rückt p auf D_1 nach o, so gehen die Netzkegelschnitte durch p in sich in o oskulierende Kegelschnitte mit der gemeinsamen Tangente D_1 über, so daß dem Punkte o auf D_1 bezw. D_2 die Gerade D_1 bezw. D_2 des Tangentenbüschels entspricht. Nehmen wir umgekehrt zwischen den Punkten zweier

[16]) Gundelfinger, l. c.

[17]) Das Büschel durch p bestünde, falls alle ihm angehörigen Kegelschnitte zerfielen, entweder aus den Paaren einer Involution im Strahlenbüschel und enthielte dann Doppelgeraden oder es bestünde aus einer festen Geraden g, gepaart mit allen Geraden durch einen festen Punkt. Die Schnittpunkte von g mit einem dem Büschel nicht angehörigen Netzkegelschnitt wären dann zwei Doppelpunkte von H^3.

Digitized by Google

sich in o schneidender Geraden D_1 und D_2 und dem Strahlenbüschel vom Scheitel o eine Projektivität an, in der dem Punkte o von D_1 bezw. D_2 die Gerade D_1 bezw. D_2 entspricht und die unendlich fernen Punkte von D_1 und D_2 einander nicht entsprechen, so erfüllen die Kegelschnitte, die durch ein Paar entsprechender Punkte auf D_1 und D_2 gehen und die entsprechende Gerade in o berühren, ein Netz mit dem Grundpunkt o, dem die unendlich ferne Gerade nicht als Teil eines zerfallenden Kegelschnittes angehört. Denn die beiden Parabeln, deren unendlich ferne Punkte auf D_1 und D_2 liegen und die durch die diesen Punkten entsprechenden Punkte auf D_2 bezw. D_1 gehen sowie die entsprechenden Geraden in o berühren, sind eindeutig bestimmt. Durch die beiden Parabeln und den in D_1 und D_2 zerfallenden Kegelschnitt ist aber ein Netz bestimmt, das die gegebene Projektivität zwischen D_1 bezw. D_2 und dem Strahlenbüschel vom Scheitel o, also auch die gegebene Projektivität zwischen D_1 und D_2 festlegt und folglich mit der Gesamtheit der oben definierten Kegelschnitte zusammenfällt. Genaueres über die möglichen Ausartungsfälle werden wir im nächsten Abschnitt bei der Aufstellung der Typen und reellen Gestalten mittels der Abbildung auf die besonderen Kegelschnittnetze erfahren.

Der Division $\varkappa\,\xi = \mu$ entspricht folgende Konstruktion: Wir haben den Netzkegelschnitt zu bestimmen, der durch den unendlich fernen Punkt der Geraden $\varkappa = 0$ geht und die Gerade $\mu = 0$ in o berührt. Der Verbindungsgeraden seines zweiten unendlich fernen Punktes mit o entspricht eine Größenschar, der der Quotient ξ angehört. Ist $\varkappa$ ein Nullteiler und λ ein mit $\varkappa$ gepaarter Nullteiler, so berührt nach der gebräuchlichen Ausdrucksweise der Kegelschnitt $\varkappa\,\lambda = 0$ in o die Gerade $\mu = 0$. Das Produkt $\varkappa\,\lambda$ ist aber nicht gleich μ, so daß die gebräuchliche Redeweise den hier geltenden Sätzen nicht angepaßt erscheint. Wohl aber ist die von uns oben eingeführte Redeweise ihnen angepaßt, da der Kegelschnitt $\varkappa\,\lambda = 0$ in o keine bestimmte Gerade, also die unbestimmte Gerade durch o berührt.

Die Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten im Zusammenhang mit speziellen Kegelschnittnetzen.

Als äquivalent wurden oben zwei Systeme bezeichnet, wenn ihre Einheiten und mithin ihre Multiplikationsregeln durch eine lineare homogene Substitution ineinander übergeführt werden konnten. Dieser Substitution entspricht in der Ebene eine affine Koordinatentransformation, die den Ursprung in Ruhe läßt. Der Aufgabe, alle möglichen Typen zu bestimmen, entspricht folglich die Aufgabe, alle möglichen Kegelschnittnetze mit mindestens einem Grundpunkt, denen die unendlich ferne Gerade nicht als Teil eines zerfallenden Kegelschnittes angehört und die nicht durch eine Affinität ineinander übergeführt werden können, anzugeben. Einem Netz kann dabei nur dann mehr als ein System entsprechen, wenn es mehr als einen Grundpunkt hat. Wollen wir auch die reellen

Digitized by Google

Gestalten unterscheiden, so haben wir uns auf reelle Kegelschnitte und reelle Affinitäten zu beschränken und einen Grundpunkt reell vorauszusetzen. Im folgenden sollen von diesem Gesichtspunkte aus noch einmal die Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten aufgestellt werden, und zwar soll mit den spezielleren begonnen und zu den allgemeineren aufgestiegen werden.

A. Zunächst wollen wir die Typen mit einer Haupteinheit ε_0 aufstellen. Sie sind in jenen enthalten, deren Multiplikation assoziativ ist. ε_0 wählen wir als eine Einheit, die zweite ε_1 beliebig. Das Bestehen der Gleichung $\alpha\,\varepsilon_0 = \alpha$ für jedes α bedeutet, daß die Gerade $\varepsilon_0 = 1$ mit jeder Geraden durch o einen zerfallenden Netzkegelschnitt bildet. Der dritten Multiplikationsregel $\varepsilon_1^2 = a_0\,\varepsilon_0 + a_1\,\varepsilon_1$ entspricht eine Parabel, die $\varepsilon_0 = 1$ in zwei entweder getrennten oder zusammenfallenden Punkten p, q schneidet.

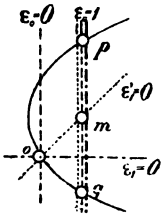


Fig. 2.

a) Im ersten Fall wählen wir die Verbindungsgerade $\varepsilon_1' = 0$ von o mit dem Mittelpunkt m der Strecke $\overline{pq}$ statt $\varepsilon_1 = 0$ als Koordinatenachse. Durch eine Affinität können wir p zum Einheitspunkt machen. Die Parabel durch den unendlich fernen Punkt von $\varepsilon_1' = 0$ muß durch p und q gehen, da durch diese zwei Punkte die den drei ersten Multiplikationsregeln: $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_0\,\varepsilon_1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1^2 = a_0\,\varepsilon_0 + a_1\,\varepsilon_1$ entsprechenden und mithin alle Kegelschnitte des Netzes gehen, und ist folglich bezüglich $\varepsilon_1' = 0$ symmetrisch. Ihre Gleichung lautet: $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_0$, so daß wir zum Repräsentanten gelangen:

I. T. 3. R. c. $\quad \varepsilon_0^2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0\,\varepsilon_1' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1'^2 = \varepsilon_0.$

Beschränken wir uns auf reelle Kegelschnitte, so sind o und m reell. Sind p und q reell getrennt, so sind obige Affinitäten ebenfalls reell. Sind dagegen p und q konjugiert komplex, so können wir nicht mehr p durch eine reelle Affinität die Koordinaten $(1, 1)$, wohl aber die Koordinaten $(1, i)$ erteilen, so daß die zweite Parabel die Gleichung $\varepsilon_1'^2 = -\varepsilon_0$ hat.

I. T. c. $\begin{cases} 1. \\ 2. \end{cases}$ **r. G.** $\quad \varepsilon_0^2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0\,\varepsilon_1' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1'^2 = \pm\,\varepsilon_0.$

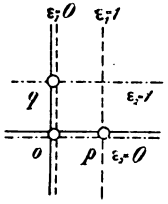


Fig. 3.

Der einzige zerfallende Kegelschnitt mit dem Doppelpunkte o ist das Geradenpaar $[op]$, $[oq]$. Dementsprechend sind für den 3. R. des I. T. c. $k(\varepsilon_0 \pm \varepsilon_1)$ die Nullteilerscharen. Nun wählen wir $[op]$ und $[oq]$ als Koordinatenachsen $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_1 = 0$. Der aus $[op]$ und der Parallelen zu ihr durch q bestehende Kegelschnitt gehört dem Netz an, da er durch seine drei Grundpunkte geht und

Digitized by Google

hat die Gleichung $\varepsilon_2(\varepsilon_2 - 1) = 0$, wenn wir p und q die Koordinaten $(1, 0)$ und $(0, 1)$ erteilen. Wir kommen so zum

I. T. 1. R. c. $\quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2.$

Die Haupteinheit $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ gehört hier jener Schar $k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ an, die der Parallelen zu $[pq]$ durch o entspricht. Die Vielfachen der Nullteilerscharen fallen mit ihnen selbst zusammen.

Fallen p und q in m zusammen, so besteht das Netz aus allen Kegelschnitten, die durch o gehen und $\varepsilon_0 = 1$ in m berühren. Wählen wir wieder $[om]$ als zweite Koordinatenachse $\varepsilon_1' = 0$, so ist die Doppelgerade $[om]$ die Parabel mit dem unendlich fernen Punkte $\varepsilon_1' = 0$ und die Multiplikationsregeln lauten:

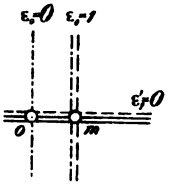


Fig. 4.

V. T. a (r. G.) $\quad \varepsilon_0^2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \varepsilon_1' = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1'^2 = 0.$ [18])

Ist das Netz reell, d. h. ist es durch drei linear unabhängige reelle Kegelschnitte bestimmt, so sind auch o und m reell und obiger Repräsentant stellt zugleich die im V. T. a enthaltene reelle Gestalt dar.

Wir gelangten oben zu den bekannten zwei Typen von Systemen komplexer Zahlen mit zwei Einheiten. Sie entsprechen Netzen mit drei Grundpunkten. Wir fragen jetzt nach den Systemen von Größen, die außer ihnen Netzen mit drei Grundpunkten entsprechen. Da haben wir zunächst in dem zuletzt betrachteten Netz den Ursprung in den Punkt m zu legen, so daß es aus allen $\varepsilon_1 = 0$ in o berührenden und durch den auf $\varepsilon_2 = 0$ liegenden Punkt p gehenden Kegelschnitten besteht. Greifen wir wieder die zwei Parabeln und die Nicht-Parabel mit den unendlich fernen Punkten $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ heraus, so bekommen wir die Multiplikationsregeln:

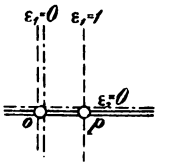


Fig. 5.

VII. T. (r. G.) $\quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = 0.$

Dieser Typus ist wohl assoziativ, besitzt aber keine Haupteinheit. Die Gerade $\varepsilon_2 = 0$ bildet mit jeder Geraden durch o einen zerfallenden Netzkegelschnitt. Ihr entspricht die Hauptnullteilerschar $k\varepsilon_2$.

Fallen die drei Grundpunkte in eine Gerade, ohne sich zu vereinigen, so besteht das Netz aus allen Geradenpaaren, die aus

[18]) Hier ergibt sich die Notwendigkeit einer Teilung der V. Typenklasse, die bei der rein arithmetischen Betrachtung überflüssig war.

Digitized by Google

jener Geraden und einer beliebigen gebildet werden können. Da einer dieser Kegelschnitte die unendlich ferne Gerade enthält, entspricht diesem Netz kein System.

Fallen alle drei Grundpunkte zusammen, so besteht das Netz aus sich in o oskulierenden Kegelschnitten. Haben sie in o eine
c) gemeinsame Tangente, so wählen wir diese als eine Koordinatenachse $\varepsilon_1 = 0$, die zweite beliebig, $\varepsilon_2 = 0$ und nehmen den Einheitspunkt auf der Netzparabel durch den unendlich fernen Punkt von $\varepsilon_2 = 0$ an. Es folgt:

IX. T. (r. G.) $\qquad \varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1.$

Auch dieser Typus ist assoziativ ohne eine Haupteinheit zu besitzen. $k\varepsilon_1$ ist eine Hauptnullteilerschar.

d) Haben die sich in o oskulierenden Kegelschnitte dort keine bestimmte gemeinsame Tangente, so besteht das Netz aus allen zerfallenden Kegelschnitten mit dem Doppelpunkt o:

XI. T. (r. G.) $\qquad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = 0.$

C. Wir gehen jetzt zu den Netzen mit zwei Grundpunkten o, p über. Ihre Hessesche Kurve H^3 zerfällt in die Gerade $[op] = H$ und einen Kegelschnitt H^2 durch o und p. Je zwei Kegelschnitte des Netzes schneiden sich außer in o und p in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade zusammen mit H einen zerfallenden Netzkegelschnitt bildet. Zwei verschiedene derartige Verbindungsgeraden, die den Kegelschnitten L^2 und M^2 angehören, schneiden sich in einem Punkte q der Eigenschaft, daß jede durch ihn gehende Gerade mit H einen Netzkegelschnitt bildet, da er dem durch L^2 und M^2 bestimmten Büschel angehört. Anderseits kann es keine nicht durch q gehende Geraden geben, die mit H einen Netzkegelschnitt bildet, da sonst alle Geraden der Ebene, darunter die unendlich ferne zerfallenden Netzkegelschnitten angehörten. q ist der Pol von H bez. H^2.[19]) Da ferner zwei zerfallende Kegelschnitte dann und nur dann ein aus lauter zerfallenden Kegelschnitten bestehendes Büschel bestimmen, wenn sie entweder den Doppelpunkt oder eine Gerade gemeinsam haben, so folgt, daß obiges Netz auch nichtausartende Kegelschnitte enthält. Durch o, p, einen durch sie gehenden nicht ausartenden Kegelschnitt K^2 und q ist obiges Netz bestimmt, und zwar besteht es aus allen Kegelschnitten, die man durch o, p und die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden durch q mit K^2 legen kann. Wir haben die verschiedenen Lagen, die o, p, q und K^2 zueinander einnehmen können, zu betrachten.

[19]) Diese Sätze sind projektive Verallgemeinerungen von Sätzen über Kreisnetze. q entspricht dem Potenzpunkte des Netzes, H^2 dem Orthogonalkreis, H der unendlich fernen Geraden. Vergleiche Gundelfinger, l. c. p. 386.

Digitized by Google

Zunächst nehmen wir an, daß o und p nicht zusammenfallen. Dann nehmen wir noch an, daß q nicht auf H liegt. H wählen wir als eine Koordinatenachse $\varepsilon_2 = 0$, die andere $\varepsilon_1 = 0$ legen wir durch einen unendlich fernen Punkt von H^2. Ferner können wir durch eine Affinität p und q die Koordinaten $(1,0)$ bezw. $(b_2, 1)$ erteilen. H bildet mit jeder Geraden durch q einen Netzkegelschnitt. Greifen wir die drei in Betracht kommenden heraus, so erhalten wir:

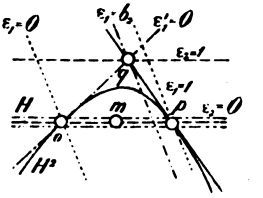


Fig. 6.

I. T. 1. R. b. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = b_2 \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2, \quad (b_2 \neq 0).$ [20])

Ist m der Mittelpunkt von $\overline{o\,p}$, so ist H^2 bezüglich $[m\,q]$ als Achse in der Richtung H zu sich selbst symmetrisch. Wählen wir jetzt statt $\varepsilon_1 = 0$ die Verbindungslinie von o mit dem zweiten unendlich fernen Punkt von H^2 als Koordinatenachse, so tritt mithin $b_2' = 1 - b_2$ an Stelle von b_2. Ist H^2 eine Parabel, so ist $b_2 = \frac{1}{2}$. Da H mit jeder Geraden durch q einen Netzkegelschnitt bildet, besitzt die Größenschar $k\varepsilon_2$ unendlich viele Relativeinheiten. Sie ist ferner eine Nullteilerschar mit der der Geraden $[o\,q]$ entsprechenden Größenschar $k(\varepsilon_1 - b_2\varepsilon_2)$ als gepaarter Nullteilerschar. Wählen wir statt $\varepsilon_1 = 0 \ldots [o\,q]$ als Koordinatenachse $\varepsilon_1' = 0$, so haben wir noch die Koeffizienten in der Gleichung $\varepsilon_1'^2 = d_1\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2$ der durch den unendlich fernen Punkt von $\varepsilon_1' = 0$ gehenden Netzparabel zu bestimmen. Da sie durch den Punkt $p(1,0)$ geht, ist $d_1 = 1$.

I. T. 2. R. b. $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1' + d_2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1'\varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2, \quad (d_2 \neq 0).$

Wählen wir endlich in einem reellen Netz mit reellen Grundpunkten o, p statt $\varepsilon_1 = 0$ die Parallele zu $[m\,q]$ als Koordinatenachse, so lauten die Multiplikationsregeln, wenn wir wieder beachten, daß die Netzparabel durch den unendlich fernen Punkt von $[q\,m]$ den Punkt $p(1,0)$ enthält:

I. T. b. r. G. 2. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2.$

Durch die reelle Affinität:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\mp c_2}\,.\,\varepsilon_2', \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1',$$

[20]) $b_2 = 0$ würde zum I. T. c. führen.

Digitized by Google

wobei wir das Vorzeichnen von c_2 so zu wählen haben, daß $\sqrt{\mp c_2}$ reell wird, und die Substitution: $s_1 = \frac{1}{\sqrt{\mp c_2}}$ bekommen wir:

I. T. b. $\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ r. G. 1. R. $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1'$, $\varepsilon_1'\varepsilon_2' = \frac{s_1}{2}\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2'^2 = \mp\varepsilon_1' + s_1\varepsilon_2'$, $(s_1 \neq 0)$.

β) Nunmehr nehmen wir an, daß q auf H liegt ohne mit m zusammenzufallen. Mit o oder p darf q nicht zusammenfallen, da sonst das Netz drei Grundpunkte hätte. Man sieht unmittelbar, daß H Doppelgerade des Netzes ist und daß alle übrigen zerfallenden Netzkegelschnitte ihren Doppelpunkt entweder in q oder auf der Polaren Q von q bezw. K^2 haben. H^3 zerfällt mithin in H und Q und die Parallelen zu Q durch o und p sind das einzige Parallelgeradenpaar des Netzes. Wir wählen H als Achse $\varepsilon_2 = 0$, die Parallele zu Q durch o als Achse $\varepsilon_1 = 0$ und erteilen p die Koordinaten $(1, 0)$. Hat dann q die Koordinaten $(b, 0)$, so lesen wir die Multiplikationsregeln ab:

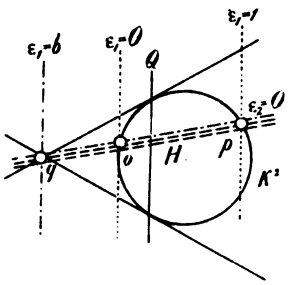


Fig. 7.

V. T. b. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = b\varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2 = 0$, $\left(b \neq 0, \frac{1}{2}, 1\right)$.

γ)

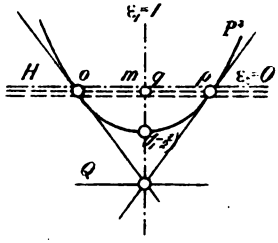


Fig. 8.

Die Größen der Nullteilerschar $k.\varepsilon_2$ besitzen wieder unendlich viele Relativeinheiten.

Ist das Netz reell mit reellem Grundpunkt o, so sind auch p, q, Q reell, so daß die zugehörige reelle Gestalt immer durch obigen Repräsentanten mit reellem b dargestellt werden kann.

Fällt q mit m zusammen, ohne daß seine Polare Q bez. K^2 die unendlich ferne Gerade ist, so ist $Q \parallel H$ und es existiert keine Eigenwurzel. Wir wählen H als Achse $\varepsilon_2 = 0$, die zweite $\varepsilon_1 = 0$ beliebig. Erteilen wir dann noch m die Koordinaten $(1, 0)$ und dem zweiten Schnittpunkt von $\varepsilon_1 = 1$ mit der Parabel P^2 durch ihren unendlich fernen Punkt die Koordinaten $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, so erhalten wir:

VIII. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2^2 = 0$.

Digitized by Google

Die Nullwurzelschar $k\varepsilon_2$ besitzt unendlich viele Relativeinheiten.

) Ist Q die unendlich ferne Gerade, so existieren unendlich viele Eigenwurzeln, und zwar enthält jede Schar mit Ausnahme der Nullwurzelschar, die der Geraden H entspricht, eine. Setzen wir $\overline{om} = \overline{mp} = \frac{1}{2}$, so können wir aus der Figur unmittelbar die Multiplikationsregeln ablesen:

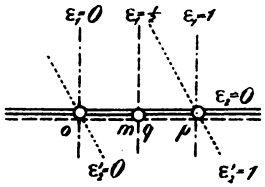


Fig. 9.

XII. T. 2. R. (r. G.)

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2^2 = 0.$$

Ist $\varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2'$ ein von $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ verschiedenes Parallelgeradenpaar des Netzes, so ist dieses durch $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2^2 = 0$, $\varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2'$ bestimmt. Wählen wir $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1' = 0$ und $\varepsilon_2' = 0$ als neue Koordinatenachsen und p als Einheitspunkt, so liegen Netz und Koordinatensystem in gleicher Weise symmetrisch bez. H, mithin auch der Netzkegelschnitt durch die unendlich fernen Punkte von $\varepsilon_1' = 0$ und $\varepsilon_2' = 0$. Wir bekommen:

XII. T. 1. R. (r. G.) $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'}{2}, \quad \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2'.$

Da ferner, falls das Netz und o reell sind, auch H und Eigenwurzeln reell sind, sind obige zwei Repräsentanten auch solche der einzigen reellen Gestalt, die im XII. T. enthalten ist.

b) Fallen o und p zusammen, so berühren alle Netzkegelschnitte in o eine feste Gerade $\varepsilon_2 = 0$. Wir greifen eine beliebig nicht zer-
a) fallenden K^2 heraus und nehmen an, daß q nicht auf $\varepsilon_2 = 0$ liegt. Da q nicht auf K^2 liegen darf, weil sonst das Netz drei Grundpunkte hätte, so gehen durch q zwei verschiedene Tangenten an K^2, deren Berührungspunkte r und s zwei Verbindungsgeraden mit o liefern, die dem Netz als Doppelgeraden angehören. Die Hessesche Kurve zerfällt demnach in $\varepsilon_2 = 0$, $[o\,r]$ und $[o\,s]$. Wählen

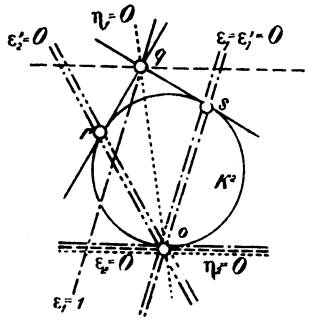


Fig. 10.

Digitized by Google

wir eine von letzteren als Achse $\varepsilon_1 = 0$ und q als Einheitspunkt, so erhalten wir:

VI. T. 1. R. $\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2.$

q ist in Fig. 10 von $\varepsilon_2 = 0$ durch $[o\,r]$ und $[o\,s]$ harmonisch getrennt. Wählen wir letztere Geraden als Koordinatenachsen $\varepsilon_2' = 0$ und $\varepsilon_1' = 0$ und q als Einheitspunkt, so hat die Nicht-Parabel durch die unendlich fernen Punkte der neuen Achsen aus Symmetriegründen eine Gleichung der Form: $\varepsilon_1' . \varepsilon_2' = t(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$. Da wir sie an Stelle von K^2 zur Bestimmung des Netzes heranziehen können, folgt, daß die Tangenten an sie durch q ihre Asymptoten und q ihr Mittelpunkt ist. Sie geht mithin durch den Punkt (2, 2) und es ist $t = 1$:

VI. T. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = 0, \quad \varepsilon_1' . \varepsilon_2' = \varepsilon_1' + \varepsilon_2', \quad \varepsilon_2'^2 = 0.$

Ist das Netz reell, so sind auch o und q reell. Wählen wir die Tangente der sich in o berührenden Netzkegelschnitte und $[o\,q]$ als Koordinatenachsen $\eta_2 = 0$ bezw. $\eta_1 = 0$, so hat die Netzparabel durch den unendlich fernen Punkt der letzteren die Gleichung $\eta_1^2 = a_2\,\eta_2$. Erteilen wir noch ihren Schnittpunkten mit $\eta_2 = 1$ jenachdem ob sie konjugiert komplex oder reell sind die Koordinaten $(\pm i, 1)$ bezw. $(\pm 1, 1)$, so bekommen wir:

VI. T. $\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ **r. G.** $\eta_1^2 = \mp\,\eta_2, \quad \eta_1\,\eta_2 = 0, \quad \eta_2^2 = \eta_2.$

Im ersten Falle sind die Tangenten durch q an die Parabel und folglich die Doppelgeraden und Nullwurzelscharen reell, im zweiten konjugiert komplex.

Legen wir durch q irgend eine Gerade, so schneidet sie K^2 in zwei Punkten, deren Verbindungsgeraden mit o einen zerfallenden Netzkegelschnitt bilden. Folglich ist jede Größe ein Nullteiler.

β)

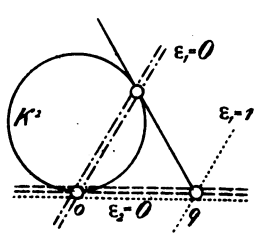


Fig. 11.

Liegt q auf der gemeinsamen Tangente $\varepsilon_2 = 0$ der Netzkegelschnitte in o, ohne mit o zusammenzufallen, so fällt eine der Doppelgeraden mit $\varepsilon_2 = 0$ zusammen. Die andere wählen wir als Achse $\varepsilon_1 = 0$. Dann folgt, indem wir q die Koordinaten (1, 0) erteilen:

X. T. (r. G.) $\varepsilon_1^2 = 0, \quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = 0.$

Digitized by Google

Hier ist wieder jede Größe ein Nullteiler. Ist das Netz reell, so sind auch o, q und $\varepsilon_1 = 0$ reell, so daß obiger Repräsentant die einzige im Typus enthaltene reelle Gestalt vertritt.

Endlich betrachten wir den Fall, daß nur ein Grundpunkt vorhanden ist. Hier sind die Unterfälle zu unterscheiden, daß die Hessesche Kurve H^3 mindestens zwei getrennte oder drei zusammenfallende unendlich ferne Punkte besitzt.

Im ersten Falle greifen wir aus den drei unendlich fernen Punkten von H^3 zwei getrennte heraus. Sie sind Doppelpunkte zweier ausartender Netzkegelschnitte, die, wenn wir noch annehmen, daß das Netz keine Doppelgeraden enthält, jeder in ein Paar getrennter paralleler Geraden zerfallen. Von diesen vier Geraden wählen wir die durch den Grundpunkt o gehenden als Koordinatenachsen, den Schnittpunkt der beiden anderen als Einheitspunkt. Durch die beiden unendlich fernen Punkte der Achsen $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ geht eine und nur eine Nicht-Parabel des Netzes und wenn wir umgekehrt die Gleichung der letzteren in der Form $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2$ annehmen, so ist durch sie und die Parabeln $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ und $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2$ ein Netz und ein Größensystem bestimmt. Da außerdem das Koordinatensystem vollkommen festgelegt ist, sind die Parameter b_1 und b_2 wesentlich. Die einzige Willkür war die Auswahl zweier aus den drei unendlich fernen Punkten von H^3. Hätten wir eine andere Auswahl getroffen, so wären wir zu gleichartigen Multiplikationsregeln mit anderen Parameterwerten b_1' und b_2' gelangt. Um den Zusammenhang dieser Parameterwerte mit den ursprünglichen zu finden, haben wir zunächst das dritte Parallelgeradenpaar des Netzes, etwa mit Hilfe des Ansatzes:

$$r(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1) + s(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_2) + t(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - b_1 \varepsilon_1 - b_2 \varepsilon_2) \equiv$$

$$\equiv (p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2)(p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 + p_3)$$

zu berechnen. Wir erhalten:

$$p_1 = \frac{p_3(1 - 2b_1)}{4b_1 b_2 - 1}, \quad p_2 = \frac{p_3(1 - 2b_2)}{4b_1 b_2 - 1}.$$

Dabei muß $4b_1 b_2 \neq 1$ sein, weil sonst wie wir sehen werden, im Netze auch eine Doppelgerade aufträte. Wählen wir $p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2$ als neue Koordinatenachse unter Beibehaltung einer der alten, so gelangen wir zu neuen Parametern, die mit den alten durch eine Substitution der von

$$S: \quad b_1' = b_2, \quad b_2' = b_1$$

Digitized by Google

und

$$T\colon\quad b_1' = b_1,\quad b_2' = \frac{1 - b_1 - b_2}{1 - 4\,b_1\,b_2}$$

erzeugten Gruppe: $1, S, T, ST, TS, STS = TST$ zusammenhängen.[21])

Wir kamen zum Repräsentanten:

I. T. a. 1. R. $\quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1,\quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2 = b_1\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2,\quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_2,$

wobei wir aber außer $4\,b_1\,b_2 = 1$ noch die Fälle: $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 1$ ausschließen müssen, von welchen die beiden ersten unmittelbar, der letzte vermöge der Substitution STS zum 1. R. des I. T. b bezw. c führen.

In einem reellen Netz sind die drei unendlich fernen Punkte von H^3 entweder sämtlich reell oder es sind zwei konjugiert komplex, der dritte reell. Zu einem reellen der drei Punkte suchen wir den durch die beiden anderen harmonisch getrennten und wählen die Verbindungsgeraden dieser beiden reellen Punkte mit dem als reell angenommenen Grundpunkt als Koordinatenachsen $\varepsilon_1' = 0$, $\varepsilon_2' = 0$. Die beiden nicht in $k\,\varepsilon_1'$ enthaltenen Eigenwurzeln η_1 und η_2 sind dann, falls alle drei unendlich fernen Punkte von H^3 reell sind, in den Größenscharen $k\,(\varepsilon_1' \pm \varepsilon_2')$, falls nur einer von ihnen reell ist, in den Scharen $(k_1 \pm i\,k_2)\,(\varepsilon_1' + (r_1 \pm i\,r_2)\,\varepsilon_2')$ enthalten. Aus $\eta_1^2 = \eta_1$ und $\eta_2^2 = \eta_2$ folgt dann wie im zweiten Abschnitt:

I. T. a. $\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ r. G. $\quad \varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1',\quad \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \dfrac{s_1\varepsilon_1' + s_2\varepsilon_2'}{2},\quad \varepsilon_2'^2 = \pm(s_2 - 1)\varepsilon_1' + s_1\varepsilon_2'.$

Die beiden Nullteilerscharen können wir berechnen, indem wir die Doppelpunktstangenten von H^3 bestimmen und finden: $\varepsilon_{1,2}'' = k\,[(1 \pm \sqrt{1 - 4\,b_1\,b_2})\,\varepsilon_1 - 2\,b_2\,\varepsilon_2]$[22]). Wählen wir jetzt einen der von o verschiedenen Schnittpunkte der beiden Netzparabeln durch die unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen $\varepsilon_1'' = 0$ und $\varepsilon_2'' = 0$ als Einheitspunkt, so bekommen wir:

I. T. a. 3. R. $\quad \varepsilon_1''^2 = (1 - a)\,\varepsilon_1'' + a\,\varepsilon_2'',\quad \varepsilon_1''\,.\,\varepsilon_2'' = 0,$

$$\varepsilon_2''^2 = b\,\varepsilon_1'' + (1 - b)\,\varepsilon_2'',\quad (a \neq 0,\ b \neq 0).$$

[21]) Vgl. Fußnote [12]).

[22]) Wir sehen, daß in dem ausgeschlossenen Falle $4\,b_1\,b_2 = 1$ Nullwurzelscharen, d. h. im Netz Doppelgeraden vorhanden sind.

Digitized by Google

$a = 0$ oder $b = 0$ würde zum I. T. b oder c führen. Die Geraden $(1-a)\,\varepsilon_1'' + a\,\varepsilon_2'' = 0$ und $b\,\varepsilon_1'' + (1-b)\,\varepsilon_2'' = 0$ werden, wie aus den Uberlegungen des vorigen Abschnittes folgt, von allen Netzkegelschnitten durch den unendlich fernen Punkt von $\varepsilon_1'' = 0$ bezw. $\varepsilon_2'' = 0$ berührt und wir gelangen hier zu der allgemeinen dort besprochenen Erzeugungsweise der Netze mit einem Grundpunkt.

3) Enthält das Netz eine Doppelgerade,[23]) so wählen wir sie als eine Koordinatenachse $\varepsilon_2 = 0$ und legen die andere $\varepsilon_1 = 0$ durch einen nicht auf $\varepsilon_2 = 0$ liegenden unendlich fernen Punkt von H^3, der dann der Doppelpunkt eines dem Netz angehörigen Parallelgeradenpaares ist. Der Netzkegelschnitt durch die unendlich fernen Punkte von $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ besitzt in o eine von $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ verschiedene Tangente, weil sonst $\varepsilon_1 = 0$ bezw. $\varepsilon_2 = 0$ dem Kegelschnitte angehörte und das Netz zwei in o zusammenfallende oder auf $\varepsilon_2 = 0$ einen von o verschiedenen Grundpunkt besäße. Den Schnittpunkt der von dieser Tangente durch die Achsen harmonisch getrennten Geraden mit der nicht durch o gehenden Geraden des oben erwähnten Parallelgeradenpaares wählen wir als Einheitspunkt. Dann hat die Tangente die Gleichung $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ und die Multiplikationsregeln lauten:

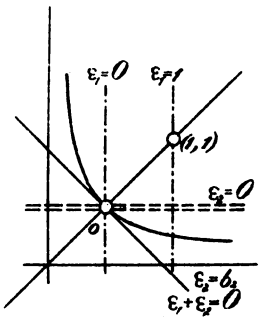


Fig. 12.

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1,\ \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = b_2\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2),\ \varepsilon_2^2 = 0,\ (b_2 \neq 0).$$

Die Netzkegelschnitte durch den unendlich fernen Punkt von $\varepsilon_2 = 0$ besitzen dort die gemeinsame Tangente $\varepsilon_2 = b_2$ und in o die gemeinsame Tangente $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$. Das Netz setzt sich überhaupt aus ∞^1 Büschelreihen mit der gemeinsamen Doppelgeraden $\varepsilon_2 = 0$ zusammen. Der Ort der Pole von $\varepsilon_2 = 0$ bezw. der Netzkegelschnitte ist der Kegelschnitt H^2:

$$2\,b_2\,\varepsilon_1^2 + (2\,b_2 - 1)\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 - b_2\,\varepsilon_2 = 0,$$

in den und $\varepsilon_2 = 0$ die Hessesche Kurve zerfällt. Durchläuft ein Punkt $\varepsilon_2 = 0$, so beschreibt die Tangente in o der durch ihn bestimmten Büschelreihe ein projektives Strahlenbüschel, und zwar entsprechen dem unendlich fernen Punkte, den Punkten o und $\varepsilon_1 = 1$ die Geraden $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ und $\varepsilon_1 = 0$. Umgekehrt ist ein Netz obiger Art bestimmt sowie zwei von o verschiedene Punkte von $\varepsilon_2 = 0$ samt ihren Tangenten und den ihnen entsprechenden Geraden durch o gegeben sind. Denn hiedurch ist ein Netz mit dem Grundpunkt o hestimmt, das sich aus lauter Büschelreihen mit

[23]) Wären zwei verschiedene Doppelgeraden vorhanden, so besäße das Netz zwei in o zusammenfallende Grundpunkte.

Digitized by Google

der gemeinsamen Doppelgeraden $\varepsilon_2 = 0$ zusammensetzt. Seine Hessesche Kurve besitzt Punkte auch außerhalb von $\varepsilon_2 = 0$. Legen wir durch einen von ihnen eine Gerade, die wir als die unendlich ferne bezeichnen, so ist in dem entsprechenden Größensystem mindestens eine Eigenwurzel ε_1 vorhanden und wir kommen zu den oben angegebenen Multiplikationsregeln zurück.[24])

Wir haben jetzt die Fälle zu unterscheiden, daß eine oder keine von $\varepsilon_1 = 0$ verschiedene Eigenwurzel vorhanden ist. Die drei Schnittpunkte der Hesseschen Kurve mit der unendlich fernen Geraden sind bestimmt durch:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 [2 b_2 \varepsilon_1 + (2 b_2 - 1) \varepsilon_2] = 0,$$

β_1) so daß im ersten Fall der Repräsentant lautet:

III. T. 2. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \ \varepsilon_1 \varepsilon_2 = b_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \ \varepsilon_2^2 = 0, \ \left(b_2 \neq 0, \frac{1}{2}\right).$

Wählen wir nun statt $\varepsilon_2 = 0$ die Gerade $\varepsilon_2' \equiv 2 b_2 \varepsilon_1 + (2 b_2 - 1) \varepsilon_2 = 0$ als zweite Koordinatenachse, so kommen wir auf den vom I. T. a ausgeschlossenen Fall $4 b_1 b_2 = 1$ zurück,[25]) was man auch leicht durch direkte Umrechnung bestätigt:

III. T. 1. R. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \ \varepsilon_1 \varepsilon_2' = \frac{\varepsilon_1}{4 b_2} + b_2 \varepsilon_2', \ \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_2', \ \left(b_2 \neq 0, \frac{1}{2}\right).$

In einem reellen Netz sind der einzige vorhandene Grundpunkt o und die Doppelgerade $\varepsilon_2 = 0$ reell. Die zwei nicht auf ihr liegenden unendlich fernen Punkte der Hesseschen Kurve sind entweder reell oder konjugiert komplex. Durch den durch sie von der Doppelgeraden harmonisch getrennten Punkt legen wir die neue Koordinatenachse $\varepsilon_1' = 0$. Dann kommen wir durch dieselben Überlegungen wie im zweiten Abschnitt zu den Repräsentanten:

III. T. $\left.\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}\right\}$ **r. G.** $\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1' \pm t \varepsilon_2, \ \varepsilon_1' \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_2}{2}, \ \varepsilon_2^2 = 0, \ (t > 0).$

β_2) Ist keine von ε_1 verschiedene Eigenwurzel vorhanden, so muß $b_2 = \frac{1}{2}$ sein:

IV. T. r. G. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \ \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \ \varepsilon_2^2 = 0.$

---

[24]) H^2 berührt $\varepsilon_2 = 0$, so daß die zerfallende Hessesche Kurve zwei in o zusammenfallende Doppelpunkte hat, während o fürs Netz ein einfacher Grundpunkt ist.

[25]) Vgl. Fußnote [21]).

Digitized by Google

b) Endlich nehmen wir an, daß für die Hessesche Kurve H^3 des Netzes die unendlich ferne Gerade eine Wendetangente ist. Das Netz enthält dann entweder ein Parallelgeradenpaar oder eine Doppelgerade mit dem unendlich fernen Punkt u. Durch ihn legen wir die Koordinatenachse $\varepsilon_1 = 0$. u ist in drei zerfallenden Kegelschnitten des Netzes enthalten. Zwei von ihnen schneiden die unendlich ferne Gerade noch in je einem von u verschiedenen Punkt. Durch einen der letzteren legen wir die Achse $\varepsilon_2 = 0$. Keiner der letzten zwei Kegelschnitte kann $\varepsilon_1 = 0$ enthalten, weil sonst die beiden Schnittpunkte von $\varepsilon_1 = 0$ mit irgend einem dritten Netzkegelschnitt zwei Grundpunkte wären. Die Multiplikationsregeln des entsprechenden Größensystems haben folglich die Form:

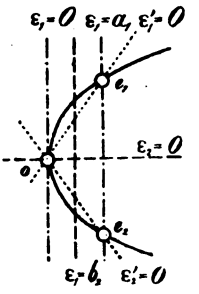


Fig. 13.

$$\varepsilon_1^2 = a_1\,\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 . \varepsilon_2 = b_2\,\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = c_1\,\varepsilon_1 + c_2\,\varepsilon_2.$$

Wir haben jetzt die Bedingung dafür aufzustellen, daß H^3 die unendlich ferne Gerade in drei in $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ zusammenfallenden Punkten schneidet. Wir setzen in der Cayleyschen Determinante $\varepsilon_3 = 0$, entwickeln sie und setzen dann alle Koeffizienten mit Ausnahme jenes von $\varepsilon_1^3 = 0$. Da bekommen wir die Bedingungen $a_1 = 2\,b_2$, $c_2 = 0$. Wäre $a_1 = 0$, so kämen wir auf den IX. T. zurück, so daß wir $a_1 \neq 0$ anzunehmen und das Auftreten einer Doppelgeraden auszuschließen haben. Wählen wir einen Schnittpunkt e_1 von $\varepsilon_1 = a_1$ mit der Parabel $\varepsilon_2^2 = c_1\,\varepsilon_1$ als Einheitspunkt, so gelangen wir zum Repräsentanten:

II. T. 1. R. $\qquad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1.$

Ist das Netz reell und sind die Schnittpunkte von $\varepsilon_1 = a_1$ mit der Parabel reell, so erreichen wir den 1. R. durch eine reelle Affinität. Sind die Schnittpunkte konjugiert komplex, so können wir ihnen mittels einer reellen Affinität die Koordinaten $(1, \pm i)$ erteilen.

II. T. $\left.\begin{matrix}1.\\2.\end{matrix}\right\}$ **r. G.** $\qquad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_2^2 = \pm\,\varepsilon_1.$

Die Verbindungsgeraden $\varepsilon_1' = 0$ und $\varepsilon_2' = 0$ von o mit obigen zwei Schnittpunkten bilden einen zerfallenden, dem Netz angehörigen Kegelschnitt. Ihnen entsprechen die Nullteilerscharen. Diese sind für die 1. r. G. reell, für die 2. r. G. konjugiert komplex. Wählen wir $\varepsilon_1' = 0$ und $\varepsilon_2' = 0$ als Koordinatenachsen, stellen wir die Bedingungen dafür auf, daß die drei unendlich fernen Punkte von H^3

Digitized by Google

zusammenfallen und wählen wir den Einheitspunkt passend auf $\varepsilon_2 = 0$, so erhalten wir den Repräsentanten:

II. T. 2. R. $\varepsilon_1'^2 = 3\varepsilon_1' + \varepsilon_2', \quad \varepsilon_1'\varepsilon_2' = 0, \quad \varepsilon_2'^2 = \varepsilon_1' + 3\varepsilon_2'.$

Das hier betrachtete Netz ist ebenso erzeugbar, wie das metrisch allgemeinere zum I. T. a gehörige.

Beziehungen der Systeme mit drei Einheiten zur Geometrie.

Die Theorie der komplexen Größen mit drei Einheiten und einer Haupteinheit hängt mit jener der allgemeinen Kegelschnittnetze zusammen. Wählen wir die Haupteinheit ε_0 als eine Einheit des Systems, so haben die Multiplikationsregeln die Form:

$$\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0\,\varepsilon_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_0 . \varepsilon_2 = \varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_1^2 = a_0\varepsilon_0 + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = b_0\varepsilon_0 + b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2^2 = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2.$$

Fassen wir wieder ε_1 und ε_2 als Parallelkoordinaten in der Ebene auf, so können wir die drei letzten Gleichungen als die dreier linear unabhängiger Kegelschnitte der Ebene auffassen. Jeder Produktbildung entspricht dann ein Kegelschnitt des durch jene drei bestimmten Netzes. Umgekehrt entsprechen jedem Kegelschnitt dieses Netzes unendlich viele Produktbildungen, deren Faktoren sich aber nicht nur durch Zahlen, die als Faktoren hinzutreten, unterscheiden, sondern auch durch Zahlen, die additiv zu ihnen treten. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß einem Netz ein Größensystem entspricht, besteht hier darin, daß die unendlich ferne Gerade nicht einem zerfallenden Netzkegelschnitt angehört. Der Produktbildung entspricht folgende Konstruktion: die beiden Faktoren gehören zwei Größenscharen an, denen zwei Geraden G und H entsprechen. Sie schneiden die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten, durch die ein Netzkegelschnitt geht. Der Verbindungsgeraden seiner weiteren Schnittpunkte mit G und H entspricht eine Größenschar, der das Produkt angehört.

Im Falle dreier Einheiten ohne Haupteinheit entspricht wohl jeder Produktbildung eine Fläche einer linearen Mannigfaltigkeit sechster Stufe von Flächen zweiter Ordnung, aber es entspricht nicht mehr jeder Fläche dieser Mannigfaltigkeit eine Produktbildung. Denn man kann einerseits aus den linken Seiten der Multiplikationsregeln wohl jede ternäre quadratische Form zusammensetzen, es ist aber nicht jede derartige Form ins Produkt zweier ternärer linearen Formen zerlegbar. Es entsprechen also den Produktbildungen lediglich die Paraboloide der Mannigfaltigkeit. Den Sätzen über Multiplikationen im Größensystem mit drei Einheiten ohne Haupteinheit werden demnach Sätze über die in einer linearen Mannigfaltigkeit sechster Stufe von Flächen zweiter Ordnung auftretenden Paraboloide entsprechen.

Digitized by Google

Tafel der Repräsentanten der Typen und reellen Gestalten mit zwei Einheiten.

I. T.

1. R. $\begin{cases} \varepsilon_1 & , \; b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 \\ b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, & \varepsilon_2 \end{cases}$, wobei $\Delta \equiv 1 - 4b_1b_2 \neq 0$.

1. u. 2. r. G. 1. R. $\begin{cases} \varepsilon_1 & , \; \dfrac{s_1\varepsilon_1 + s_2\varepsilon_2}{2} \\ \dfrac{s_1\varepsilon_1 + s_2\varepsilon_2}{2}, & \pm(s_2-1)\varepsilon_1 + s_1\varepsilon_2. \end{cases}$

a)

1. R. wie oben, wobei noch $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 + b_2 \neq 1$.

1. u. 2. r. G. 1. R. wie oben, wobei $s_2 \neq 0$ und nicht zugleich $s_2 = 2$ und $s_1 = 0$.

2. R. $\begin{cases} a\varepsilon_1 + \varepsilon_2, & 0 \\ 0 & , \; \varepsilon_1 + c\varepsilon_2. \end{cases}$

3. R. $\begin{cases} a'\varepsilon_1 + (1-a')\varepsilon_2, & 0 \\ 0 & , \; (1-c')\varepsilon_1 + c'\varepsilon_2, \end{cases}$ wobei $a' \neq 1$ und $c' \neq 1$.

b)

1. R. wie oben, wobei entweder $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$ oder $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ oder $b_1 + b_2 = 1$.

1. u. 2. r. G. wie oben, wobei $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$.

2. R. $\begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \\ 0, & d\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \end{cases}$ wobei $d \neq 0$. r. G. 2. R. $\begin{cases} \varepsilon_1, & \dfrac{\varepsilon_1}{2} \\ \dfrac{\varepsilon_1}{2}, & c_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases}$

c)

1. R. wie oben, wobei $b_1 = b_2 = 0$.

1. u. 2. r. G. 1. R. wie oben, wobei $s_1 = 0$ und $s_2 = 2$.

II. T.

1. R. $\begin{cases} \varepsilon_1, & \dfrac{\varepsilon_2}{2} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{2}, & \varepsilon_1 \end{cases}$ 1. u. 2. r. G. $\begin{cases} \varepsilon_1, & \dfrac{\varepsilon_2}{2} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{2}, & \pm\varepsilon_1 \end{cases}$ 2. R. $\begin{cases} 3\varepsilon_1 + \varepsilon_2, & 0 \\ 0 & , \; \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2. \end{cases}$

Digitized by Google

III. T.

$$\text{1. R.} \begin{cases} \varepsilon_1 & , \ \frac{1}{4b_2}\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, \\ \frac{1}{4b_2}\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, & \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\text{2. R.} \begin{cases} \varepsilon_1 & , \ b_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\ b_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), & 0 \end{cases} \text{ wobei } b_2 \neq 0, \ \frac{1}{2}$$

$$\text{1. u. 2. r. G.} \begin{cases} 0 & , \ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, & \pm t\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{cases} \text{ wobei } t > 0.$$

$$\textbf{IV. T. (r. G.)} \begin{cases} \varepsilon_1 & , \ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, & 0. \end{cases}$$

$$\textbf{V. T. (r. G.)} \begin{cases} \varepsilon_1 & , \ b_2\varepsilon_2, \\ b_2\varepsilon_2, & 0 \end{cases} \text{ wobei } b_2 \neq 0, \ \frac{1}{2}.$$

VI. T.

$$\text{1. R.} \begin{cases} \varepsilon_1, & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1, & 0 \end{cases} \quad \text{2. R.} \begin{cases} 0 & , \ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & 0 \end{cases} \quad \text{1. u. 2. r. G.} \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \\ 0, & \mp\varepsilon_1. \end{cases}$$

$$\textbf{VII. T. (r. G.)} \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \\ 0, & 0. \end{cases} \quad \textbf{VIII. T. (r. G.)} \begin{cases} 0, & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1, & 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \end{cases}$$

$$\textbf{IX. T. (r. G.)} \begin{cases} 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_1. \end{cases} \quad \textbf{X. T. (r. G.)} \begin{cases} 0, & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1, & 0. \end{cases} \quad \textbf{XI. T. (r. G.)} \begin{cases} 0, & 0 \\ 0, & 0. \end{cases}$$

XII. T.

$$\text{1. R. (r. G.)} \begin{cases} \varepsilon_1 & , \ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, & \varepsilon_2. \end{cases} \quad \text{2. R. (r. G.)} \begin{cases} \varepsilon_1, & \frac{\varepsilon_2}{2} \\ \frac{\varepsilon_2}{2}, & 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Über Zerlegungen des n-dimensionalen Raumes.

Von **Lilly Hahn** in Czernowitz.

In meiner im Jahre 1909 an der Wiener Universität verfaßten Doktorsdissertation habe ich im Anschluß an den von Hans Hahn[1]) geführten Beweis, daß ein einfaches Polygon die Ebene in zwei getrennte Gebiete zerlegt, einen nur Anordnungs- und Verknüpfungsaxiome benützenden Beweis geliefert, daß der Raum durch ein einfaches Polyeder in zwei getrennte Gebiete zerlegt wird und analog die Zweiteilung des n-dimensionalen Raumes behandelt. Seither erschienen Abhandlungen von den Herren N. J. Lennes[2]) und O. Veblen[3]), welche in sehr bemerkenswerter Weise denselben Gegenstand behandeln. Diese Abhandlungen veranlaßten mich, meine damaligen Untersuchungen wieder aufzunehmen, in einigen Punkten umzugestalten und zu verallgemeinern. Im folgenden seien die Resultate dieser Untersuchungen mitgeteilt. Ich stütze mich dabei auf das von O. Veblen aufgestellte Axiomensystem[4]) verallgemeinert auf n-dimensionale Räume, und benütze eine Reihe von Sätzen aus der n-dimensionalen Geometrie, die ausführlich von E. H. Moore[5]) bewiesen wurden.

Definition des n-dimensionalen Gebietes: Ein n-dimensionales Gebiet ist eine Menge von Punkten, die alle in demselben R_n liegen und die so beschaffen ist, daß sich 1. stets zwei beliebige unter ihnen durch einen Streckenzug verbinden lassen, dessen sämtliche Punkte der Menge angehören, 2. daß jeder Punkt der Menge innerer Punkt eines n-dimensionalen Simplex S_n ist, das ganz aus Punkten der Menge besteht.

Definition des Randes eines Gebietes: Eine Punktmenge R heißt Rand eines Gebietes M, wenn 1. kein Punkt von R in dem Gebiete M liegt, 2. jeder Streckenzug, der einen Punkt von M mit einem Punkt, der nicht zu M gehört, verbindet, einen Punkt von R enthält; 3. wenn jeder Punkt von R Endpunkt einer Strecke ist, die nur aus Punkten von M besteht. Eine Menge M kann nur einen einzigen Rand haben. Hat sie einen, so ist er nichts anderes als die Menge aller Punkte, die nicht zu M gehören, aber Endpunkte von Strecken sind, deren sämtliche Punkte zu M gehören.

[1]) H. Hahn, Monatshefte XIX, S. 289.
[2]) N. J. Lennes, Amer. Journal, 33, S. 37.
[3]) O. Veblen, Am. Trans. 14, S. 65.
[4]) O. Veblen, A system of axioms for geometry, Am. Trans. 5, S. 343.
[5]) E. H. Moore, On the projective axioms of geometry, Am. Trans. 3, S. 147.

Digitized by Google

Definition des n-dimensionalen polyedralen Gebietes. Die Definition des n-dimensionalen polyedralen Gebietes geschieht durch Induktion. Ein eindimensionales (polyedrales) Gebiet ist eine Strecke, Halbgerade (einschließlich der Endpunkte) oder Vollgerade. Ein zweidimensionales Gebiet, das einen Rand besitzt, der aus einer endlichen Anzahl von Punkten und eindimensionalen Gebieten samt deren Randpunkten besteht, heißt ein zweidimensionales polyedrales oder gewöhnlich polygonales Gebiet.

Wir setzen nun voraus, wir wissen, was unter einem $(n-1)$-dimensionalen polyedralen Gebiet zu verstehen ist, nachdem wir es für den Fall $n=1$ (Strecke, Halb- und Vollgerade) und $n=2$ (polygonales Gebiet) eben definiert haben, und definieren:

Ein n-dimensionales Gebiet, dessen Rand aus einer endlichen Anzahl von Punkten, eindimensionalen Gebieten, zweidimensionalen polyedralen Gebieten, . . ., $(n-1)$-dimensionalen polyedralen Gebieten samt der Berandung aller dieser Gebiete besteht, heißt ein n-dimensionales polyedrales Gebiet.

Wir bezeichnen im folgenden ein k-dimensionales polyedrales Gebiet $(k=1, 2, \ldots n)$ mit G_k, Punkte mit G_0. Es sei hier bemerkt, daß die k-dimensionalen Räume R_k auch Gebiete G_k sind.

Satz 1. Sind in einem R_n eine endliche Anzahl $G_0, G_1, \ldots G_{n-1}$ gegeben, derart, daß jeder dem Rande eines dieser G_i $(i=0, 1, \ldots n-1)$ angehörende Punkt einem anderen dieser G_i angehört, so bilden diejenigen Punkte des R_n, die zu keinem dieser G_i gehören (also die Punktmenge $R_n - \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ bedeutet die Vereinigungsmenge aller $G_0, \ldots G_{n-1}$ zusammen) eine endliche Anzahl von G_n, die zu je zwei keinen Punkt gemein haben. Wir bezeichnen diese G_n mit Γ_n.

Wir können immer annehmen, daß die Randmannigfaltigkeiten jedes G_i schon unter den G stehen; denn wenn eine Randmannigfaltigkeit noch nicht in den G steht, und wir sie hinzufügen, so wird an der Menge $\mathfrak{G}$ nichts geändert.

Bevor wir an den Beweis des Satzes gehen, bemerken wir, daß Satz 1 ebensogut folgendermaßen hätte ausgesprochen werden können.

Satz 1 *a*. Sind in einem R_n eine endliche Anzahl $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}, G_n$ gegeben, derart, daß jeder dem Rande eines dieser G_i $(i=0, 1, \ldots n)$ angehörende Punkt einem andern G_i angehört, so bilden diejenigen Punkte des R_n, die zu keinem dieser G gehören, eine endliche Anzahl von G_n, von denen je zwei keinen gemeinsamen Punkt haben; wir bezeichnen sie mit Γ_n'.

Man leitet Satz 1 *a* aus Satz 1 folgendermaßen ab.

Wir nehmen zunächt wie in Satz 1 die $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ aus dem R_n fort, also bleiben nach Satz 1 eine endliche Anzahl von Γ_n zurück. Es sind nun noch gewisse G_n aus dem R_n fortzunehmen; ihre Randmannigfaltigkeiten sind schon unter den zuerst

Digitized by Google

aus dem R_n herausgenommenen $G_0, \ldots, G_{n-1}$ herausgenommen worden. Es ist daher die Fortnahme eines der noch fortzunehmenden G_n identisch mit der Fortnahme einer endlichen Anzahl von Γ_n; denn wenn ein Γ_n einen Punkt eines der herauszunehmenden G_n enthält, so muß es ganz zu dem G_n gehören und wenn ein Γ_n einen Punkt enthält, der nicht zu einem der G_n gehört, so hat es gar keinen Punkt mit dem G_n gemein. Nehme ich also aus dem R_n nach Fortnahme der $G_0, \ldots, G_{n-1}$ noch die G_n fort, so nehme ich nur noch eine endliche Anzahl von Γ_n aus dem R_n fort, es können also nach Fortnahme endlich vieler G_n nur endlich viele Γ_n zurückbleiben.

Beweis des Satzes 1. Wir setzen den Satz 1 und somit Satz 1 a für $i < n$ als bewiesen voraus.

I. Nun nehmen wir einen Punkt P, der auf keinem der Gebiete $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ liegt und betrachten alle Punkte, die sich mit P durch einen Streckenzug verbinden lassen, der keines der Gebiete G trifft. Wir behaupten, die Menge aller dieser Punkte und der Punkt P selbst bilden ein n-dimensionales Gebiet, das wir Γ_n nennen.

Wir haben also zunächst zu zeigen:

1. Je zwei Punkte A und B dieser Menge lassen sich durch einen Streckenzug verbinden, der nur aus Punkten dieser Menge besteht.

2. Jeder Punkt C der Menge liegt im Innern eines Simplex S_n, das nur aus Punkten dieser Menge besteht.

Beweis von 1. Wir verbinden P mit A und mit B durch einen Streckenzug. Dann ist der Streckenzug von A über P nach B der gewünschte.

Beweis von 2. Wir bilden zu jedem G_i ($i = 0, 1, \ldots, n-2$) den R_i, in dem es liegt,[1]) und verbinden jeden dieser R_i, falls er nicht ohnehin durch C hindurchgeht, mit C durch einen R_{i+1}. Es entstehen so eine endliche Anzahl durch C hindurchgehender R_i und R_{i+1}, die wir mit $\overline{R}$ bezeichnen. Durch C legen wir einen R_1, er heiße g, der in keinem der $\overline{R}$ enthalten ist. Auf ihm bestimmen wir die Punkte C_1 und C_2 so, daß die Anordnung besteht $(C_1\, C\, C_2)$ und daß die Strecke $C_1\, C_2$ einschließlich der Endpunkte C_1 und C_2 keinen Punkt eines G_{n-1} enthält.

Durch den Punkt C_2 legen wir einen R_{n-1}, den wir R nennen, der g nicht enthalten soll. Wir unterscheiden nun die G_i ($i = 0, \ldots, n-2$) 1. in solche, deren zugehöriger R_i nicht durch C geht, 2. in solche, deren zugehöriger R_i C enthält.

---

[1]) Den R_i, in dem ein Gebiet G liegt, werden wir immer kurz den zu G_i gehörigen R_i nennen.

Digitized by Google

Im ersten Falle kann der R_i auch nicht durch C_1 gehen, weil sonst der durch C und diesen R_i gelegte R_{i+1} entgegen unserer Annahme g enthalten müßte. Wir verbinden die R_i dieses ersten Falles mit C_1 durch R_{i+1}, die wir mit $\overline{R}$ bezeichnen.

Die Schnittgebilde von R mit den $\overline{R}$ und den sämtlichen $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ sind eine endliche Anzahl von $R_0, R_1, \ldots R_{n-3}, R_{n-2}$ und von $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$[1]), deren Vereinigungsmenge (der R und der G) wir mit $\mathfrak{G}'$ bezeichnen. Auf R wenden wir nun Satz 1 a für $n-1$ Dimensionen an. Darnach liegt der Punkt C_2 im Innern eines Simplex S_{n-1}, das nur aus Punkten der Menge $R-\mathfrak{G}'$ besteht. Durch C_1 und jedes Berandungs-S_{n-2} dieses S_{n-1} legen wir den R_{n-1} und erhalten so ein Simplex S_n, in dessen Innerem der Punkt C liegt und das nur aus Punkten der Menge $R_n - \mathfrak{G}$ besteht, wie man sich folgendermaßen überzeugt:

Zunächst sieht man sofort ein, daß in dem S_n kein G_0 liegen kann; wir nehmen an, es sei bereits bewiesen, daß auch kein Punkt eines $G_0, \ldots, G_{i-1}$ $(i = 0, \ldots n-2)$ in dem S_n liegen kann und zeigen, daß dann kein Punkt eines G_i in dem S_n liegen kann. Denn entweder wäre es ein G_i, dessen zugehöriger R_i nicht durch C geht. Wir verbinden dann den zu G_i gehörigen R_i mit C_1 durch einen R_{i+1} und wissen, daß dieser das Simplex S_{n-1} treffen würde, wenn das G_i im Innern des S_n einen Punkt hätte. Das aber widerspricht der Konstruktion des S_{n-1}.

Nun betrachten wir die G_i, deren zugehöriger R_i durch C geht. Liegt ein Punkt P eines solchen G_i im S_n, so verbinden wir ihn mit C durch eine Strecke. P ist Punkt des G_i, C nicht. Da aber C in dem zu unserem G_i gehörigen R_i liegt, müssen auf CP Randpunkte von G_i liegen. Nun konnten wir aber immer annehmen, daß jedes Berandungs-G_l unseres G_i selbst eines der $G_0, G_1, \ldots, G_{i-1}$ ist und da dann $l < i$ ist, widerspricht das unserer Annahme.

Daß endlich kein Punkt eines G_{n-1} im S_n liegen kann, erhellt leicht aus der Konstruktion des S_{n-1}; denn das G_{n-1} kann nicht ganz im S_n enthalten sein, da sonst ein Punkt seiner Berandung drin enthalten wäre, also muß das G_{n-1} den Rand des S_n treffen; die Strecke C_1C_2 (einschließlich der Endpunkte) aber enthält keinen Punkt des G_{n-1}, es folgt also aus bekannten Eigenschaften eines Simplex, daß das G_{n-1} das Grund-S_{n-1} schneiden muß, was der Konstruktion des S_n widerspricht.

Wir haben also gezeigt, daß die Punkte, die im R_n zurückbleiben, wenn man eine endliche Anzahl von $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$

[1]) Wir stützen uns hier auf den Satz: hat ein R_i mit dem einem $G_k (k < n)$ zugehörigen R_k einen R_l gemein, so hat der R_i mit dem G_k eine endliche Anzahl von G_l gemeinsam.

Beweis: Wir nehmen an, der Satz gelte für alle $k' < k$. Darnach hat der R_l unserer Behauptung mit allen Randmannigfaltigkeiten $G_0, \ldots, G_{k-1}$ des G_k höchstens Polyedralgebiete von den Dimensionen $0, 1, \ldots, l$ gemeinsam. Nach Fortnahme dieser Gebiete aus dem R_l bleiben noch eine endliche Anzahl von G_l im R_l; die Schnittgebilde mit den G_k können nun nur gewisse dieser G_l sein, denn wenn eines der Gebiete G_l einen Punkt des G_k enthält, muß es ganz in ihm liegen.

Digitized by Google

aus dem R_n herausnimmt, n-dimensionale Gebiete sind; wir nennen sie auch weiterhin Γ_n.

II. Bevor wir uns nun dem Beweise zuwenden, daß die Gebiete Γ_n Polyedralgebiete sind, haben wir noch eine Zerlegung der Gebiete G in Teilgebiete zu vollführen.

Wir verfahren dabei folgendermaßen:

Es sei ein System von Gebieten $G_0, \ldots, G_i$ $(i \leqq n-1)$ gegeben, wobei jede Randmannigfaltigkeit eines der G selbst eines der G sei. Wir behaupten: man kann dieses System der G ersetzen durch ein anderes: $G_0^*, G_1^*, \ldots, G_i^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Gesamtheit der G^* enthält genau dieselben Punkte wie die Gesamtheit der G.

2. Keine zwei der Gebiete G^* haben einen gemeinsamen Punkt.

3. Jedes G^*, das einen Punkt vom Rand eines anderen G^* enthält, gehört ganz dem Rand dieses anderen G^* an.

Wir nehmen an, diese Behauptung sei für $i-1$ bewiesen,

Es werden nun die Schnittgebilde jedes G_i mit allen $G_0, \ldots, G_{i-1}$ und den übrigen nicht im selben R_i liegenden G_i gebilde und diese Schnittgebilde samt ihren Randmannigfaltigkeiten aus den G' zu denen sie gehören, herausgenommen. Es bleibt statt der $G_0, \ldots, G_{i-1}$ eine endliche Anzahl von Gebieten der Dimensionen $0, 1, \ldots i-1$ zurück, die wir mit $G_0', \ldots, G_{i-1}'$ bezeichnen. Zu diesen G' fügen wir die früher herausgenommenen G (die Schnittgebilde eines jeden G_i mit allen übrigen $G_0, \ldots, G_{i-1}$) sowie die Schnittgebilde zweier nicht im selben R_i liegenden G_i hinzu und erhalten so ein neues System von Gebieten $G_0'', \ldots, G_{i-1}''$, das wir nach Voraussetzung durch ein System von Gebieten $G_0^*, \ldots, G_{i-1}^*$, die die oben angeführten drei Eigenschaften besitzen, ersetzen können. Durch Fortnahme der k-dimensionalen $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$ Schnittgebilde aus den Gebieten G_i sind von den G_i eine endliche Anzahl i-dimensionaler Gebiete zurückgeblieben, die wir G_i^* nennen. Wir haben zu zeigen, daß für das nun gewonnene System der $G_0^*, \ldots, G_{i-1}^*, G_i^*$ die oben aufgezählten drei Eigenschaften gelten.

Daß die erste Eigenschaft gilt, ersieht man unmittelbar aus der Konstruktion der Gebiete G^*.

Bei der zweiten Eigenschaft bleibt offenbar nur zu beweisen, daß keine zwei G_i^* einen Punkt gemein haben: entweder sie liegen im selben R_i, dann müßte eines der zwei Gebiete einen Randpunkt des anderen enthalten, was unmöglich ist, oder die beiden G_i^* liegen nicht im selben R_i, dann haben sie ein Schnittgebilde von höchstens $i-1$ Dimensionen, das aber kann nicht zu den Gebieten G_i^* gehören, da wir ja die Schnittgebilde je zweier Gebiete G_i von niedrigerer als i-ter Dimension als selbständige Gebiete niedrigerer Ordnung unter die G^* aufgenommen haben.

Auch die dritte Eigenschaft ist erfüllt; es braucht offenbar nur mehr nachgewiesen zu werden, daß jedes G_k^* $(k \leqq i)$, das einen

Digitized by Google

Punkt vom Rande eines G_i^* enthält, ganz zum Rande dieses G_i^* gehört. Jedes G_i^* gehört einem der ursprünglichen G_i an; jeder Randpunkt des G_i^* ist entweder auch Randpunkt dieses G_i oder er ist ein Punkt einer der aus diesem G_i herausgenommenen Mannigfaltigkeiten, in beiden Fällen ist er Punkt eines $G_0^*, \ldots G_{i-1}^*$.

Ist nun aber ein Punkt A eines G_k^* $(k < i)$ Randpunkt eines G_i^*, so ist jeder Punkt dieses G_k^* Randpunkt des G_i^*.

Um dies zu beweisen, genügt es nachzuweisen, daß jeder Punkt von G_k^* Endpunkt einer Strecke ist, deren sämtliche übrige Punkte zu G_i^* gehören. Da A Randpunkt von G_i^* ist, ist er Endpunkt einer Strecke PA, deren sämtliche übrige Punkte einschließlich P zu G_i^* gehören. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt B in G_k^* her und zeigen, daß wir diesen Punkt mit P durch einen Streckenzug, der abgesehen von B aus lauter Punkten von G_i^* besteht, verbinden können. Zunächst verbinden wir A mit B durch einen ganz in G_k^* liegenden [1]) Streckenzug σ, dessen Eckpunkte $C_1, \ldots, C_m$ seien. Wir legen durch die Punkte PAC_1 den R_2.[2]) Dieser trifft [3]) die von G_i^* und G_k^* verschiedenen Gebiete G^* in einer endlichen Anzahl von G_0, G_1, G_2, mit denen, resp. mit deren End- und Eckpunkten wir C_1 durch Gerade verbinden. Diese Geraden schneiden auf PA eine endliche Anzahl von Punkten aus. Wir wählen nun den Punkt L auf PA so nahe an A, daß die Strecke LA keinen dieser Schnittpunkte enthält. Man sieht nun leicht ein, daß die Strecke LC_1 keinen Punkt eines Gebietes G^* (außer natürlich G_i^*) enthalten kann.[4]) Auf diese Weise ist also auch C_1 mit P durch

[1]) Ist B nicht Punkt des G_k^*, sondern Randpunkt des G_k^*, so gilt genau derselbe Beweis. Mit jedem G_k^* des Randes von G_i^* liegen auch alle Randpunkte von G_k^* auf dem Rand von G_i^*.

[2]) Daß die Punkte P, A, C_1 nicht in einem R_1 liegen können, sieht man so ein. Die Strecke PA gehört (ausschließlich des Punktes A) nicht zu G_k^*, die Strecke C_1A gehört (einschließlich des Punktes A) zu G_k^*. Es müßte also der Punkt A ein Berandungspunkt von G_k^* sein und würde also entgegen unserer Annahme nicht zu G_k^* gehören.

[3]) Siehe Fußnote Seite 306.

[4]) Man hat dabei zu beachten, daß auf der Strecke AC_1 kein Endpunkt E einer Schnittstrecke s liegen kann. Es sind zwei Fälle möglich. *a*) Die Strecke s ist Schnittgebilde des R_2 mit einem G_h^*, $h < i$; in dem Falle würde E zum Rand eines G_h^* gehören, wobei $h = 0, \ldots, i-1$ ist; da aber die $G_0^*, \ldots, G_{i-1}^*$ die 3. der Seite 5 aufgestellten Bedingungen erfüllen, so gehört jedes G^*, das einen Punkt vom Rand eines anderen G^* enthält, ganz zum Rand dieses anderen G^*. Es müßte also G_k^* ganz zum Rand von G_h^* gehören, was unmöglich ist. *b*) Sei nun $h = i$, dann gehört das G_i^*, das unseren R_2 in der fraglichen Strecke schneidet, ganz einem der ursprünglichen G_i an. Der Punkt E ist Randpunkt eines G_i^* und kann nun entweder auf einer Randmannigfaltigkeit G_ν des G_i liegen oder auf einem G^*, das aus dem G_i herausgenommen wurde. Jedenfalls liegt das G^*, dem E angehört, ganz in dem R_i, dem G_i angehört. Der R_i hat mit dem R_2 nur die Punkte der Geraden g, die durch s geht, gemeinsam. Es kann also das G^*, dem E angehört, mit dem R_2 nur Punkte der Geraden g gemein haben, dieses G^* kann also nicht etwa den Punkt C_1 enthalten, was ein Widerspruch ist.

Digitized by Google

einen Streckenzug s verbunden. Wir gehen nun so längs σ von Eckpunkt zu Eckpunkt weiter. Endlich haben wir auch den Endpunkt von σ, B, mit P durch einen Streckenzug verbunden, der nur aus Punkten von G_i^* besteht.

Damit ist aber nun auch gezeigt, daß, wenn ein Punkt eines G_k^* $(k < i)$ Randpunkt eines G_i^* ist, jeder Punkt dieses G_k^* Randpunkt dieses G_i^* ist; daher ist nun auch erwiesen, daß jede Randmannigfaltigkeit eines Gebietes G^* selbst ein Gebiet G^* niedrigerer Dimension ist.

III. Es wird nun gezeigt, daß die Gebiete Γ_n Polyedralgebiete sind.

In der Tat, zunächst besitzt jedes Gebiet Γ_n einen Rand; und zwar besteht dieser Rand nur aus Punkten der Gebiete G_0, $G_1, \ldots, G_{n-1}$ oder was dasselbe ist, der zu ihnen gehörigen Gebiete G^*. Dies folgt aus der Definition des Randes eines Gebietes und der Art, wie die Gebiete Γ_n definiert wurden.

Sodann wird gezeigt: wenn ein Punkt eines G^* dem Rand eines Γ_n angehört, so gehört jeder Punkt dieses G^* zu diesem Rand. Der Beweis dieser Behauptung wird genau so geführt wie der Seite 308. Hiemit ist bewiesen, daß der Rand jedes Γ_n aus einer endlichen Anzahl G^* besteht. Da auch der Rand jedes dieser G^* offenbar zum Rande des Γ_n gehört (vgl. Anm.[1]) S. 308), so ist tatsächlich gezeigt, daß jedes Γ_n ein Polyedralgebiet ist.

IV. Um nun zu zeigen, daß die Gebiete Γ_n nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, beweisen wir die Behauptungen:

1. Gibt es ein Γ_n, dessen Rand nur von $G_0^*, \ldots, G_{n-2}^*$ gebildet wird, dann gibt es nur das eine Γ_n.

Beweis. Zu diesem Γ_n gehören alle Punkte, die sich mit einem gegebenen Punkt P_1 dieses Γ_n durch einen Streckenzug verbinden lassen, der die Berandungs-$G_0^*, \ldots, -G_{n-2}^*$ des Γ_n nicht trifft. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt P_2 des R_n, der auf keinem der $G_0^*, \ldots, G_{n-2}^*$ der Berandung des Γ_n liegt und verbinden nun jeden der Punkte P_1 und P_2 mit den R_i $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$, in denen die G_i^* der Berandung des Γ_n liegen, durch R_{i+1} bezw. wenn er schon in einem dieser R_i liegt, durch diesen R_i; das gibt eine endliche Anzahl von $R_1, \ldots, R_{n-1}$ durch P_1 und P_2.

Es gibt aber bestimmt außerhalb aller dieser R einen Punkt A, der also auch auf keinem Berandungs-G_i^* des Γ_n liegen kann und weder mit P_1 noch mit P_2 identisch ist.

Der Streckenzug $P_2 A P_1$ verbindet dann den beliebigen auf keinem $G_0^*, \ldots, G_{n-2}^*$ der Berandung des Γ_n liegenden Punkt P_2 mit P_1 und trifft die Berandung des Γ_n nicht. Es gehören also alle auf keinem Berandungs-G_i^* des Γ_n liegenden Punkte des R_n zu Γ_n, das heißt, es gibt nur dieses eine Γ_n, wie behauptet wurde.

2. Ein G_{n-1}^* kann nur Randpunkte von höchstens zwei verschiedenen Γ_n enthalten.

Digitized by Google

Beweis. Der R_{n-1}, in dem das G^*_{n-1} liegt, teilt den R_n in zwei getrennte Gebiete. Man kann also von einem Punkte des G^*_{n-1} aus nach zwei Seiten hin einen Halbstrahl legen, nach der Seite S_1 und der Seite S_2. Nun legen wir von zwei Punkten, A und B des G^*_{n-1} nach S_1 je einen Halbstrahl und bestimmen auf diesem die Punkte A_1 resp. B_1 so, daß die Strecken AA_1 und BB_1 keinen Punkt eines der Gebiete G^* enthalten.

Es wird nun ganz wie früher Seite 308 A_1 mit B_1 durch einen Streckenzug verbunden, der keinen Punkt eines der G^* enthält. Die Punkte dieses Streckenzuges gehören also zum selben Γ_n.

Damit ist nun gezeigt, daß das G^*_{n-1}, in dem A und B liegen, auf der Seite S_1 nur an ein einziges Gebiet Γ_n grenzen kann. Dasselbe zeigt man von der Seite S_2.

Aus diesen beiden eben bewiesenen Behauptungen folgt nun, da es nur endlich viele G^*_{n-1} gibt, sofort, daß die Γ_n nur in endlicher Anzahl vorhanden sind.

2. Satz. Damit es mindestens zwei verschiedene Gebiete Γ_n gebe, ist notwendig und hinreichend, daß es unter den zu den gegebenen $G_0, \ldots, G_{n-1}$ gehörigen Gebieten G^*_{n-1} eine Anzahl von G^*_{n-1} gibt — wir bezeichnen sie mit $\overline{G}^*_{n-1}$ —, die der folgenden Bedingung genügen: jeder Punkt eines G^*_{n-2}, das zum Rand eines $\overline{G}^*_{n-1}$ gehört, gehört zum Rand einer geraden Anzahl von $\overline{G}^*_{n-1}$. Dabei ist aber, um den Wortlaut dieses Satzes nicht zu kompliziert zu gestalten, von folgender abkürzender Terminologie Gebrauch gemacht: gehört zum Rande eines G^*_{n-1} ein G^*_{n-2}, das von beiden Seiten [1]) an dieses G^*_{n-1} grenzt, so ist dieses G^*_{n-1} zu zählen wie zwei verschiedene an das G^*_{n-2} grenzende G^*_{n-1}.

I. Die Bedingung ist hinreichend.

1. Hilfssatz. Ein Dreieck trifft eine endliche Anzahl in seinem R_2 liegender G^*_0 und G^*_1 [2]), die die Eigenschaft haben, daß jedes G^*_0 zum Rand einer geraden Anzahl von G^*_1 gehört, in einer geraden Anzahl von Punkten, vorausgesetzt, daß kein Eckpunkt des Dreiecks auf einem G^*_1 liegt und keines der G^*_0 auf dem Dreieck.

Beweis. 1. Teil. Ein Dreieck hat mit einer endlichen Anzahl von G^*_0 und G^*_1, die die Eigenschaft haben, daß jedes G^*_0 zum Rand von zwei G^*_1 gehört, eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein, wenn dieselben Voraussetzungen gelten wie oben.

Eine Figur, die aus einer endlichen Anzahl von G^*_0 und G^*_1 besteht und die Eigenschaft hat, daß 1. jedes G^*_0 zum Rand von zwei G^*_1 gehört, 2. je zwei Punkte der Figur sich durch einen Streckenzug verbinden lassen, der nur aus Punkten der Figur besteht, heißt ein Polygon. Die G^*_0 heißen die Ecken, die G^*_1 die Seiten des

[1]) Der R_{n-1} des G^*_{n-1} wird durch den R_{n-2} des G^*_{n-2} in zwei Teile zerlegt; in diesem Sinne ist von den beiden Seiten des G^*_{n-2} die Rede.

[2]) Wir bezeichnen generell ein System von G_i, dem die Seite 307 zitierten Eigenschaften zukommen, als ein System von G^*_i.

Digitized by Google

Polygones. Sind alle G_1^* Strecken, so heißt das Polygon geschlossen; kommen unter den G_1^* auch Halbgerade vor, so heißt das Polygon offen.[1])

Wir wählen nun auf unserem Polygon zwei Punkte A_1 und A_2 derart, daß sie 1. beide im Äußern des Dreiecks liegen, 2. *a*) wenn das Polygon ein geschlossenes ist, beide derselben Seite des Polygons angehören und die Strecke A_1A_2 keinen Dreieckspunkt enthält, 2. *b*) wenn das Polygon ein offenes ist, je auf einem seiner beiden Halbstrahlen so liegen, daß der Halbstrahl von diesem Punkte an keinen Dreieckspunkt mehr enthält. Der Streckenzug von A_1 bis A_2 (bei dem geschlossenen Polygon nicht die Strecke A_1A_2) kann nun das Dreieck nur in einer geraden Anzahl von Punkten treffen; denn von A_1 nach A_2 gehend, befindet man sich nach einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten mit dem Dreieck im Innern, nach einer geraden Anzahl im Äußern des Dreiecks. Da sich aber A_2 im Äußern des Dreiecks befindet, so liegt auf dem Streckenzug von A_1 bis A_2, also überhaupt auf dem Polygon, eine gerade Anzahl von Schnittpunkten mit dem Dreieck.

2. Teil. Da bei diesem Satze die G_0^* von den Schnittpunkten mit dem Dreieck ausgeschlossen sind, können wir nun auch folgendes behaupten.

Eine endliche Anzahl von Polygonen, die nur Eckpunkte gemeinsam haben, hat mit einem Dreieck eine gerade Anzahl von Schnittpunkten, wenn das Dreieck durch keinen Eckpunkt der Polygone geht und die Polygone keinen Eckpunkt des Dreiecks enthalten.

Eine endliche Anzahl von G_0^* und G_1^*, bei denen jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört, ist aber nichts anderes als eine endliche Anzahl von Polygonen mit nur gemeinsamen Eckpunkten. Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

2. Hilfssatz. Ein R_2, der von dem Rand eines $\overline{G}_{n-1}^*$ keinen Punkt eines $G_0^*, \ldots, G_{n-3}^*$ enthält und der mit keinem G_{n-2}^* der Berandung eines der $\overline{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} liegt, trifft die $\overline{G}_{n-1}^*$ und ihren Rand in einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^*, die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört.

Beweis. Der R_2 darf laut Voraussetzung mit keinem G_{n-2}^* der Berandung der $\overline{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1} liegen, also kann er auch mit keinem der $\overline{G}_{n-1}^*$ selbst im selben R_{n-1} liegen. Er hat also mit jedem $\overline{G}_{n-1}^*$, mit dem er überhaupt einen Punkt gemeinsam hat, eine endliche Anzahl G_1^* gemein. Die Randpunkte dieser G_1^* sind G_0^*, die die Schnittpunkte des R_2 mit den G_{n-2}^*, die der Berandung der $\overline{G}_{n-1}^*$ angehören, sind.

[1]) Auch eine Vollgerade kann als Spezialfall eines offenen Polygons betrachtet werden. Offenbar enthält ein offenes Polygon genau zwei Halbstrahlen.

Digitized by Google

Jedes Schnitt-G_0^* gehört einer geraden Anzahl von G_1^* als Rand an, da jeder Punkt eines G_{n-2}^*, das zum Rand eines der $\overline{G}_{n-1}^*$ gehört, zum Rand einer geraden Anzahl von $\overline{G}_{n-1}^*$ gehört.[1])

Ein R_2, der nicht die hier speziell angenommene Lage hat, hat mit den $\overline{G}_{n-1}^*$ und ihrem Rand eine endliche Anzahl von G_0^*, G_1^*, G_2^* gemeinsam.

3. Hilfssatz. Ein Dreieck trifft die $\overline{G}_{n-1}^*$ und ihre Berandung in einer geraden Anzahl von Punkten, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind: kein Eckpunkt des Dreiecks gehört einem der $\overline{G}_{n-1}^*$ an, das Dreieck trifft keinen Punkt der Berandung dieser $\overline{G}_{n-1}^*$, der dem Dreieck zugehörige R_2 enthält keinen Punkt eines $G_0^*, \ldots, G_{n-3}^*$ der Berandung eines $\overline{G}_{n-1}^*$ und liegt mit keinem G_{n-2}^* der Berandung der $\overline{G}_{n-1}^*$ im selben R_{n-1}.

Beweis. Der R_2 des Dreiecks trifft nach Hilfssatz 2 die $\overline{G}_{n-1}^*$ und deren Rand in einer endlichen Anzahl von G_0^* und G_1^*, die die Eigenschaft haben, daß jedes G_0^* zum Rand einer geraden Anzahl von G_1^* gehört.

Kein G_0^* liegt auf dem Dreieck, da die G_0^* die Schnittpunkte des R_2 mit den G_{n-2}^* der Berandung der $\overline{G}_{n-1}^*$ sind, das Dreieck aber keinen Berandungspunkt der $\overline{G}_{n-1}^*$ enthält; ferner liegt kein Eckpunkt des Dreiecks auf einem G_1^*, da wir das Dreieck so gelegt haben, daß es keinen Eckpunkt auf einem der $\overline{G}_{n-1}^*$ hat. Nach dem 1. Hilfssatz hat also das Dreieck mit der Schnittfigur des R_2 und der $\overline{G}_{n-1}^*$ samt ihrer Berandung eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein, also hat das Dreieck auch mit den $\overline{G}_{n-1}^*$ und ihrer Berandung eine gerade Anzahl von Schnittpunkten gemein.

Wir kehren nun zurück zum Beweis, daß die in Satz 2 gestellte Bedingung hinreichend ist.

Wir legen durch einen Punkt eines der $\overline{G}_{n-1}^*$ einen R_1 so, daß der R_1 keinen Berandungspunkt von den $\overline{G}_{n-1}^*$ enthält.[2]) Mit den $\overline{G}_{n-1}^*$ selbst habe er die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_m$ gemein. Auf dem R_1 wählen wir nun die Punkte C und C' so, daß die Strecken CB_i (B_i sei einer der Punkte $B_1, \ldots, B_m$) und BC' außer dem Punkt B_i und einschließlich der Punkte C und C' keinen Punkt eines $\overline{G}_{n-1}^*$ enthält und daß die Anordnung besteht (CB_iC').

---

[1]) Man beachte die Seite 310 erläuterte abgekürzte Terminologie.

[2]) Man verbindet die G_i^* ($i = 0, \ldots, n-2$) der Berandung mit dem Punkt durch R_{i+1} resp. R_i und legt den R_1 so, daß er in keinem dieser R_{i+1} oder R_i ganz liegt.

Digitized by Google

Wir behaupten nun: C und C' lassen sich nicht durch einen Streckenzug verbinden, der keinen Punkt eines Gebietes $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seiner Berandung enthält.

Wir zeigen zu dem Zweck:

A. Ein Streckenzug σ, der C und C' verbindet und die beiden folgenden Eigenschaften hat, enthält immer einen Punkt der Gebiete $\overline{G}^*_{n-1}$.

1. Die Verbindungsgeraden seiner Eckpunkte mit C' enthalten keinen Punkt eines $G^*_0, \ldots, G^*_{n-2}$ der Berandung eines der $\overline{G}^*_{n-1}$.

2. Die Verbindungs-R_2 zweier aufeinanderfolgender Eckpunkte des Streckenzuges mit C' enthalten [1]) von der Berandung eines der $\overline{G}^*_{n-1}$ keinen Punkt eines $G^*_0, \ldots, G^*_{n-3}$ und sie liegen mit keinem G^*_{n-2} des Randes eines der $\overline{G}^*_{n-1}$ im selben R_{n-1}.

Wir nehmen zum Beweise an, der Streckenzug σ enthalte keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seiner Berandung und zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch führt.

σ habe die Eckpunkte $C, C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m, C'$. Unter den so entstehenden Dreiecken ($\triangle\, C_{i-1}, C_i, C'$) betrachten wir zuerst das Dreieck $C C_1 C'$.[2]) Kein Eckpunkt des Dreiecks liegt auf einem $\overline{G}^*_{n-1}$ und das Dreieck enthält keinen Punkt der Berandung eines der $\overline{G}^*_{n-1}$.

Das Dreieck $C C_1 C'$ trifft also die $\overline{G}^*_{n-1}$ in einer geraden Anzahl von Punkten, von denen laut Voraussetzung auf $C C'$ nur einer, der Punkt B_i, liegt. Es muß also auf $C_1 C'$ eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten mit den $\overline{G}^*_{n-1}$ liegen. Wir gehen so von Dreieck zu Dreieck weiter und kommen endlich zum Dreieck $C_{m-2} C_{m-1} C'$ und überzeugen uns ebenso, daß auf Seite $C_{m-1} C'$ eine ungerade Anzahl von Punkten, die den $\overline{G}^*_{n-1}$ angehören, liegen muß. Endlich betrachten wir das Dreieck $C_{m-1} C_m C'$. Auf Seite $C_{m-1} C'$ liegt eine ungerade Anzahl von Punkten der $\overline{G}^*_{n-1}$, es muß also noch eine ungerade Anzahl von Punkten der $\overline{G}^*_{n-1}$ auf den Strecken $C_{m-1} C_m$ und $C_m C'$ liegen. Das ist aber ein Widerspruch mit der gemachten Voraussetzung, daß σ keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ enthalten soll. Es gibt also keinen Streckenzug, der C und C' verbindet und die beiden angeführten Eigenschaften hat und keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seines Randes enthält.

---

[1]) Wenn die drei Punkte nicht in einem R_1 liegen.

[2]) Der Fall, daß die drei Punkte C, C_1 und C' in einem R_1 liegen, bedarf keiner weiteren Erörterung.

Digitized by Google

B. Wenn es nun überhaupt einen Streckenzug σ' gibt, der C und C' verbindet und keinen Punkt eines der $\overline{G}^*_{n-1}$ oder deren Berandung enthält, so gibt es auch einen Streckenzug σ, der die eben angeführten zwei Eigenschaften hat und C mit C' verbindet, ohne einen Punkt eines der $\overline{G}^*_{n-1}$ oder ihres Randes zu enthalten.

Um dies zu beweisen, ändern wir zunächst σ' in einen Streckenzug ab, der die erste Eigenschaft hat: $C, \ldots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \ldots, C'$ seien die Eckpunkte von σ', C_k der erste Eckpunkt derart, daß die Strecke $C' C_k$ einen Berandungspunkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ enthält. Nun legen wir durch alle G^*_i $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$ der Berandung unserer $\overline{G}^*_{n-1}$ die zugehörigen R_i und verbinden diese R_i mit C' durch R_{i+1} resp. R_i (wenn C' in einem dieser R_i schon enthalten ist), die wir alle zusammen η nennen.

Dann legen wir durch C_k einen R_1, er heiße g, der in keinem der η ganz liegt.[1]) Wir können nun auf g einen Punkt P_l derart bestimmen,[2]) daß die Strecken $C_{k-1} P_l$ und $P_l C_{k+1}$ keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seines Randes enthalten und so, daß P_l in keinem η liegt. Dann kann die Strecke $P_l C'$ keinen Punkt der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ enthalten.

Wir ersetzen also jetzt die Strecken $C_{k-1} C_k$ und $C_k C_{k+1}$ durch die Strecken $C_{k-1} P_l$ und $P_l C_{k+1}$ und verfahren so mit jedem Eckpunkt C_j von σ, wenn die Strecke $C_j C'$ einen Berandungspunkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ enthält. Auf diese Weise erhalten wir einen neuen Streckenzug σ_1 mit den Eckpunkten $C, P_1, \ldots, P_m, C'$, die die beiden folgenden Eigenschaften besitzen: Die Strecke $C' P_k$ (P_k ein beliebiger Eckpunkt von σ_1) enthält keinen Punkt der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ und sie liegt mit keinem G^*_{n-2} dieser Berandung im selben R_{n-2}; ferner enthält σ_1 keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder dessen Berandung, wenn der Streckenzug σ' keinen enthält.

Damit nun auch die zweite der verlangten Eigenschaften erfüllt werde, ändern wir σ_1 wieder in einen anderen Streckenzug σ ab, und zwar auf die folgende Weise.

---

[1]) Wir verbinden einen den η nicht angehörigen Punkt mit C_k und erhalten so den gewünschten R_1.

[2]) C_{k-1} (und C_{k+1}) wird mit g durch einen R_2 verbunden. Dieser trifft die $\overline{G}^*_{n-1}$ und ihre Berandung in einer endlichen Anzahl von G^*_0, G^*_1, G^*_2 mit denen, resp. mit deren End- und Eckpunkten C_{k-1} (und C_{k+1}) durch R_1 verbunden wird; diese R_1 nennen wir ξ. Sie schneiden auf g Punkte $S_1, S_2, \ldots, S_h$ ab. P_l wird nun so gewählt, daß die Strecke $C_k P_l$ keinen der Punkte S und keinen Punkt eines η enthält. Dreieck $C_k C_{k-1} P_l$ ($\triangle C_k C_{k+1} P_l$) enthält dann keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$.

Digitized by Google

Der durch die Punkte $P_k P_{k+1} C'$ bestimmte R_2 enthalte von der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ einen Punkt eines $G^*_0, \ldots, G^*_{n-3}$ oder er liege mit einem G^*_{n-2}, das zum Rand eines $\overline{G}^*_{n-1}$ gehört, im selben R_{n-1}.

Wir legen durch alle die G^*_ν ($\nu = 0, \ldots, n-3$) der Berandung unserer $\overline{G}^*_{n-1}$ die zugehörigen R_ν und verbinden nun die Geraden $C' P_k$ und $C' P_{k+1}$ mit diesen R_ν durch $R_{\nu+2}$ resp. $R_{\nu+1}$, resp. R_ν, ebenso verbinden wir $C' P_k$ und $C' P_{k+1}$ mit den R_{n-2}, die zu denjenigen G^*_{n-2} gehören, welche mit $C' P_k$ resp. $C' P_{k+1}$ im selben R_{n-1} liegen, durch R_{n-1}.[1]) Alle diese $R_{\nu+2}$, $R_{\nu+1}$ und R_ν zusammen nennen wir ζ. Nun verbinden wir die zu den übrigen G^*_{n-2} zugehörigen R_{n-2} mit C' durch R_{n-1} und nennen diese alle zusammen η. Nun legen wir durch einen inneren Punkt S der Strecke $P_k P_{k+1}$ einen R_1, den wir g nennen, so daß er in keinem ζ oder η ganz liegt. Auf g wird der Punkt D so bestimmt, daß 1. die Strecke $S D$ (inklusive des Endpunktes D) keinen Schnittpunkt mit ζ oder η enthält, 2. die Strecken $P_k D$ und $D P_{k+1}$ keinen Punkt eines der $\overline{G}^*_{n-1}$ enthält. Die Strecke $D C'$ enthält dann keinen Berandungspunkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$; die durch die Punkte P_k, C', D und P_{k+1}, C', D bestimmten R_2 enthalten keinen Punkt eines $G^*_0, \ldots, G^*_{n-3}$ der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ und sie liegen mit keinem G^*_{n-2} des Randes eines $\overline{G}^*_{n-1}$ im selben R_{n-1}.

So oft nun ein durch die Punkte P_i, P_{i+1}, C', bestimmter R_2 einen Punkt eines $G^*_0, \ldots, G^*_{n-3}$ der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ enthält oder mit einem G^*_{n-2} der Berandung eines $\overline{G}^*_{n-1}$ im selben R_{n-1} liegt, ersetzen wir die Strecke $P_i P_{i+1}$ in der angegebenen Weise durch zwei andere Strecken und erhalten dadurch einen neuen Streckenzug σ, der nun beide Seite 11 verlangten Eigenschaften hat und der keinen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seiner Berandung enthält, wenn σ' keinen solchen Punkt enthält. Einen solchen Streckenzug σ kann es aber nicht geben, also gibt es auch den Streckenzug σ' nicht, das heißt aber, jeder Streckenzug, der die Punkte C und C' verbindet, muß einen Punkt eines $\overline{G}^*_{n-1}$ oder seiner Berandung enthalten.

II. Die Bedingung ist notwendig.

Wir nehmen also an, es gebe mindestens zwei Gebiete Γ_n, sie heißen γ und γ', und zeigen, daß es dann unter den G^*_{n-1} ein Teilsystem geben muß, das der obigen Bedingung genügt.

[1]) Wie vorhin bemerkt, liegt $C' P_k$ mit keinem dieser G^*_{n-2} im selben R_{n-2}.

Digitized by Google

Wir nehmen eines der beiden Γ_n, z. B. γ, her. Es muß bestimmt ein G^*_{n-1}, wir nennen es g, zum Rand von γ gehören, weil es sonst nur dieses eine Γ_n geben könnte (Seite 309). Wir betrachten nun alle die G^*_{n-1}, die sowohl zum Rand von γ als zum Rand eines anderen von γ verschiedenen Γ_n gehören[1]) und behaupten von der Menge dieser G^*_{n-1}, daß sie die Bedingung von Satz 2 erfüllen.

1. Wir beweisen zuerst, daß ein G^*_{n-2} des Randes eines dieser G^*_{n-1} nicht nur dem Rand dieses einen G^*_{n-1} angehören kann.[2])

Angenommen ein G^*_{n-2}, es heiße g, gehöre zum Rand eines einzigen G^*_{n-1}, das wir g_1 nennen. Wir zeigen, daß uns diese Annahme zu einem Widerspruch führt mit der Annahme, daß g_1 außer zum Rand von γ noch zum Rand eines von γ verschiedenen Γ_n gehört.

Wir legen durch g_1 den zugehörigen R_{n-1}; er teilt den R_n in zwei Halb-R_n, die mit r_1 und r_2 bezeichnet seien. Wir nehmen nun in g_1 zwei beliebige Punkte A und B her und ziehen von A in den Halb-R_n r_1, von B nach r_2 einen Halbstrahl und fixieren auf diesen zwei Halbstrahlen je die Punkte A_1 resp. B_1 so, daß die beiden Strecken AA_1 und BB_1 keinen Punkt eines G^* enthalten. Zeigen wir nun, daß sich A_1 und B_1 durch einen Streckenzug verbinden lassen, der keinen Punkt eines G^* enthält, so ist damit gezeigt, daß g_1 nur zum Rand eines einzigen Γ_n gehören kann und der Widerspruch ist dargetan.

Wir nehmen einen beliebigen Punkt P von $\bar{g}$, verbinden ihn durch einen ganz in g_1 verlaufenden Streckenzug mit A und mit B. Wir haben schon öfters gezeigt, wie man nun A_1 sowohl wie B_1 mit P je durch einen Streckenzug verbinden kann, der keinen Punkt eines G^* oder seiner Berandung (außer P) enthält. Die letzten Strecken dieser beiden Streckenzüge seien KP und LP. Wir legen in dem zu g_1 zugehörigen R_{n-1} eine Strecke PR von P aus so, daß PR (außer P) keinen Punkt eines G^* oder seiner Berandung enthält, was sicher möglich ist, da nach Voraussetzung $\bar{g}$ nur auf einer Seite an ein G^*_{n-1} grenzt. Auf PR läßt sich dann in der oft schon angewendeten Weise der Punkt M so finden, daß die Strecken LM und MK keinen Punkt eines G^* oder dessen Berandung enthalten. Der Streckenzug $A_1 \ldots KML \ldots B_1$ ist dann der Gewünschte.

2. Nun wird gezeigt, daß jedes G^*_{n-2}, das zum Rand eines G^*_{n-1} gehört, zum Rand einer geraden Anzahl von G^*_{n-1} gehören muß.

---

[1]) Wir sehen zufolge der Behauptungen Seite 309 und 310 leicht ein, daß es ein solches G^*_{n-1} geben muß.

[2]) Es sei wieder daran erinnert, daß wenn das G^*_{n-2} von beiden Seiten an dasselbe G^*_{n-1} grenzt, wir dieses G^*_{n-1} wie zwei verschiedene zählen.

Digitized by Google

Wir nehmen ein G_{n-2}, es heiße g^0, und gehöre zum Rand einer ungeraden Anzahl von $\overline{G}^*_{n-1}$, die wir alle zusammen mit $(\overline{G}^*_{n-1})$ bezeichnen; wir zeigen, daß uns diese Annahme auf einen Widerspruch führt. Sei nun P ein Punkt von g^0, P_1 ein Punkt, der weder in dem R_{n-2} von g^0, noch in einem der $(\overline{G}^*_{n-1})$ liegt. Wir verbinden P_1 mit dem zu g^0 gehörigen R_{n-2} durch einen R_{n-1} und wählen außerhalb dieses R_{n-1} einen Punkt P_2, der nicht in einem $(\overline{G}^*_{n-1})$ liegt. Durch P, P_1 und P_2 legen wir den R_2, der nun mit g^0 nur den Punkt P, mit den $(\overline{G}^*_{n-1})$ je einen G^*_1 gemein hat, dessen ein Randpunkt P ist. Nun legen wir in dem R_2 ein Dreieck derart, daß P in seinem Innern liegt und so, daß die von P ausgehenden G^*_1, nämlich die Schnittgebilde des R_2 mit den $(\overline{G}^*_{n-1})$, den Umfang des Dreiecks in je einem Punkt treffen. Gehen wir nun von einem Eckpunkt des Dreiecks aus längs des Umfangs des Dreiecks bis zu dem Eckpunkt zurück, so durchlaufen wir dabei alle die Schnittpunkte dieser G^*_1 mit dem Dreieck, die wir der Reihe nach $S_1, \ldots, S_{2m+1}$ nennen; die zugehörigen G^*_1 heißen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2m+1}$.

Wir haben diese $(\overline{G}^*_{n-1})$ so aus allen G^*_{n-1} ausgewählt, daß jedes von ihnen auf einer Seite an γ grenzt, auf der anderen Seite an ein von γ verschiedenes Γ_n, wir sagen an non γ. Es grenzt also eines dieser G^*_1, die in unserem R_2 von P ausgehen, auch auf der einen Seite an γ, auf der anderen Seite an non γ.

Legen wir nun von einem Punkt A_1 auf γ_1 einen Streckenzug σ nach einem Punkt A_2 von γ_2, so daß σ keinen Punkt eines G^* enthält und ganz im Innern des Winkels $\gamma_1\gamma_2$ verläuft, und setzen wir z. B. voraus, daß das Innere des Winkels $\gamma_1\gamma_2$ zu γ gehört, so muß der von A_2 nach dem Punkt A_3 auf γ_2 fortgesetzte Streckenzug σ, wenn er ganz im Innern des Winkels $\gamma_2\gamma_3$ bleibt und keinen Punkt eines G^* enthält, bei A_2 das Gebiet γ verlassen und in das Gebiet non γ gelangen. Setzen wir diesen Streckenzug von A_3 nach A_4 auf γ_4 usw. bis A_{2m} auf γ_{2m} immer so fort, daß er stets zwischen den Punkten A_i und A_{i+1} ganz im Innern des Winkels $\gamma_i\gamma_{i+1}$ bleibt und keinen Punkt von G^* enthält, so muß σ bei A_{2m} γ verlassen und das Gebiet non γ betreten. Bei A_{2m+1} verläßt nun σ wieder das Gebiet non γ und betritt das Gebiet γ, das es, wenn unsere Annahme, daß g^0 einer ungeraden Anzahl von $\overline{G}^*_{n-1}$ als Rand angehört, richtig wäre, bei A_1 wieder verlassen müßte. Wir haben aber angenommen, daß das Innere des Winkels $\gamma_1\gamma_2$ dem Gebiete γ angehört. Es ergibt sich also aus unserer Annahme ein Widerspruch. Es kann also g^0 nur zu einer geraden Anzahl von $\overline{G}^*_{n-1}$ als Randgebilde gehören, wie behauptet.

3. Satz. Damit der R_n durch die gegebenen $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ genau in zwei Teile zerlegt werde, ist notwendig und hinreichend, daß sich aus den diesen G zugeordneten Gebieten $G^*_0, G^*_1, \ldots, G^*_{n-1}$ ein einziges Teilsystem G^*_{n-1} herausgreifen läßt, das die Eigen-

Digitized by Google

schaft hat, daß jeder Punkt eines G^*_{n-2}, das zum Rand eines dieser G^*_{n-1} gehört, dem Rand einer geraden Anzahl von G^*_{n-1} dieses Teilsystems angehört.

Das Teilsystem des G^*_{n-1} bezeichnen wir wieder mit $\overline{G}^*_{n-1}$.

I. Die Bedingung ist notwendig. Wir nehmen also an, der R_n sei durch unsere $G_0, \ldots, G_{n-1}$ in zwei Gebiete, γ und γ', zerlegt und zeigen, daß dann die obige Bedingung erfüllt ist.

Wir nehmen nun das Gebiet γ her und wissen aus dem Beweise von Satz 2: alle die G^*_{n-1}, die auf einer Seite an γ und auf der anderen Seite an γ' grenzen, bilden ein System $\overline{G}$ von der in Satz 3 genannten Eigenschaft. Angenommen es gebe nun noch ein zweites solches System, das wir $\overline{\overline{G}}$ nennen. Durch das System $\overline{\overline{G}}$ wird der R_n nach Satz 2 in mindestens zwei Teile, γ'' und γ''', zerlegt. Es muß γ ganz in einem der zwei Teile, in die $\overline{G}$ den R_n zerlegt, etwa in γ'', und γ' ebenso ganz in γ''' enthalten sein, denn irgend zwei Punkte von γ können durch einen Streckenzug verbunden werden, der keines der G und mithin auch keines der $\overline{\overline{G}}$ trifft. γ'' und γ''' können außer den Punkten von γ und γ' nur Punkte eines (nicht zu $\overline{G}$ gehörigen) G^* enthalten.

Wir behaupten 1. Jedes in $\overline{G}$ vorkommende G^*_{n-1} steht auch in $\overline{\overline{G}}$. Die Behauptung erhellt sofort aus der Tatsache, daß man von einem Punkte eines in $\overline{G}$ stehenden G^*_{n-1} sowohl nach γ als nach γ', also auch nach γ'' und γ''' eine Strecke legen kann, die keinen Punkt eines G^* enthält.

2. wird gezeigt: Jedes in $\overline{\overline{G}}$ stehende G^*_{n-1} kommt auch in $\overline{G}$ vor.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ist dargetan, wenn wir auch von jedem Punkt von $\overline{\overline{G}}$ eine Strecke in das Innere von γ resp. γ' legen können. Dies haben wir aber dargetan, wenn wir von dem Punkt von $\overline{\overline{G}}$ aus ins Innere von γ'' resp. γ''' eine Strecke gelegt haben, die keinen Punkt eines G^* enthält.

II. Die Bedingung ist hinreichend. Wir nehmen an, es gebe nur ein einziges Teilsystem $\overline{G}^*_{n-1}$ mit der bekannten Eigenschaft und daraus wird deduziert, daß dann der R_n durch unsere $G_0, \ldots, G_{n-1}$ tatsächlich genau in zwei Teile zerlegt wird.

Wir können, wie der Beweis von Satz 2 zeigt, zu jedem Gebiet $\gamma^{(i)}$, in das der R_n durch unsere G zerlegt wird, ein Teilsystem $\overline{G}^*_{n-1}$ bilden, das die Eigenschaft hat, daß jedes der dem Teilsystem angehörigen G^*_{n-1} an $\gamma^{(i)}$ und noch irgend ein anderes der Gebiete γ grenzt. Diese Teilsysteme $\overline{G}^*_{n-1}$ müssen alle identisch

Digitized by Google

sein, da wir ja angenommen haben, daß es nur ein derartiges Teilsystem $\overline{G}^*_{n-1}$ gibt. Dieses eine Teilsystem $\overline{G}^*_{n-1}$ grenzt aber nun an alle Gebiete, in die der R_n durch die G zerlegt wird, das können also nur zwei sein, da ein G^*_{n-1}, also auch die $\overline{G}^*_{n-1}$, nur an zwei Gebiete grenzen kann.

Es sei ein System von $G_0, \ldots, G_{n-1}$ derart, daß jeder Randpunkt eines der G einem anderen der G angehört, gegeben. Das zugehörige System der $G^*_0, \ldots, G^*_{n-1}$ habe die folgenden Eigenschaften:

1. Jedes G^*_i $(i < n-1)$ gehört zum Rande mindestens eines G^*_{n-1}.

2. Jedes G^*_{n-2} gehört zum Rande einer geraden Anzahl von G^*_{n-1}.[1])

3. Es gibt unter den G^* kein Teilsystem, in dem neben jedem darin vorkommenden G^* auch alle Randmannigfaltigkeiten dieses G^* stehen und das die Eigenschaften 1 und 2 hat.

Ein solches System von G mitsamt ihrer Berandung heißt ein n-dimensionales Polyeder.

Sei im R_n ein System von $G_0, \ldots, G_{n-1}$ gegeben derart, daß jeder Randpunkt eines der G einem anderen der G angehört. Wir bilden die zugehörigen $G^*_0, \ldots, G^*_{n-1}$. Diese G^* mögen folgende Eigenschaften haben:

1. Jedes G^*_i $(i < n-1)$ gehört zum Rande mindestens eines G^*_{n-1}.

2. Jedes G^*_{n-2} gehört zum Rande einer geraden Anzahl von G^*_{n-1}.

3. Je zwei G^*_{n-1} lassen sich durch eine Reihe von G^*_{n-1} so verbinden, daß je zwei in der Reihe benachbarte G^*_{n-1} ein G^*_{n-2} gemeinsam als Rand haben, das nur diesen beiden G^*_{n-1} als Rand angehört.

Wir behaupten: das System der $G_0, \ldots G_{n-1}$ bildet ein n-dimensionales Polyeder.

Beweis. Die beiden ersten Forderungen der Definition für ein n-dimensionales Polyeder sind erfüllt. Wir haben noch darzutun, daß man aus diesem System der $G^*_0, \ldots, G^*_{n-1}$ auch nicht ein G^* weglassen kann, ohne daß die Eigenschaften 1 und 2 (siehe oben) zu bestehen aufhören, und zwar:

[1]) Beachte die Seite 310 eingeführte Terminologie.

Digitized by Google

a) Ein G^*_{n-1} kann ich aus folgendem Grunde nicht fortlassen: ich verbinde dieses weggelassene G^*_{n-1} mit einem anderen nicht weggelassenen G^*_{n-1} durch die in 3 erwähnte Reihe der G^*_{n-1}. Darunter muß es ein erstes G^*_{n-1} geben, das nicht weggelassen wird. Nach Eigenschaft 3 hat es mit dem in der genannten Reihe ihm unmittelbar vorangehenden, also weggelassenen G^*_{n-1} ein G^*_{n-2} gemein, das nur zum Rand dieser beiden G^*_{n-1} gehört. Wenn nun aber das eine dieser G^*_{n-1} abgespalten ist, so gehört dieses G^*_{n-2} nur einem G^*_{n-1} als Rand an.

b) Ein G^*_j ($j < n-1$) kann ebenfalls nicht weggelassen werden, denn spalte ich ein G^*_j ab, so muß ich wegen Eigenschaft 1 auch jedes G^*_{n-1} weglassen, dessen Rand es angehört, was, wie bereits gezeigt, nicht möglich ist.

Digitized by Google

Einige geometrische Studien.

Von **Leopold Theisinger** in Stockerau.

Diese Abhandlung besteht aus zwei kleineren Untersuchungen, von denen die erste über eine Relation handelt, welche zwischen den Krümmungen einer beliebigen Raumkurve und der Krümmung der Schnittkurve der zu dieser Raumkurve gehörigen Tangentialfläche mit einer Ebene besteht; in der zweiten Untersuchung wird die allgemeine Form der Parameterdarstellungen derjenigen ebenen Kurvenpaare K und K_1 aufgestellt, deren in Punkten gleicher Abszissen errichtete Normalen sich im zugehörigen Krümmungsmittelpunkt der einen dieser Kurven schneiden. Sodann wird noch die Beziehung einer aus K und K_1 abgeleiteten Kurve zu den beiden Letzteren des Näheren untersucht.

Es sei s die von einem festen Punkte einer Raumkurve K aus gemessene Bogenlänge. Die Gesamtheit der Tangenten dieser Kurve bildet eine abwickelbare Fläche, welche die zu K gehörige Tangentialfläche genannt wird. Irgend eine beliebige Ebene schneidet aus dieser Fläche eine Kurve K_1 heraus, deren Punkte denen von K in der Weise zugeordnet werden sollen, daß einander entsprechende Punkte immer auf einer Tangente der Kurve K liegen. Wird diese Schnittebene als XY-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems angenommen, so sei die Kurve K durch die folgenden Parameterdarstellungen definiert

$$x = f(s),\ y = h(s),\ z = g(s), \tag{1}$$

in denen f, h und g innerhalb eines bestimmten Intervalls als stetige und differentierbare Funktionen vorausgesetzt werden. Für die im Punkte M von K errichtete Tangente t bestehen die Gleichungen

$$X - x : Y - y : Z - z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \tag{2}$$

wo X, Y und Z die laufenden Koordinaten und α, β, γ die Richtungswinkel von t bedeuten. Hieraus ergeben sich für die Kurve K_1 die nachstehenden Parameterdarstellungen:

$$X = x - \frac{z \cdot \cos\alpha}{\cos\gamma},\quad Y = y - \frac{z \cdot \cos\beta}{\cos\gamma}. \tag{3}$$

Digitized by Google

Eine Differentiation nach s liefert mit Benützung der Frenetschen Formeln die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{ds} &= -z\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\right) = \\ &= \frac{-z}{\cos^2\gamma}\left(\cos\gamma\cdot\frac{\cos\xi}{\rho} - \cos\alpha\cdot\frac{\cos\zeta}{\rho}\right) = -\frac{z}{\rho}\cdot\frac{\cos\mu}{\cos^2\gamma},\\ \frac{dY}{ds} &= -z\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right) = \\ &= \frac{-z}{\cos^2\gamma}\left(\cos\gamma\cdot\frac{\cos\eta}{\rho} - \cos\beta\cdot\frac{\cos\zeta}{\rho}\right) = \frac{z}{\rho}\cdot\frac{\cos\lambda}{\cos^2\gamma},\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

in denen ρ den Krümmungsradius und ξ, η, ζ bezw. λ, μ, ν die Richtungswinkel der Hauptnormale bezw. Binormale von K im Punkte M bedeuten. Aus denselben ergeben sich für den Winkel Φ, den die in dem zu M gehörigen Punkte M_1 der Kurve K_1 gezogene Tangente mit der Abszissenachse bildet und für das Bogendifferential von K_1 die Formeln:

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{ds} : \frac{dX}{ds} = -\frac{\cos\lambda}{\cos\mu} \quad (5)$$

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2}\,ds = \frac{z\cdot\sin\nu}{\rho\cos^2\gamma}\,ds. \quad (6)$$

Eine Differentiation von (5) liefert

$$\frac{d\operatorname{tang}\Phi}{ds} = \frac{d\operatorname{tang}\Phi}{d\Phi}\cdot\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{\cos^2\Phi}\cdot\frac{d\Phi}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds} =$$

$$= -\left\{\cos\mu\cdot\frac{\cos\xi}{T} - \cos\lambda\cdot\frac{\cos\eta}{T}\right\} : \cos^2\mu = \frac{-\cos\gamma}{T\cdot\cos^2\mu},$$

wobei T den Torsionsradius der Kurve K im Punkte M bedeutet. Daraus findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (5) und (6) für den Krümmungsradius der Kurve K_1 in M_1 die Formel:

$$R = \frac{d\sigma}{d\Phi} = -\frac{z\cdot T}{\rho}\left(\frac{\sin\nu}{\cos\gamma}\right)^3. \quad (7)$$

Bezeichnet nun φ den Winkel, den die in korrespondierenden Punkten der Kurven K und K_1 gezogenen Tangenten einschließen, so ist

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\Phi + \cos\beta\sin\Phi =$$

$$= \frac{1}{\sin\nu}(\cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda) = -\frac{\cos\zeta}{\sin\nu}$$

Digitized by Google

und mithin

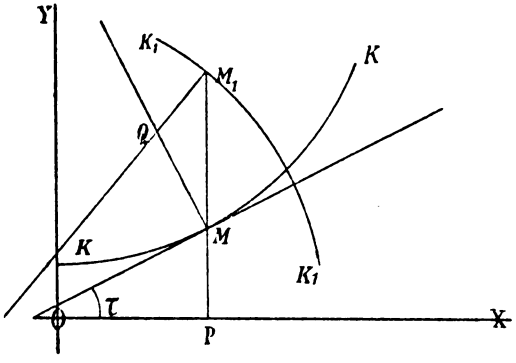
$$\sin^2\varphi = \frac{\sin^2\nu - \cos^2\zeta}{\sin^2\nu} = \frac{1-(\cos^2\nu+\cos^2\zeta)}{\sin^2\nu} = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\nu}.$$

Demnach folgt also aus (7) die angekündigte Relation

$$R\,\rho\sin^3\varphi = -\,z\,T, \tag{8}$$

welche besagt: Wird aus der zu einer beliebigen Raumkurve K gehörigen Tangentialfläche mittels einer Ebene eine Kurve K_1 herausgeschnitten, so ist der absolute Wert des Produktes aus den Maßzahlen der Krümmungsradien von K und K_1 in den entsprechenden Punkten M, M_1 und der dritten Potenz aus dem Sinus des Neigungswinkels der in diesen Punkten gezogenen Tangenten gleich dem Produkte aus dem Torsionsradius der Kurve K in M und dem Abstande dieses Punktes von der Schnittebene.

Man denke sich nun einen Kreiskegel, der einen beliebigen Punkt der zu K gehörigen Tangentialfläche als Scheitel und die durch diesen Punkt gehende Tangente der Kurve K zur Achse hat. Jede Tangentialebene dieses Kegels schneidet aus der genannten Fläche eine durch die Kegelspitze laufende Kurve heraus. Da der zu dieser Kegelspitze gehörige Punkt der Kurve K von jeder der Tangentialebenen des Kegels denselben Abstand hat und die in der Formel (8) vorkommenden Größen ρ und T für jede der genannten Schnittkurven als konstant anzusehen sind, so ergibt sich also der Satz: Die Tangentialebenen eines Kreiskegels, der einen beliebigen Punkt einer abwickelbaren Fläche als Scheitel und die durch diesen Punkt gehende Erzeugende der Fläche zur Achse hat, schneiden aus dieser Letzteren Kurven heraus, für deren jede im erwähnten Punkte das Produkt aus Krümmungsradius und der dritten Potenz des Sinus des Neigungswinkels ihrer Tangente gegen die Kegelachse den nämlichen Wert hat.



Es seien in der nebenstehenden Figur durch K und K_1 zwei ebene Kurven angedeutet, die zueinander in der zu Beginn dieser Abhandlung beschriebenen Beziehung stehen sollen. Es sei ferner $OP = x$ die gemeinschaftliche Abszisse entsprechender Punkte M, M_1 und $PM = y$, $PM_1 = z$ die zugehörigen Ordinaten der Kurven K und K_1. Für die in diesen Punkten errichteten Kurvennormalen bestehen die Gleichungen

Digitized by Google

$$\eta - y = \frac{-1}{y'}(\xi - x),\ \eta - z = \frac{-1}{z'}(\xi - x), \tag{1}$$

in denen ξ, η die laufenden Koordinaten dieser Normalen und y', z' die nach x genommenen Differentialquotienten der Funktionen y und z bedeuten. Für die Koordinaten des Schnittpunktes Q derselben ergeben sich hieraus die Formeln:

$$\xi = x - \frac{(z-y)\,z'\,y'}{z'-y'},\quad \eta = y + \frac{(z-y)\,z'}{z'-y'} \tag{2}$$

Anderseits gelten für die Koordinaten des zu M gehörigen Krümmungsmittelpunktes der Kurve K die bekannten Gleichungen

$$\xi_1 = x - \frac{1+y'^2}{y''}\cdot y',\ \eta_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''}\cdot \tag{3}$$

Da aber der Voraussetzung zufolge dieser Krümmungsmittelpunkt mit dem durch Q bezeichneten Punkt zusammenfallen soll, so muß also

$$\xi_1 = \xi,\ \eta_1 = \eta$$

sein, demzufolge aus (2) und (3) nachstehende Differentialgleichung hervorgeht:

$$\frac{z-y}{z'-y'}\cdot z' = \frac{1+y'^2}{y''}\cdot \tag{4}$$

Bezeichnet man mit $R(\tau)$ den Krümmungsradius der Kurve K im Punkte M und mit τ den Neigungswinkel der in M gezogenen Tangente gegen die Abszissenachse, so ist:

$$x = \int R(\tau)\cos\tau\, d\tau,\quad y = \int R(\tau)\sin\tau\, d\tau. \tag{5}$$

Fernerhin soll gesetzt werden

$$z = \int R(\tau)\,\Phi(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

wo $\Phi(\tau)$ eine noch unbestimmte Funktion bedeutet. Durch Substitution dieser Ausdrücke in (4) gelangt man zur Gleichung

$$\int R(\tau)\,\Phi(\tau)\left\{1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)}\right\} d\tau = R(\tau)\cos\tau\left\{1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)}\right\},$$

durch deren Differentiation nach τ sich ergibt:

$$R(\tau)\,\Phi(\tau)\left\{1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)}\right\} = \left\{R'(\tau)\cos\tau - R(\tau)\sin\tau\right\}\left\{1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)}\right\} +$$
$$+ R(\tau)\cos\tau\,\frac{d}{d\tau}\left\{1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)}\right\}.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung geht, wenn $1 - \frac{\sin\tau}{\Phi(\tau)} = \Psi(\tau)$ gesetzt wird, über in

$$\frac{R'(\tau)}{R(\tau)} = \frac{\operatorname{tang}\tau}{1-\Psi(\tau)} + \operatorname{tang}\tau - \frac{\Psi'(\tau)}{\Psi(\tau)},$$

woraus folgt

$$R(\tau) = \frac{a}{\Psi(\tau)\cos\tau} \cdot e^{\int \frac{\operatorname{tang}\tau\, d\tau}{1-\Psi(\tau)}}.$$

Diese Formel verwandelt sich durch die Substitution

$$\frac{\operatorname{tang}\tau}{1-\Psi(\tau)} = \frac{u'(\tau)}{u(\tau)}, \quad \text{also } \Psi(\tau) = \frac{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau}{u'(\tau)\cos\tau}$$

in

$$R(\tau) = a\,.\,u(\tau)\,u'(\tau) : u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin(\tau),$$

was in (5) und (6) eingesetzt, zu den verlangten Parameterdarstellungen der Kurven K und K_1 führt:

$$\begin{aligned} x &= a\int \frac{u(\tau)\,u'(\tau)\cos\tau\,d\tau}{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau}, \quad y = a\int \frac{u(\tau)\,u'(\tau)\sin\tau\,d\tau}{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau} \\ x &= a\int \frac{u(\tau)\,u'(\tau)\cos\tau\,d\tau}{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau}, \quad z = a\int \frac{u'(\tau)^2\cos\tau\,d\tau}{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau}. \end{aligned} \tag{7}$$

In denselben ist $u(\tau)$ eine willkürliche Funktion von τ, der, wie sich gleich zeigen wird, eine einfache geometrische Bedeutung zukommt und durch deren Wahl das Kurvenpaar K, K_1 bestimmt ist. Wird beispielsweise $u(\tau) = \operatorname{tang}\tau$ angenommen, so findet man nach Eliminierung des Parameters τ für K und K_1 die Gleichungen:

$$y = \pm\frac{a}{3}\left(\sqrt{\frac{2x}{a}-1}\right)^3, \quad z = \pm\frac{2}{3}(x+a)\sqrt{\frac{2x}{a}-1}.$$

Aus den Gleichungen (7) erhält man für den Richtungskoeffizienten der im Punkte M_1 der Kurve K_1 gezogenen Tangente und das Bogendifferential derselben die Formeln:

$$\operatorname{tang}\tau_1 = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\tau} : \frac{dx}{d\tau} = \frac{u'(\tau)}{u(\tau)} \tag{8}$$

$$d\sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\,d\tau = \frac{a\,u'(\tau)\sqrt{u(\tau)^2 + u'(\tau)^2}\cos\tau\,d\tau}{u'(\tau)\cos\tau - u(\tau)\sin\tau}. \tag{9}$$

Digitized by Google

Aus der ersten derselben folgt

$$\frac{1}{\cos^2\tau_1}\frac{d\tau_1}{d\tau}=\frac{u(\tau)\,u''(\tau)-u'(\tau)^2}{u(\tau)^2}$$

und daher:

$$\frac{d\tau_1}{d\tau}=\frac{u(\tau)\,u''(\tau)-u'(\tau)^2}{u(\tau)^2+u'(\tau)^2}.$$

Mithin ergibt sich für den Krümmungsradius der Kurve K_1 die Formel:

$$R_1=\frac{d\sigma_1}{d\tau_1}=\frac{d\sigma_1}{d\tau}:\frac{d\tau_1}{d\tau}=\frac{a\,(u(\tau)^2+u'(\tau)^2)\,u'(\tau)\cos\tau}{\{u(\tau)\,u''(\tau)-u'(\tau)^2\}\{u'(\tau)\cos\tau-u(\tau)\sin\tau\}}. \quad (10)$$

Aus dem Kurvenpaar K, K_1 soll nun in der Weise eine neue Kurve K_2 abgeleitet werden, daß durch den Koordinatenursprung O eine Parallele zu der im Punkte M der Kurve K errichteten Tangente gezogen und darauf von O aus die jeweilige Entfernung der korrespondierenden Punkte M, M_1 aufgetragen wird. Für diese Entfernung findet man aus (7) die Formel

$$MM_1=z-y=a\,.\,u(\tau),$$

durch welche die früher erwähnte einfache Bedeutung der Funktion $u(\tau)$ zum Ausdruck gelangt und derzufolge die Polargleichung der soeben definierten Kurve ist:

$$\Re=a\,.\,u(\tau). \quad (11)$$

Wird in dem den Punkten M, M_1 entsprechenden Punkte M_2 von K_2 eine Tangente gelegt, so schließt dieselbe mit dem Radiusvektor OM_2 einen Winkel ein, der bestimmt ist durch:

$$\operatorname{tang}\varphi=\Re:\frac{d\Re}{d\tau}=\frac{u(\tau)}{u'(\tau)}. \quad (12)$$

Durch Vergleichung dieser und der Formel (8) folgt $\varphi=\tau_1$, d. h. also: Die Tangente der Kurve K_2 im Punkte M_2 schließt mit dem Radiusvektor OM_2 einen Winkel ein, der gleich ist dem Neigungswinkel der im entsprechenden Punkte der Kurve K_1 gezogenen Tangente gegen die X-Achse. Für den Krümmungsradius von K_2 in M_2 hat man:

$$R_2=a\left[u(\tau)^2+u'(\tau)^2\right]^{\frac{3}{2}}:\left[u(\tau)^2+2\,u'(\tau)^2-u(\tau)\,u''(\tau)\right].$$

Durch Kombination dieser und der folgenden Formel

$$R\cos\tau:R_1=u(\tau)\left[u(\tau)\,u''(\tau)-u'(\tau)^2\right]:\left[u(\tau)^2+u'(\tau)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

Digitized by Google

erhält man

$$\frac{R\cos\tau}{R_1} = \frac{u(\tau)}{\sqrt{u(\tau)^2 + u'(\tau)^2}} - \frac{a\,u(\tau)}{R_2} = \cos\tau_1 - \frac{\mathfrak{R}}{R_2}$$

und hieraus die Relation:

$$R_2\,\{R_1\cos\tau_1 - R\cos\tau\} = \mathfrak{R}\,.\,R_1,$$

welche den folgenden Satz ausdrückt: Das Rechteck gebildet aus dem Krümmungsradius der Kurve K_2 und der Differenz der Projektionen der Krümmungsradien der Kurven K und K_1 in entsprechenden Punkten auf die Ordinatenachse ist flächengleich dem Rechtecke aus dem Radiusvektor der Kurve K_2 und dem Krümmungsradius von K_1.

Digitized by Google

Über die Verallgemeinerungen der von A. v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen.

Von **Niels Nielsen** in Kopenhagen.

Ist a_0 eine von Null verschiedene, sonst aber willkürliche komplexe Zahl, ist weiter

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots \tag{1}$$

eine ganz beliebige Zahlenfolge, und wird für jedes n

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!} \tag{2}$$

gesetzt, so ist $f_n(x)$ ein ganzes Polynom n^{ten} Grades in x, und von $n = 1$ an gelten die Funktionalgleichungen

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x). \tag{3}$$

Verfügt man noch über die Elemente der Zahlenfolge (1), so daß $f_n(x)$ für jedes n der weiteren Funktionalgleichung

$$(-1)^n f_n(x) = f_n(-x-1) \tag{4}$$

Genüge leistet, so habe ich in einer früheren Mitteilung [1]) bewiesen, daß die Elemente a_s der Zahlenfolge (1) die beiden verkürzten Rekursionsformeln

$$\sum_{s=0}^{s=\omega} (-1)^s (m+n-q-s)! \left[(-1)^n \binom{n}{s} + (-1)^m \binom{m-q}{s}\right] a_{m+n-s+1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=q} \frac{(-1)^s (n+q-s)!\,(m-q)!}{(q-s)!\,(m+n-s+1)!}\, a_s, \tag{5}$$

$$\sum_{s=0}^{s=\omega} (-1)^s (m+n+q-s)! \left[(-1)^n \binom{n}{s} - (-1)^m \binom{m+q}{s}\right] a_{m+n-s} = 0 \tag{6}$$

befriedigen. Hier bezeichnet q eine ganze, nicht negative Zahl, und die Summationen linker Hand sind so weit auszudehnen, bis

[1]) Monatshefte, Bd. XXV, p. 152—164; 1914.

Digitized by Google

die im summatorischen Gliede vorkommenden Binomialkoeffizienten beide verschwinden.

Dies Resultat ist in der Tat höchst merkwürdig; denn bezeichnen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \\ \beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n \ldots\end{array}\right\} \tag{7}$$

zwei solche unendliche Zahlenfolgen, daß von $n = 1$ an die Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \alpha_s B_{n-s}}{(2n-2s)!} = (-1)^{n-1} \beta_n \tag{8}$$

gelten, so habe ich neuerdings [1]) bewiesen, daß, wenn in (2)

$$a_0 = 2\alpha_0,\ a_{2n} = 2(\alpha_n + \beta_n),\ a_{2n+1} = \alpha_n \tag{9}$$

gesetzt wird, so genügen die Polynome $f_n(x)$ für jedes n der Funktionalgleichung (4), und weiter gelten für die Tangentenkoeffizienten die entsprechende Rekursionsformel

$$\frac{\alpha_0 T_n}{(2n+1)!\, 2^{2n+1}} + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s (\alpha_s + \beta_s) T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{2n-2s+1}} = \frac{(-1)^n \alpha_n}{2}, \tag{10}$$

während wir noch den folgenden Satz bewiesen haben:

I. Aus der Rekursionsformel (8) folgt, daß die in (9) definierten Zahlen a_m den beiden verkürzten Rekursionsformeln (5) und (6) Genüge leisten.

Werden aber die beiden Zahlenfolgen (7) so gewählt, daß von $n = 0$ an die Rekursionsformeln für die Tangentenkoeffizienten

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s \alpha_s T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\, 2^{m-2s+1}} = (-1)^n \beta_n \tag{11}$$

gelten, und wird in (2)

$$a_{2n} = \alpha_n,\ a_{2n+1} = \beta_n \tag{12}$$

gesetzt, so genügen die Polynome $f_n(x)$ für jedes n der Funktionalgleichung (4); weiter gelten für die Bernoullischen Zahlen die entsprechende Rekursionsformel

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \beta_s B_{n-s}}{(2n-2s)!} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\alpha_n - \beta_n\right), \tag{13}$$

und endlich haben wir noch den Satz bewiesen:

[1]) Berichte der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 65, p. 3—7; 1913.

Digitized by Google

II. Aus der Rekursionsformel (11) folgt, daß die in (12) definierten Zahlen a_m den beiden verkürzten Rekursionsformeln (5) und (6) Genüge leisten.

Um interessante Anwendungen dieser beiden Sätze zu geben, betrachten wir erstens die Potenzreihe

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} a_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}, \tag{14}$$

wo α eine von Null verschiedene, sonst aber ganz beliebige komplexe Zahl bezeichnet, und wo linker Hand der Hauptwert der Potenz zu wählen ist; man hat daher

$$a_0(\alpha) = 1, \tag{15}$$

und der Konvergenzradius der Potenzreihe kann niemals kleiner als π sein.

Wird die Potenzreihe (14) unter Zuhilfenahme der Identität

$$D_x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha}\right] = -\alpha\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

mit der folgenden

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

multipliziert, so entfließen die von $n = 1$ an giltigen Rekursionsformeln

$$\frac{(-1)^{n-1} a_n(\alpha)}{(2n-1)!} = \alpha \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s a_s(\alpha) B_{n-s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} \tag{16}$$

oder, nach einer einfachen Reduktion

$$2n\, a_n(\alpha) = \alpha \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s-1} \binom{2n}{2s} B_s a_{n-s}(\alpha). \tag{17}$$

Man findet daher die entsprechende Rekursionsformel

$$(-1)^n \alpha (2n+1)\, a_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{2n+1}{2s} \frac{\alpha + 2s}{2^{2n-2s}} T_{n-s+1} a_s(\alpha) \tag{18}$$

und weiter gilt der Satz:

III. Die Elemente

$$a_{2n} = \frac{2(\alpha + 2n)}{(2n)!} a_n(\alpha), \quad a_{2n+1} = \frac{\alpha\, a_n(\alpha)}{(2n)!} \tag{19}$$

genügen den verkürzten Rekursionsformeln (5) und (6).

Digitized by Google

Die Potenzreihe

$$(\cos x)^\alpha = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} b_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}, \quad b_0(\alpha) = 1 \tag{20}$$

deren Konvergenzradius niemals kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ sein kann, liefert in ähnlicher Weise wegen der Identität

$$D_x[(\cos x)^\alpha] = -\alpha (\cos x)^\alpha \operatorname{tg} x$$

und der Potenzreihe

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{T_{n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

die Rekursionsformel

$$\alpha \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s b_s(\alpha) T_{n-s+1}}{(2s)!\,(2n-2s+1)!\,2^{2n-2s+1}} = \frac{(-1)^n 2 b_{n+1}(\alpha)}{(2n+1)!} \tag{21}$$

oder, nach einer einfachen Reduktion

$$2 b_{n+1}(\alpha) = \alpha \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{2^{2s+1}} \binom{2n+1}{2s+1} T_{s+1} b_{n-s}(\alpha). \tag{22}$$

Man findet daher die entsprechende Rekursionsformel

$$\frac{\alpha(2n+1)}{4} b_n(\alpha) - b_{n+1}(\alpha) = \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^{s-1} \binom{2n+1}{2s} B_s b_{n-s+1}(\alpha) \tag{23}$$

und weiter gilt der Satz:

IV. Die Elemente

$$a_{2n} = \frac{\alpha b_n(\alpha)}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2 b_{n+1}(\alpha)}{(2n+1)!} \tag{24}$$

genügen den allgemeinen Rekursionsformeln (5) und (6).

Die beiden Polynome $a_n(\alpha)$ und $b_n(\alpha)$, für die man übrigens ohne Mühe independente Darstellungen herleitet,[1]) sind recht kompliziert; es ist aber möglich, die Zahlenwerte $a_n(p)$ und $b_n(p)$, wo p eine positive ganze Zahl bezeichnet, in relativ einfacher Form darzustellen.

Aus der Eulerschen Formel

$$2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$$

[1]) Man vergleiche meine Abhandlung in Annali di matematica (3) Bd. 19, p. 179—204; 1912.

Digitized by Google

ergibt sich in der Tat unter Anwendung der Binomialformel

$$(2\cos x)^p = 2 \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p}{2}} \varepsilon_s \binom{p}{s} \cos(p-2s)\,x, \tag{25}$$

wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, während im allgemeinen $\varepsilon_s = 1$ zu setzen ist; die einzige Ausnahme kommt dann und nur dann vor, wenn p eine gerade Zahl, etwa $p = 2q$, ist; alsdann ist $\varepsilon_q = \frac{1}{2}$ zu setzen.

Setzt man nunmehr der Kürze halber

$$A_{p,n} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p-1}{2}} \binom{p}{s} \left(\frac{p}{2} - s\right)^{2n}, \qquad A_{p,0} = 2^{p-1} \tag{26}$$

$$\mathfrak{A}_{p,n} = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{p-1}{2}} (-1)^s \binom{p}{s} \left(\frac{p}{2} - s\right)^{p+2n} \qquad \mathfrak{A}_{p,0} = \frac{p!}{2}, \tag{27}$$

so erhält man, wenn (25) $2n$-mal nach x differentiiert wird, und man demnach $x = 0$ setzt,

$$D_x^{n}\left[(\cos x)^p\right]_{x=0} = (-1)^n 2^{2n-p+1} A_{p,n}; \tag{28}$$

differentiiert man aber $(p+2n)$-mal nach x die Formel (25) und setzt man $x = \frac{1}{2}\pi$, so ergibt sich in ähnlicher Weise

$$D_x^{p+2n}\left[(\sin x)^p\right]_{x=0} = (-1)^n 2^{2n+1} \mathfrak{A}_{p,n}. \tag{29}$$

Durch Kombination dieser beiden Differentialquotienten und der Potenzreihen (14) und (20) ergibt sich daher

$$a_n(p) = \frac{(2n)!\,2}{(2n+p)!}\,\mathfrak{A}_{p,n}, \qquad b_n(p) = \frac{A_{p,n}}{2^{p-1}}, \tag{30}$$

und somit gelten für die $\mathfrak{A}_{p,n}$ die Rekursionsformeln

$$2n\,\mathfrak{A}_{p,n} = p \cdot \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s-1} \binom{p+2n}{2s} B_s\,\mathfrak{A}_{p,n-s} \tag{31}$$

$$p\,\mathfrak{A}_{p,n} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{2^n} \binom{p+2n}{2s+1} T_{s+1}\,\mathfrak{A}_{p,n-s}; \tag{32}$$

Digitized by Google

für die $A_{p,n}$ erhält man aber

$$A_{p,n+1} = p \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{2^{2s+2}} \binom{2n+1}{2s+1} T_{s+1} A_{p,n-s} \tag{33}$$

$$\frac{(2n+1)p}{4} A_{p,n} - A_{p,n+1} = \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s \binom{2n+1}{2s} B_s A_{p,n-s+1}, \tag{34}$$

und weiter gilt der Satz:

V. Die Elemente

$$a_{2n} = \frac{4\,\mathfrak{A}_{p,n}}{(p+2n-1)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{2p\,\mathfrak{A}_{p,n}}{(p+2n)!} \tag{35}$$

und

$$a_{2n} = \frac{p\,A_{p,n}}{(2n)!\,2^{p-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{A_{p,n+1}}{(3n+1)!\,2^{p-1}} \tag{36}$$

befriedigen die beiden verkürzten Rekursionsformeln (5) und (6).

Die Formel (31) ist ohne Beweis von Euler[1]) angegeben worden und, soviel ich weiß, ist diese Formel bisher ohne Beweis geblieben; man vergleiche die Bemerkungen von Scherk,[2]) Saalschütz[3]) und Haussner.[4])

Es ist übrigens sehr leicht die vier speziellen Rekursionsformeln von (31) bis (34) in ganz elementarer Weise herzuleiten.

Setzt man in der Tat

$$\left.\begin{aligned}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{\leq \frac{p}{2}} \varepsilon_\nu \binom{p}{\nu} \left[(p-\nu)\left(x+\frac{p}{2}-\nu\right)^n + \nu \left(x-\frac{p}{2}+\nu\right)^n \right] \\ ) &= \frac{1}{(n+p-1)!} \sum_{\nu=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^\nu \varepsilon_\nu \binom{p}{\nu} \left[(p-\nu)\left(x+\frac{p}{2}-\nu\right)^{n+p-1} + (-1)^p \nu \left(x-\frac{p}{2}+\nu\right)^{n+p-1} \right] \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

wo die ε_ν dieselbe Bedeutung wie in (25) haben, und bemerkt man, daß der Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{\leq \frac{p}{2}} (-1)^\nu \varepsilon_\nu (p_\nu) \left(\frac{p}{2}-\nu\right)^{p-2m} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\nu=p} (-1)^\nu (p_\nu) \left(\frac{p}{2}-\nu\right)^{p-2m},$$

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 13, p. 31—59; (1769).
[2]) Mathematische Abhandlungen, p. 7; Berlin 1825.
[3]) Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, p. 203; Berlin 1883.
[4]) Bericht der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 62, p. 417—418; 1910.

Digitized by Google

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet, als p^{te} Differenz der $(p-2m)^{\text{ten}}$ Potenz von $\frac{1}{2}p$ verschwinden muß, so leuchtet ein, daß $\varphi_n(x)$ ebenso wie $f_n(x)$ ein ganzes Polynom n^{ten} Grades sein muß.

Für die Koeffizienten a_s und b_s der beiden Darstellungen

$$f_n(x)=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{a_s\,x^{n-s}}{(n-s)!}, \qquad \varphi_n(x)=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{b_s\,x^{n-s}}{(n-s)!} \tag{38}$$

ergibt sich wegen (37)

$$\left.\begin{aligned} a_{2s}&=\frac{p}{(2s)!}\,A_{p,s}, & a_{2s+1}&=\frac{2}{(2s+1)!}A_{p,s+1}\\ b_{2s}&=\frac{2}{(p+2s-1)!}\mathfrak{A}_{p,s}, & b_{2s+1}&=\frac{p}{(p+2s)!}\mathfrak{A}_{p,s}. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Da nunmehr wegen (37)

$$f_{2n+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)=\varphi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

ist, und da sowohl $f_n(x)$ als $\varphi_n(x)$ der Funktionalgleichung (3) genügen, so existieren, der Taylorschen Reihe wegen, sowohl für $f_n(x)$ als für $\varphi_n(x)$ eine Darstellung von der Form:

$$\alpha_0\left(x+\frac{1}{2}\right)^n+\alpha_1\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\alpha_2\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-4}+\cdots,$$

d. h. sowohl $f_n(x)$ als $\varphi_n(x)$ befriedigen die weitere Funktionalgleichung (4).

Unter Zuhilfenahme eines allgemeinen Satzes[1]) erhält man daher die folgenden Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f_n(x)&=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}\frac{4\,A_{p,s+1}}{(2s+1)!}\cdot B_{n-2s}(x)\\ \varphi_n(x)&=\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}}\frac{2p\,\mathfrak{A}_{p,s}}{(p+2s)!}\cdot B_{n-2s}(x) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

[1]) Berichte der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. 65, p. 3—7; 1913.

Digitized by Google

und nach Eulerschen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{2p\,A_{p,s}}{(2s)!} \cdot E_{n-2s}(x) \\ \varphi_n(x) &= \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{4\,\mathfrak{A}_{p,s}}{(p+2s-1)!} \cdot E_{n-2s}(x). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Wird hier $x = 0$ gesetzt und in (40) $2n$ statt n, in (41) aber $2n+1$ statt n eingeführt, so entfließen die vier genannten spezielleren Rekursionsformeln ohne weiteres.

Zweitens beweisen wir den Satz:

VI. Genügt die von 0 bis 1 integrierbare Funktion $f(x)$ der Funktionalgleichung

$$f(1-x) = (-1)^{\delta} f(x),\ \delta = 0 \text{ oder } \delta = 1, \tag{42}$$

so befriedigen die Zahlenwerte

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} f(x)\,dx \tag{43}$$

die allgemeinen Rekursionsformeln (5) und (6).

Setzt man in der Tat

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 \frac{(x+t)^n}{n!} f(t)\,dt,$$

so ist auch

$$(-1)^n \varphi_n(-x-1) = \int_0^1 \frac{(x+1-t)^n}{n!} f(t)\,dt,$$

und die Substitution $t = 1-u$ führt ohne weiteres zu der Identität

$$(-1)^{n+\delta} \varphi_n(-x-1) = \varphi_n(x);$$

da die Funktionen $\varphi_n(x)$ demnach den beiden Bedingungen (3) und (4) Genüge leisten, so ist auch der Satz VI bewiesen.

Es ist sehr leicht, einfache Beispiele zum Satze VI anzugeben; wir beschränken uns auf das folgende

$$f(x) = \log \sin \pi x,\ \delta = 0;$$

Digitized by Google

die Zahlenwerte

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \log \sin \pi x \, dx = \frac{\omega_n}{n!} \tag{44}$$

befriedigen daher die genannten allgemeinen Rekursionsformeln, und in ähnlicher Weise wie vorher entfließen für die Zahlen ω_n die beiden Formeln

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n+1}{2s+1} \omega_{2s+1} B_{n-s} = (-1)^n \left(\omega_{2n+1} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_{2n} \right) \tag{45}$$

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{2^{2n-2s+1}} \binom{2n+1}{2s} \omega_{2s} T_{n-s+1} = (-1)^n \omega_{2n+1}. \tag{46}$$

Die Formel (46) stellt also ω_{2n+1} als homogene lineare Funktion der Zahlenwerte ω_{2n}, ω_{2n-2}, ω_{2n-4}, ..., ω_2, ω_0 dar, während in (45) die Umkehrung dieses Ausdruckes gegeben ist.

Digitized by Google

Die Mannheimsche Kurve von Raumkurven.

Von **Paul Ernst** in Wien.

Die Methode der Koordinatenverwandlung hat sich in der Lehre der ebenen Kurven als fruchtbares Prinzip für die Auffindung neuer Kurven und die Herstellung von Zusammenhängen zwischen ganzen Kurvenfamilien erwiesen.[1]) Eine der gebräuchlichsten Umdeutungen ist die der natürlichen Koordinaten in rechtwinklige. Sie liefert zu jeder Kurve die sogenannte[2]) Mannheimsche Kurve, den Ort des zum jeweiligen Berührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunktes, wenn die Grundkurve auf einer Geraden ohne zu gleiten rollt.

Im folgenden soll der Begriff der Mannheimschen Kurve auf Raumkurven übertragen werden.

Eine Raumkurve ist bekanntlich durch die Werte der Radien ihrer ersten und zweiten Krümmung ρ und T, ausgedrückt als Funktionen des Bogens s, ihrer Gestalt nach vollkommen bestimmt. Die Angaben

$$\rho = \varphi(s), \quad T = F(s) \tag{1}$$

bezeichnet man als natürliche Gleichung der Raumkurve K; die Aufsuchung der Gleichung von K in rechtwinkligen Koordinaten läßt sich auf die Integration einer Differentialgleichung vom Riccatischen Typus zurückführen.[3])

Als Mannheimsche Kurve M der Kurve K sei die Kurve mit den Gleichungen

$$y = \varphi(x), \quad z = F(x) \tag{2}$$

bezeichnet.

---

[1]) Vgl. z. B. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig (Göschen) 1908. (Sammlung Schubert 56) 313 ff.

[2]) Wölffing, Zeitschrift für Mathematik 44, 1899, 140; Mannheim, Journ. math. p. appl. (2) 4, 1859, 93–104.

[3]) Siehe etwa Bianchi, Vorlesung über Differenzialgeometrie (Deutsch von Lukat) 2. Aufl., Leipzig (Teubner) 1903.

Digitized by Google

Die Richtigkeit des folgenden Satzes läßt sich nunmehr unmittelbar einsehen:

Rollt eine Raumkurve K längs der x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems ohne zu gleiten so, daß die x-Achse stets mit der Kurventangente, die xy-Ebene mit der Schmiegebene zusammenfällt, so beschreibt der zum jeweiligen Berührungspunkt gehörige Krümmungsmittelpunkt die Orthogonalprojektion M' von M auf die xy-Ebene, der zum jeweiligen Berührungspunkt gehörige Torsionsmittelpunkt die Orthogonalprojektion M'' von M auf die xz-Ebene, wobei M die Mannheimsche Kurve von K bedeutet.

Das einfachste Beispiel bildet die gewöhnliche Schraubenlinie

$$\rho = \gamma, \; T = C. \tag{3}$$

Ihre Mannheimsche Kurve lautet

$$y = \gamma, \; z = C \tag{3'}$$

ist somit eine Gerade $\parallel x$.

$$\rho = as, \; T = bs \tag{4}$$

stellt die Loxodrome des Kreiskegels dar. Auch ihre Mannheimsche Kurve

$$y = ax, \; z = bx \tag{4'}$$

ist eine Gerade.

Die allgemeine Schraubenlinie (Zylinderloxodrome) ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Krümmungen in konstantem Verhältnis stehen.

$$\frac{\rho}{T} = a \tag{5}$$

ist ihre Gleichung, eine wegen

$$\frac{y}{z} = a \tag{6}$$

in einer zur yz-Ebene $\perp$ Ebene liegende, also ebene Kurve ihre Mannheimsche Kurve.

Ebene Kurven als Mannheimsche Kurven liefern auch die windschiefen Kreise, die durch konstante Flexion gekennzeichnet sind.

Digitized by Google

Unter den Linien konstanter Torsion befinden sich auch die Asymptotenlinien der Pseudosphäre.

$$\rho = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right) \quad T = a. \tag{7}$$

Ihre Mannheimsche Kurve ist eine ebene, der Kettenlinie nahe verwandte Linie

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad z = a \tag{7'}$$

und führt den Namen Gewölbelinie.[4])

Als letztes Beispiel seien noch die Asymptotenlinien des Katenoids angeführt. Ihre natürliche Gleichung ist

$$\rho = s + \frac{2a^2}{s} \quad T = a + \frac{s^2}{2a}, \tag{8}$$

woraus sich ihre Mannheimsche Kurve mit der Gleichung

$$y = x + \frac{2a^2}{x}, \quad z = a + \frac{x^2}{2a} \tag{8'}$$

oder einfacher

$$x^2 - xy + 2a^2 = 0, \quad x^2 = 2a(z - a) \tag{8''}$$

ergibt. Sie ist somit eine Raumkurve vierter Ordnung, erster Art, die den Schnitt eines hyperbolischen Zylinders $\perp xy$ mit einem parabolischen $\perp xz$ bildet. Ihre $\perp$ Projektion auf die yz-Ebene ist wie die Elimination von x zeigt

$$y^2(x - a) - 2a x^2 = 0 \tag{8*}$$

eine besondere „Tangentenkurve" der Parabel.[5])

Die Zahl der Beispiele ließe sich beliebig vermehren.[6])

---

[4]) Schlömilch, Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I. T., 3. Aufl. Leipzig 1879. S. 101.

[5]) L. Henkel, Über die aus einer Kurve $y = f(x)$ abgeleitete Kurve $y_1 = x\frac{dy}{dx} = xf'(x)$ etc. Dissert. Marburg 1882.

[6]) Bezüglich der hier angeführten Beispiele siehe: Cesàro, Natürliche Geometrie (Deutsch von Kowalewski), Leipzig (Teubner) 1901.

Digitized by Google

In gleicher Weise wie bei ebenen Kurven [7]) läßt sich auch bei Raumkurven untersuchen, welche Kurve aus der Mannheimschen entsteht, wenn die Grundkurve statt auf einer Geraden auf einer beliebigen Kurve ohne zu gleiten so rollt, daß dabei die begleitenden Dreikante der festen und beweglichen Kurven zur Deckung kommen. Doch dies bleibe einem weiteren Aufsatz vorbehalten.

[7]) L. Braude, Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve. (Diss.) Pirmaseus (Neumann) 1911.

Digitized by Google

Die stereographische Projektion eines nullteiligen Kreises.

Von **Karl Mack** in Wien.

Auf einer Ebene, die eine Kugel nicht reell schneidet, wird durch diese eine Polarität bestimmt, deren Zentrum der Fußpunkt des vom Mittelpunkt der Kugel auf die Ebene gefällten Lotes ist. Diese Polarität enthält das absolute Punktepaar der Ebene und bleibt gegenüber jeder Drehung um dieses Lot ungeändert. Sie ist identisch mit der Antipolarität [1]) bezüglich jenes konzentrischen Kreises, dessen Radius der Tangentialentfernung des Zentrums von der Kugel gleicht. [2]) Diese Polarität stellt uns geometrisch den nullteiligen Schnittkreis der Ebene mit der Kugel dar und soll im folgenden kurz als nullteiliger Kreis und der um das Zentrum beschriebene Kreis als reeller Vertreter des nullteiligen Kreises bezeichnet werden. Die stereographische Projektion dieses nullteiligen Kreises ist bekanntlich wieder ein nullteiliger Kreis, der geometrisch am einfachsten durch seinen reellen Vertreter dargestellt werden kann. Zweck dieser Arbeit ist, eine möglichst einfache Konstruktion für den reellen Vertreter der stereographischen Projektion eines nullteiligen Kreises abzuleiten.

Legt man durch den Mittelpunkt o der Kugel Φ eine Ebene Σ, die auf der gegebenen Ebene ε und auf der Projektionsebene Π senkrecht steht und deren Schnitte mit Φ und ε die Linien K bezw. E seien, so ist diese Symmetrieebene für die gegebene Polarität und auch für ihre stereographische Projektion. Ihre Spur P auf Π enthält daher den Mittelpunkt und einen Durchmesser des gesuchten reellen Vertreters. Da aber aus diesen beiden Stücken der reelle Vertreter unmittelbar gezeichnet werden kann, kann man die gestellte Aufgabe auf die folgende planimetrische zurückführen:

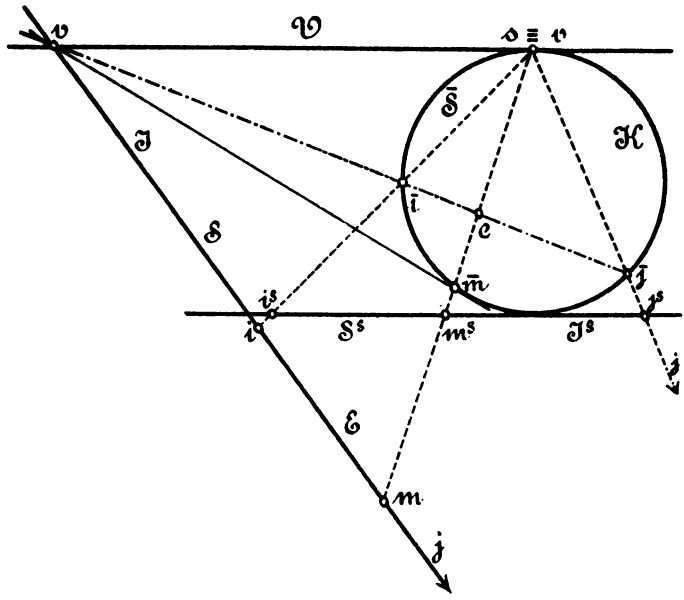
Gegeben eine Gerade E, die einen Kreis K nicht reell schneidet. Suche das La Guerresche Punktepaar, das die stereographische Projektion I^s der Involution I darstellt, die durch die konjugierten Punkte von K auf dem Träger E gebildet wird.

[1]) Polarität und darauffolgende Spiegelung am Zentrum.

[2]) Diese Antipolarität wird durch die aus dem Zentrum der Polarität beschriebene Kugel bestimmt, die die gegebene Kugel orthogonal schneidet.

Digitized by Google

Das La Guerresche Punktepaar $i^s j^s$ trennt den Mittelpunkt m^s und den unendlich fernen Punkt v^s von I^s harmonisch. In der Involution I entspricht aber dem Punkte v^s der Schnittpunkt v ihres Trägers E mit der Verschwindungslinie V, dem Punkte m^s der dem Punkte v konjugierte Punkt m. Jenes Punktepaar auf E, das bezüglich K konjugiert ist und v und m harmonisch trennt,



geht also durch Projektion aus s in das La Guerresche Punktepaar von I^s über. Zur Ermittlung seiner Konstruktion diene folgende Überlegung:

Alle Punktepaare auf E, die v und m harmonisch trennen, bilden die Paare einer Involution S mit den Doppelpunkten m und v. Die Involution S geht durch stereographische Projektion in eine symmetrische Involution S^s auf P über, deren Zentrum m^s ist. Das gemeinsame Punktepaar der Involutionen I und S ist nun das gesuchte.

Faßt man K als Steinerschen Kreis auf, auf den man aus s die Involutionen I und S projiziert, so ergeben sich für diese Projektionen $\overline{I}$ und $\overline{S}$ folgende Zentren: Der Pol e von E bezüglich K ist das Zentrum von $\overline{I}$,[1]) der Verschwindungspunkt v von E

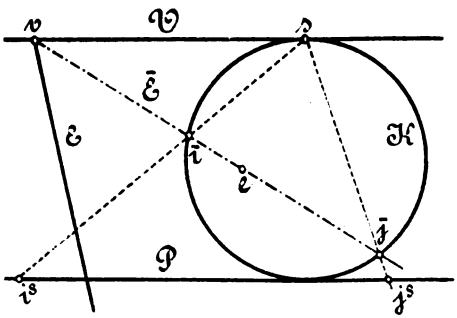
[1]) Projiziert man konjugierte Punkte $a\,b$ eines Kegelschnittes aus einem beliebigen Punkte s auf diesen, so ist die Verbindungslinie $(\bar{a}\,\bar{b})$ ihrer Projektion eine harmonische Polare zu $(a\,b)$.

Digitized by Google

das Zentrum von $\overline{S}$.[1]) Die Verbindungslinie $(v\,e)$ schneidet daher aus K das gemeinsame Punktepaar $\overline{i}\,\overline{j}$ von $\overline{K}$ und $\overline{S}$ aus.

Jene zu E harmonische Polare, die mit ihr den Verschwindungspunkt gemein hat, schneidet aus K das Punktepaar $\overline{i}\,\overline{j}$ aus, dessen stereographische Projektion das La Guerresche Punktepaar von I^s ist.

Ordnet man harmonische Polaren E, $\overline{E}$ mit gemeinsamem Verschwindungspunkt einander zu, so entspricht dem in der Geraden P die Zuordnung zweier Involutionen, von denen die eine dasselbe Punktepaar zu reellen Vertreten, das die andere zu Doppelpunkten hat. Damit kann aber mittels stereographischer Projektion die Abbildung aller Involutionen in P auf die Strahlen der Ebene rein



geometrisch untersucht werden. Elliptische Involutionen werden in die Strahlen, die K nicht reell schneiden, hyperbolische in Sekanten, parabolische in Tangenten von K eineindeutig abgebildet.

Ebenso kann man mittels der stereographischen Projektion im Raume alle Strahlen des Raumes auf die Involutionen der Projektionsebene Π eineindeutig abbilden:

Man legt durch den beliebig gegebenen Strahl E und durch das Projektionszentrum s die Ebene, die die Projektionsebene in der Geraden P, die Kugel Φ im Kreise K schneidet. In dieser Ebene hat man nun die oben angegebene Konstruktion durchzuführen.

Ferner ergibt sich:

Der reelle Vertreter der stereographischen Projektion des in einer Ebene ε liegenden nullteiligen Kreises wird gefunden, indem man jene zu ε konjugierte Ebene $\overline{\varepsilon}$ sucht, die mit ihr die Verschwindungslinie gemein hat. Die stereographische Projektion

[1]) $\overline{S}$ hat $\overline{v} \equiv s$ und $\overline{m}$ zu Doppelpunkten. Das Zentrum dieser Involution, das als Schnitt der Tangenten in $\overline{v}$ und $\overline{m}$ erhalten wird, ist aber v, da $(s\,m)$ Polare von v ist.

Digitized by Google

ihres Schnittkreises ist der gesuchte reelle Vertreter. Einer Zuordnung dieser beiden Ebenen entspricht in der Projektion eine Zuordnung zweier Polaritäten mit den gleichen Zentren. Der Grundkreis der einen Polarität ist der reelle Vertreter des nullteiligen Grundkreises der anderen Polarität. Damit kann aber die Abbildung der reellen und nullteiligen Kreise auf die Ebenen des Raumes rein geometrisch untersucht und Konstruktionen an reellen und nullteiligen Kreisen können auf darstellend-geometrischem Wege gelöst werden.[1])

[1]) Die darstellend-geometrischen Grundlagen für die Abbildung der reellen Kreise auf die Ebenen des Raumes, die die Kugel reell schneiden, hat E. Müller in seinen Vorlesungen über stereographische Projektion und Zyklographie erschöpfend behandelt. Der Gedanke dieser Abbildung führt auf F. Klein zurück. (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschung. Erlanger Programm 1872.)

Digitized by Google

Literaturberichte.

Digitized by Google

Berichtigung.

Im XXIV. Jahrgang 1913, pag. 44 der Literaturberichte, Zeile 13 v. u., lies:

Darstellende Geometrie. Von Theodor Schmid.

(Ebenso im Inhaltsverzeichnis auf der 3. Umschlagseite.)

Digitized by Google

Beiträge zur Stereoskopie und zur stereoskopischen Projektion von K. Rosenberg. Wien und Leipzig, Hölder, 1912. 44 Seiten, M. 1.40.

Aus der langjährigen Beschäftigung mit dem Problem der Stereoskopie hervorgegangen, enthält dieses Büchlein sehr eingehende Erörterungen über das Zustandekommen der räumlichen Bildwirkung und über die wichtigsten, bei Stereoskopaufnahmen einzuhaltenden Bedingungen. Der II. Teil über stereoskopische Projektion behandelt insbesondere die stereoskopischen Anaglyphen (Bilder in zwei Komplementärfarben, durch zweifärbige Brillen betrachtet). Wer sich mit Stereoskopaufnahmen beschäftigt, wird die Schrift, die manche neue Beobachtungen des Verfassers enthält, mit Interesse lesen.

Allgemeine Elektrotechnik. Hochschul-Vorlesungen von P. Janet. Deutsch von F. Süchting und E. Riecke. I. Band. Grundlagen. Gleichströme. Leipzig und Berlin, Teubner, 1912. 269 Seiten, M. 6.

Eine im besten Sinne allgemeine Elektrotechnik! Ohne Eingehen auf konstruktive Details und Einzeltypen werden die allgemein physikalischen Grundlagen in klarer, eleganter Form ohne unnötigen Aufwand gegeben. Wie der Verfasser treffend in seiner Vorrede sagt, sind bei jedem Studium „zwei Dinge von nöten: das Lernen und das Begreifen; man lernt die Einzelheiten, man begreift das Allgemeine". Und dieses Begreifen unter den Studierenden der Elektrotechnik zu fördern, ist der Hauptzweck dieses trefflichen Buches. Der vorliegende I. Band behandelt: Wiederholung der Grundlagen der Mechanik und Thermodynamik, Elektrostatik, insbesondere Kondensatoren, das Ohmsche Gesetz, Magnetismus und Elektromagnetismus, Induktion, Magnetisierung des Eisens, Eigenschaften der in der Elektrotechnik verwendeten Materialien, Gleichstrom-Dynamomaschinen, Anker, Feldmagnete, Kollektorfunken und Ankerrückwirkung, Charakteristiken, Zusammenarbeiten von Gleichstrom-Maschinen, Gleichstrommotoren, Elektrische Übertragung mechanischer Arbeit. Der Wechselstrom soll in zwei folgenden Bänden behandelt werden.

K. Prz.

Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie von A. Brill. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1912. 28 Seiten, M. 1.20.

Diese Schrift ist aus einem Lehrerferialkurs hervorgegangen. Im Hinblick auf die wenigen Stunden, die dem Verfasser zur Verfügung standen, um seine Zuhörerschaft in dieses schwierige Kapitel der modernen Physik einzuführen, hat er sich auf den rein formalistischen Standpunkt bei der Ableitung und auf die einfachsten mechanischen Anwendungen der Relativitätstheorie beschränkt. Gerade dadurch wird aber dem Leser die große Allgemeinheit dieser Theorie deutlicher zu Bewußtsein gebracht, als bei zu enger Anlehnung an die elektromagnetischen Vorgänge. Nach einer kurzen Erläuterung des Relativitätsprinzips der klassischen Mechanik stellt der Verfasser den Schall-

Digitized by Google

wellen die Lichtwellen gegenüber und gelangt aus der Bedingung der Invarianz von $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ zur Lorenztransformation. Es wird Länge und Zeit im Relativsystem erörtert und die Minkowskische Darstellung durch Raum-Zeit-Koordinaten eingeführt. Im Kapitel Dynamik werden Ruhmaße, longitudinale und transversale Masse und die Energie behandelt und schließlich als Beispiele das Gleichgewicht eines Winkelhebels in bezug auf zwei gegeneinander bewegte Systeme und die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer konstanten Kraft gegeben. *K. Prz.*

Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig, B. G. Teubner 1912. Band 371. Einleitung in die Experimentalphysik von R. Börnstein. 118 Seiten.

Aus einem volkstümlichen Kurse hervorgegangen, behandelt dieses Bändchen als „Einleitung in die Experimentalphysik" die Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe sowie die Molekularerscheinungen: Kohäsion, Reibung, Diffussion usw. Der Verfasser hat, wie er im Vorwort mit sehr beherzigenswerten Worten auseinandersetzt, besonderes Gewicht auf möglichst einfache, durchsichtige Versuchsanordnungen gelegt, die jeder Hörer womöglich selbst herstellen kann.

Band 372. Das Auge und die Brille von M. von Rohr, 100 Seiten.

Eine sehr interessante Zusammenstellung des Wichtigsten aus der Optik des Auges und der zur Kompensation seiner Fehler bestimmten Brillen, wie sie in gleicher Vollständigkeit und Gemeinverständlichkeit wohl in keinem anderen für weitere Kreise bestimmten Buche zu finden sein dürfte.

Meßmethoden zur Bestimmung von Stromstärke, Spannung und Widerstand bei Gleichströmen. Prüfverfahren für Meßinstrumente, von K. Windmüller. Wittenberg, Herrosés Verlag, 1912, 44 Seiten.

Das Heftchen ist für Hörer technischer Fachschulen (Mittelschulen und Handwerkerschulen) und zum Gebrauch in der Praxis bestimmt und enthält eine knappe Darstellung der notwendigen Sätze aus der Elektrizitätslehre, die Beschreibung der wichtigsten Instrumente und als Hauptbestandteil die gebräuchlichsten Meßmethoden und Prüfverfahren. *K. Prz.*

Dr. Friedr. Schoedlers „Buch der Natur". III. Teil. 2. Abteilung Physik zum Gebrauch bei physikalischen Vorlesungen in höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht von Prof. Dr. H. Böttger. 1. Band. (Mechanik, Wärmelehre, Akustik.) Mit 843 Abbildungen und 2 Tafeln. 8°. Vieweg, Braunschweig, 983 Seiten, geheftet 15 M., in Leinwand gebunden M. 16.50.

Der vorliegende Band enthält eine durchwegs elementar gehaltene umfangreiche Darstellung der Mechanik, Wärmelehre und Akustik, welche für den obgenannten Zweck, in erster Linie aber als Nachschlags- und Begleitwerk für die erste Zeit des akademischen Studiums sich vortrefflich eignen wird. Die Disposition des Stoffes ist nach wohlbewährten klassischen Prinzipien getroffen. Ein besonderer Vorzug des Buches ist die einfache mathematische Darstellungsweise, welche ohne irgendwelche Kenntnisse der Infinitesi-

Digitized by Google

malrechnung vorauszusetzen, doch zu einer exakten, hochschulmäßigen Behandlung der einzelnen Probleme hinüberleitet und, dem jeweiligen Bedürfnis folgend, die nötigen Grundbegriffe wie z. B. Grenzwert, Differentialquotient u. dgl. an praktischen Beispielen mitentwickelt. Das Buch kann insbesondere den Studierenden des ersten Semesters an Hochschulen wärmstens empfohlen werden. *V. H.*

Leitfaden für den Unterricht in der Physik, zum Gebrauche an Navigationsschulen. Von Prof. Dr. F. Bolte. Dritte, umgearbeitete Auflage vermehrt durch ein Kapitel über drahtlose Telegraphie an Bord von Oberlehrer W. Culmann. Mit 319 Abbildungen. Braunschweig 1912. F. Vieweg & Sohn. Preis 4 M. 216 Seiten.

Der vorliegende Leitfaden ist zur Vorbereitung für die Prüfung zum Schiffer auf großer Fahrt und zum Seesteuermann gedacht und dürfte diesem Spezialzwecke in vollkommenstem Maße entsprechen. Aus dem Gesamtgebiet der Physik sind mit Sorgfalt jene Kapitel herausgegriffen, die irgend eine Bedeutung für die Navigation haben, ohne daß der Gesamtaufbau des Lehrstoffes dadurch beeinträchtigt ist. Eine eingehende Behandlung erfahren alle nautischen Instrumente. Bei jedem Kapitel sind Aufgaben angeschlossen, welche ausnahmslos praktisch wichtige Fragen behandeln. In der vorliegenden neuen Auflage ist der Umfang des Leitfadens entsprechend den neuen Prüfungsvorschriften erweitert und ein vortrefflich geschriebenes Kapitel über drahtlose Telegrafie angegliedert, in welchem nicht nur die Prinzipien sondern auch alle technischen Einzelheiten dieses Gebietes entwickelt sind, so werden z. B. besprochen die Delektoren nach Branly, Marconi, Schlämilch, die Kontaktdelektoren, das Marconi-System, das System der tönenden Funken, ferner die Einrichtung der Bordstationen der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie mit allen Einzelheiten, so daß sich dieses Kapitel überhaupt für jedermann als Einführung in die Praxis der drahtlosen Telegraphie empfiehlt. *V. H.*

Lehrbuch der Physik für den Schul- und Selbstunterricht. Von Konrad Fuß und Georg Hensold. Zehnte, verbesserte und vermehrte Auflage. Allgemeine Ausgabe 1912. Freiburg in Br. Herdersche Verlagsbuchhandlung.

Das vorliegende Werk, welches für den Unterricht an den oberen Klassen der Realschulen, Gymnasien und an den Lehrerbildungsanstalten bestimmt ist, enthält den früheren Auflagen gegenüber vielfache Verbesserungen. Die Übersicht wird durch verschiedenartigen Druck der Lehrsätze, des Textes und der Anwendungen sehr erleichtert. Die Einteilung des Stoffes wird dem Lehrer durch einen beigegebenen Plan sehr erleichtert, der es ermöglicht das ziemlich umfangreiche Buch auch an den Unterstufen bei entsprechender Stoffauswahl anzuwenden. Im speziellen sei erwähnt die Neubehandlung der Lehre von den Entladungen in verdünnten Gasen und der Radioaktivität, welche Kapitel zwar sehr knapp, aber klar und verständlich dargestellt sind. In der beigegebenen farbigen Spektraltafel wäre die Angabe der Wellenlängen in Ängström-Einheiten anstatt der willkürlichen Skala anzuraten. Das Lehrbuch ist sehr schön ausgestattet und dürfte sich auch für den Selbstunterricht vortrefflich eignen, besonders wegen des didaktisch sehr empfehlenswerten Aufbaues. *V. H.*

Digitized by Google

Die Telephonie ohne Draht. Von Dr. K. Markau. Mit 103 Abb. im Text X + 126 Seiten, Braunschweig, F. Vieweg und Sohn 1912. 4·50 Mark.

Als 43. Heft der Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien: „Die Wissenschaft" erscheint diese Darstellung eines der modernsten Zweige der Elektrotechnik. Nach einer kurzen, mehr historisch gehaltenen Einleitung über die drahtlose Telephonie mittels Strom- und Induktionslinien, wird die moderne Behandlung mit Hilfe elektromagnetischer Wellen besprochen, und zwar die drahtlose Telephonie unter Verwendung von Licht- und Wärmestrahlen, ferner mittels der Hertzschen Wellen und es werden weiters die hauptsächlichen Nebenapparate diskutiert.

Das insbesondere durch die zahlreichen Illustrationen sehr anschaulich gehaltene Büchlein orientiert in leichtfaßlicher Weise über den Beginn der Durchführung eines Problems, das voraussichtlich noch großen Entwicklungen entgegensieht. Man darf dem Autor und dem Verlag in gleicher Weise für diesen neuesten Beitrag der „Wissenschaft" Dank wissen.

Lehrbuch der Optik von Dr. Paul Drude, weil. Prof. der Phys. a. d. Univ. Berlin. Dritte erweiterte Auflage, herausgegeben von Dr. E. Gehrcke, kais. Prof. und Mitglied der Phys.-Techn. Reichsanstalt, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 112 Abbildungen. XVI + 548 S. S. Hirzel, Leipzig 1912. 12 Mark.

Nachdem F. Kiebitz die noch manuskriptlich nachgelassene zweite Ausgabe besorgt hatte, hat es nunmehr E. Gehrcke unternommen, die vorliegende dritte zu bearbeiten und er hat sich ganz im Geiste seines großen Meisters gehalten. Daß es überhaupt möglich war, in fast unveränderter Weise zu belassen, was seit 1906 vorlag, zeigt am besten, in wie vorausschauender Weise von Drude das Werk angelegt worden ist. An Veränderungen sei insbesondere der Abriß über die Stokessche Theorie der Aberration und der Abschnitt über die photochemischen Prozesse in Gasen hervorgehoben, weiters wichtige Ergänzungen in Literaturnachweisen. Es war Wert darauf gelegt worden, den Umfang des Werkes nicht stark zu verändern und so repräsentiert sich das modernisierte Buch fast in der gleichen überall bekannten und beliebten Form.

Maschinen und Apparate der Starkstromtechnik, ihre Wirkungsweise und Konstruktion. Ein Lehrbuch für den Gebrauch an technischen Lehranstalten, zum Selbstunterricht und für den in der Praxis stehenden Ingenieur, von Gustav W. Meyer, beratender Ingenieur für Elektrotechnik. Mit 772 Fig. XIV + 590 Seiten. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1912. 15 Mark.

Für die technischen Fragen genügt heute „Kathederweisheit" nicht mehr. Immer dringlicher wird das Bedürfnis, daß Männer, die mit der fortwährenden Veränderungen unterliegenden Praxis innige Fühlung haben, zu Worte kommen, um die Erfahrungen der Betriebe größeren Kreisen zur Kenntnis zu bringen. Vielfach aber fehlt es bei solchen Bestrebungen wieder dem Praktiker an Geschick, sich verständlich zu machen und gar, wenn „Praxis" und „Theorie", die bei richtiger Beurteilung zueinander niemals in Widerspruch kommen sollten, gegensätzlich behandelt werden, ist die Sache verfahren.

Digitized by Google

Umso freudiger muß das Erscheinen des vortrefflich ausgestatteten vorliegenden Werkes begrüßt werden, in dem mit großem Geschick in leicht verständlicher Weise und dabei doch streng sachlich systematisch die derzeit wichtigsten und tatsächlich im Gebrauch befindlichen Maschinen und Meßapparate der Starkstromtechnik geschildert und ihre Anwindung erläutert wird.

Das Werk behandelt: Gleichstrom, und zwar: Messung, Kontrolle und Aufspeicherung der elektrischen Energie; die Gleichstrommaschinen und die elektrische Energieübertragung mittels Gleichstromes. Dann den Wechselstrom, und zwar die Messung, Kontrolle, Erzeugung und Umformung von Wechselströmen, den Wechselstromtransformator und die elektrische Energieübertragung mittels Wechselstromes. Ein gutes Register sei besonders erwähnt.

Das Buch wird nicht nur dem Ingenieur, der im Betrieb tätig ist oder zu seiner Schulung, ehe er in die Praxis eintritt, förderlich sein, sondern auch ein willkommenes Nachschlagewerk für den Lehrer und Lernenden an allen Hochschulen werden und auch denjenigen Physikern, die neben den theoretischen Studien die Fühlung mit den technischen Betätigungen behalten, sehr gnte Dienste leisten. Möge sein Verkauf so flott von statten gehen, daß rasch sich folgende Auflagen es immer modern erhalten.

Physik in graphischen Darstellungen. Von Felix Auerbach. 1373 Figuren auf 213 Tafeln mit erläuterndem Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1912. 9 Mark.

Wohl viele Physiker und Mathematiker haben schon einmal die Sehnsucht nach einem mathematisch-physikalischen Bilderbuch empfunden, das in anschaulichen Kurventafeln neben den Formeln die wichtigen typischen Darstellungen bringt, mit denen stetig gearbeitet wird. Das vorliegende Werkchen nimmt einen Anlauf dazu. Es enthält eine ansehnliche Zahl von graphischen Darstellungen, meist nach Originalarbeiten des Verfassers aus den Gebieten der allgemeinen Physik und Mechanik, besonders ausführlich aus der Wellenlehre und Akustik, dann aus der Wärmelehre, der Elektrik und Magnetik und Optik, also aus sämtlichen Gebieten der Physik. Es ist da eine enorme Menge der in der Physik am häufigsten verwendeten Kurven mit großem Fleiß zusammengetragen. Gleichwohl ließe sich ihre Zahl noch in wertvoller Weise leicht ausgiebig ergänzen. Man braucht nur beispielsweise an die Atomgewichts-Atomvolumen-Kurven im Zusammenhang mit den periodischen Eigenschaften der Elemente zu denken, oder an die charakteristischen Braggschen Ionisationskurven, an die Sättigungskurven usw. usw. Der Verfasser wäre sicherlich der geeignete Mann, um ein groß angelegtes Werk zu organisieren, das durch Zusammenwirken aller dabei interessierten Fachkreise einen systematischen Ausbau des sehr entwicklungsfähigen Gedankens, der dem vorliegenden Versuch zu Grunde liegt, und damit ein besonders erwünschtes Sammelwerk schaffen sollte. Es wäre zu begrüßen, wenn dabei unter unmittelbarer Nebenstellung der Formeln die Illustrationen häufig gebrauchter mathematisch-physikalischer Kurventypen mit den Veränderungen, die sie durch Variation der diversen Konstanten erfahren, ebenfalls Berücksichtigung fänden.

Da sich das Werk bemüht, den modernsten Stand der Kenntnisse darzustellen, sei nebenhin im Detail darauf aufmerksam gemacht, daß auf Taf. 156

Digitized by Google

es bei 3 statt Emanationsfähigkeit offenbar Radiumemanation heißen soll und daß die zahlenmäßige Ausführung mit der Halbwertszeit von 3, 86 Tagen, nicht übereinstimmt. Ebenda bei 4 fehlt die wesentliche Andeutung der Feldrichtung von vorn nach rückwärts; die Kurve 5 ist durch die neueren Untersuchungen von Geiger und Nuttall oder Swinne überholt; statt Lebensdauer soll es mittlere Lebensdauer heißen. *St. M.*

Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques professées à la Sorbonne. Par H. Poincaré. A. Hermann & fils, Paris, Librairie scientifique.

Das auf ein reiches, in den letzten Dezennien nach verschiedenen Richtungen hin ungemein erweitertes Beobachtungsmaterial gegründete Studium der veränderlichen und neuen Sterne, der visuellen und spektroskopischen Doppelsterne, der Sternhaufen und Nebelflecken, der Eigenbewegung, Parallaxe und räumlichen Verteilung der Gestirne hat eine Fülle von Tatsachen bekannt gemacht, deren kausale Verknüpfung die Aufstellung neuer kosmogonischer Hypothesen mehr den je erfordert. Dementsprechend ist auch das Interesse der Astronomen an kosmogonischen Fragen wieder mehr in den Vordergrund getreten.

Diesem Interesse hat der geniale Mathematiker und Astronom H. Poincaré in einem größeren Werke, leider seinem letzten, Rechnung getragen, indem er die leitenden Gesichtspunkte der von ihm für beachtenswert gehaltenen kosmogonischen Hypothesen zum Vortrag bringt und durch mathematische Analyse festzustellen sucht, inwieweit, vom Standpunkt der modernen Wissenschaft aus betrachtet, die angenommene Entwicklung der Himmelskörper aus einem gegebenen Anfangszustande der Materie gerechtfertigt erscheint. Das Buch hat 288 Seiten und ist in 14 Abschnitte geteilt, in denen die Hypothesen, bezw. Theorien von

Kant (1) [Ruhender chaotischer Nebel],

Laplace (2, 3) [rotierender chaotischer Nebel, Ringbildung von der Peripherie aus, ein Planet ist um so älter, je sonnenferner er ist],

H. Fay (4) [Ringbildung im Innern des chaotischen Nebels durch Wirbelbewegung, die inneren Planeten sind älter als die äußeren],

R. Du Ligondés (5) [lokale Anhäufungen von Materie im Chaos, anfängliche Bewegung der kleinsten Teile nach allen möglichen Richtungen],

T. J. J. See (6, 13) [Planeten (Monde) sind dem Sonnensystem ursprünglich fremd gewesen und durch die Anziehung der Sonne (Planeten) unter dem vermittelnden Einflusse des Widerstandes, welche ausgedehnte Atmosphären auf die Bewegung der Fremdkörper ausgeübt haben, gefangen worden],

Sir G. H. Darwin (7) [Bildung der Monde aus der birnförmigen Gleichgewichtsfigur der früher mit viel rascherer Rotation begabt gewesenen Planeten und Weiterentwicklung der Systeme unter dem Einflusse der Gezeitenreibung],

N. Lockyer (9) [Nebel bestehen aus Schwärmen von Meteoriten, deren Zusammenstöße zur Konzentration der Materie und im weiteren Verlaufe zur Bildung der Sterne führen; Klassifikation des Alters der Sterne nach gewissen Eigentümlichkeiten ihrer Spektra],

A. Schuster (10) [Modifikation der Lokyerschen Hypothese besonders bezüglich des Alters der zu verschiedenen Spektralklassen gehörenden Sterne],

Digitized by Google

S. Arrhenius (11) [Ungeheurer Energievorrat in den Sonnen wegen ihres Gehaltes an radioaktiven Substanzen und endothermischen Verbindungen, Austausch von Materie zwischen Sonnen und Nebeln, Wachsen der Entropie in den Sonnen und Abnahme in den Nebeln, Annahme, daß der Universum nicht dem Wärmetode entgegengehe],

E. Belot (14) [Wirbeltheorien, Entstehung der Sonnen und der Durchdringung eines amorphen Nebels durch einen in Wirbelbewegung begriffenen Nebel],

erörtert werden.

Zwei Abschnitte (8, 12) sind Untersuchungen über die Sonnen- und Erdwärme und Beobachtungen über die Milchstraße gewidmet.

Die Lektüre des Buches, das stellenweise allerdings beträchtliche Anforderungen an die mathematisch-physikalische Vorbildung des Lesers stellt, ist jedem, der sich über kosmogonische Fragen eingehend unterrichten will, auf das wärmste zu empfehlen.

Eine Wertung der verschiedenen Hypothesen gibt der Verfasser nur insofern, als er in der Vorrede erklärt, daß er der Laplaceschen Hypothese unbedenklich den Vorrang einräumen würde, wenn unser Sonnensystem allein in Betracht käme. Die abwechslungsreiche Gestaltung der Sternsysteme mache jedoch die Rücksichtnahme auf verschiede Evolutionsmöglichkeiten notwendig, denen die Laplacésche Hypothese im günstigsten Fall nur nach weitgehender Modifikation entsprechen könnte. Von den übrigen Hypothesen vermöge jede eine gewisse Anzahl von Tatsachen zu erklären, doch falle die Erklärung um so weniger zufriedenstellend aus, je größer der Kreis der einbezogenen Tatsachen wird. Eine einwandfreie Lösung vieler Fragen könne dermalen überhaupt nicht gegeben werden, weil das vorhandene Beobachtungsmaterial zu lückenhaft ist. Doch lasse sich die Unzulänglichkeit aller Hypothesen schon daraus erkennen, daß keine im stande ist, eine so wichtige Erscheinung wie die der Spiralnebel in annehmbarer Weise zu erklären. *U.*

La pression osmotique et le mécanisme de l'osmose, par Pierre Girard. A. Hermann, Paris 1912.

Nach einer historischen Einleitung weist der Autor auf den Widerspruch hin, der zwischen den üblichen Erklärungen des osmotischen Druckes und des Mechanismus der Osmose besteht. Während das von van't Hoff aufgestellte Gesetz des osmotischen Druckes durch eine Übertragung der Vorstellungen der kinetischen Gastheorie auf den gelösten Zustand gedeutet wird und die Annahme einer Wechselwirkung zwischen Lösungsmittel und Gelöstem dem entsprechend ausgeschlossen erscheint, wird von den meisten Forschern eine Anziehung der Wassermoleküle durch die des gelösten Stoffes angenommen, wenn es sich um die Erklärung handelt, warum bei noch nicht erreichtem Gleichgewicht ein Strömen der Flüssigkeit stattfindet. Dem Autor scheint eine kinetische Erklärung des Mechanismus der Osmose wünschenswert; er selbst gibt aber auch keine solche, sondern wendet sich der Besprechung der von der Regel abweichenden Osmosen (Konzentrierung statt Verdünnung der Lösung von größerem osmotischen Druck) zu. Diese wurden von Physiologen bei abgeschnürten Darmschlingen beobachtet und auf eine besondere vitalistische Fähigkeit der Zellen zurückgeführt sie findet aber nun unter Umständen auch

Digitized by Google

bei gewöhnlichen Dialysieversuchen statt und der Autor zeigt, daß zu ihrer Erklärung bekannte und der Messung zugängliche elektrische Kräfte genügen, die Annahme einer besonderen Zellkraft also auch bei Versuchen am lebenden Tierkörper überflüssig scheint. Der Name des öfters erwähnten Physiologen Heindenhain soll wohl richtig Heidenhain lauten. *F. P.*

Conférences sur les alliages, par Mm. Rengade, Jolibois, Broniewski. A. Hermann, Paris 1912.

In vier kurzen Vorträgen werden die verschiedenen Methoden behandelt die einen Einblick in die Zusammensetzung von Legierungen verschaffen können. Der erste beschäftigt sich mit der thermischen Analyse und zeigt, wie man aus dem Gang eines Thermometers während der Abkühlung die Bestandteile einer Legierung erschließen kann. Der zweite bespricht die Ergänzung dieser Methode durch mikroskopische Beobachtung von Schliffen. Der Autor des dritten Vortrags gibt mehrere Beispiele, bei denen durch Destillation, Filtration, Behandeln mit Säuren, Fällung oder elektrolytische Auflösung eine direkte Trennung der Bestandteile erfolgen konnte und diskutiert eingehend die Fehlerquellen, die bei diesen chemischen Verfahren vermieden werden müssen. Im letzten Vortrag wird dargelegt, daß auch das Studium der elektrischen Eigenschaften (Leitfähigkeit, Temperaturkoeffizient der Leitfähigkeit, thermoelektrische Kraft, ihre Änderung mit der Temperatur, elektrolytischer Lösungsdruck) das Vorhandensein von bestimmten Verbindungen in einer Legierung, eines Umwandlungspunktes usw. erkennen läßt. Die drei Autoren, denen wir diese trotz ihrer Kürze sehr klaren Vorträge verdanken, stimmen darin überein, daß wenn möglich alle Methoden zum Studium einer Legierung herangezogen werden sollen; daß trotzdem jeder die Vorzüge der von ihm dargestellten in erster Linie hervorzuheben bemüht ist, macht die Lektüre besonders anregend. *F. P.*

Methodik des Unterrichts in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen. Von J. Jarosch, Wien 1913, Pichlers Witwe & Sohn.

Der Verfasser hat mit anerkennenswertem Fleiße viel pädagogische Literatur gesammelt und versucht, im Beginne des Buches durch Verknüpfung zahlreicher Zitate ein Ganzes daraus zu machen. Im Sinne E. Müllers bezeichnet er als Ziel des Unterrichts in der darstellenden Geometrie die Pflege des technischen „Anschauungsvermögens". Im Gegensatz zum „geometrischen Anschauungsvermögen", das im Geiste eine Vorstellung von Dingen erzeugen soll, die zwar durch ein geometrisches Gesetz gegeben sind, aber noch mannigfache Formen und Größen annehmen können, ist das „technische Anschauungsvermögen" die Fähigkeit, sich nach Form und Größe genau bestimmte Gegenstände, die durch Zeichnung gegeben sind, räumlich vorzustellen. Dieses Ziel soll möglichst durch eigene Arbeit des Schülers erworben werden. (Arbeitsprinzip.)

Bei der ins Detail gehenden Besprechung des Lehrganges der einzelnen Klassen läßt der Verfasser jedoch einige Gelegenheiten, diese Prinzipien zu verwirklichen, ungenützt vorübergehen. So z. B. begnügt er sich in der vierten Klasse mit der Drehung eines Quaders um eine lotrechte Achse (S. 58). In der siebenten Klasse hält er es nicht für notwendig, daß alle Schüler ein Blatt über orthogonale Axonometrie anfertigen (S. 87 u. 89). Daß Schüler der vierten

Digitized by Google

Klasse Modelle von technischen Einzelheiten zuerst selbst verfertigen (S. 55) und dann davon Seitenrisse und Schrägrisse entwerfen sollen, erscheint mir ebenso undurchführbar wie die Forderung, „Gegenstände des Schulzimmers" (S. 55) in der genannten Weise darzustellen. Von Wert wäre es gewesen, wenn der Verfasser an dieser Stelle und auch sonst überall, wo von der Konstruktion technischer Objekte die Rede ist, die Literatur brauchbarer Aufgabensammlungen unter genauem Hinweis auf die betreffenden Objekte zitiert hätte. Denn das frühzeitige Zeichnen komplizierter Objekte verleitet zur ungenauen Arbeit und zu schlechtem Zeichnen. Daß man bei der Wahl des Achsenkreuzes und auch des Objekts in der schiefen Axonometrie gewisse Grenzen einhalten muß, um geschmackvolle und anschauliche Bilder zu erhalten, daß ferner die verwendeten Objekte keine technischen Unrichtigkeiten enthalten sollen, wäre ebenso beachtens- als erwähnenswert gewesen. Der Schrägriß auf Seite 60 ist ein Zerrbild und in der Perspektive auf S. 95 liegt Fuge auf Fuge!

Sonst enthält das Buch viele gute Gedanken und für den Unterricht brauchbare Einzelheiten. *K. Mack.*

Vorlesungen über darstellende Geometrie von Dr. F. v. Dalwigk, Privatdozent in Marburg. I. Band: „Die Methoden der Parallelprojektion". 363 S. und 12 Tafeln. B. G. Teubner 1911.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, welche der Verfasser an der Universität Marburg hielt. Der Verfasser hatte dabei in erster Linie die Forderungen beim preußischen Examen über angewandte Mathematik im Auge. Zur Vorbereitung für diese Prüfung wird sich das Buch gewiß als recht brauchbar erweisen; denn klare Schreibweise und gute Anordnung geben Zeugnis vom methodischen Geschick des Verfassers. Es kann auch von Technikern benützt werden; denn es umfaßt — wie im Vorworte betont wird — auch „ungefähr den Stoff, der im Unterricht an technischen Hochschulen geboten wird", nur wären für diesen Zweck etwas ausführlichere Anleitungen zur Anwendung des theoretischen Stoffes auf technische Beispiele erwünscht. Die bei Plankurven und Raumkurven vorkommenden Begriffe (S. 178) werden nicht erklärt, sondern als bekannt vorausgesetzt; ebenso werden manche Sätze (S. 129) ohne Beweise angeführt. Obwohl der Verfasser eine Übersicht über die Entwicklung der darstellenden Geometrie für den II. Band in Aussicht stellt, sind schon jetzt zahlreiche Bemerkungen über Geschichte und Literatur eingestreut. Das Verfahren für die Konstruktion der Isophoten, welches der Verfasser als das Rodenbergsche bezeichnet, findet sich schon bei Burmester (Theorie und Darstellung der Beleuchtung ges. Fl. 1875, S. 301) angedeutet und der Referent hat auf dasselbe später wieder hingewiesen (Monatsh. f. Math. u. Ph. 1891, S. 337). Die Bemerkung auf S. 178 unten und 179 oben (§ 25) ist nicht zutreffend; denn immer, wenn die Projektionsebene zur Schmiegungsebene (aber nicht zur Tangente) eines gewöhnlichen Punktes senkrecht ist, entsteht eine Wendetangente in der Orthogonalprojektion der Raumkurve. *Th. Sch.*

Traité de chimie générale. Von W. Nernst, übersetzt von A. Carvisy. A. Hermann, Paris 1911.

Es ist jedenfalls mit großer Freude zu begrüßen, daß durch diese Übersetzung das Nernstsche Werk, dessen Vorzüge man einem deutschen Leser

Digitized by Google

nicht zu rühmen nötig hat, nunmehr allen französischen Physikern und Chemikern mit geringerer Mühe zugänglich gemacht ist. Es handelt sich um eine wortgetreue Übersetzung der letzten (6.) deutschen Auflage. Die Bemühungen des Übersetzers, mit möglichster Genauigkeit und Klarheit Wort und Sinn des Originals wiederzugeben, sind, soweit wir es als Deutsche beurteilen können, durchaus vom besten Erfolg gekrönt. Einige Richtigstellungen von untergeordneter Bedeutung sind nach Nernsts eigenen Angaben aufgenommen, beziehen sich aber nur auf Historisches.

Druck und Ausstattung sind vorzüglich, so daß das Buch auch nach dieser Richtung jedermann eine ungetrübte Freude bereiten wird.

Erwin Schrödinger.

Einführung in die darstellende Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an höheren Lehranstalten von Dr. Marcel Großmann, Prof. a. d. eidgen. technischen Hochschule in Zürich. Zweite Auflage. (92 S.) Helbing in Basel 1912.

Bei der Neubearbeitung dieses Leitfadens wurde auf den Lehrplan der „oberen Realschule in Basel" Rücksicht genommen. Deshalb wurde nicht bloß das Grund- und Aufrißverfahren behandelt, sondern auch einiges über Axonometrie und Zentralprojektion angefügt. Schattenkonstruktionen kommen eigentlich nicht vor; sonst könnte das klar geschriebene Buch auch an österreichischen Realschulen benützt werden. Ein beiliegendes Heft enthält auf 6 Blättern 118 Figuren, zum Teil so gedrängt, daß manche Figur in die benachbarte hineinragt.

Th. Sch.

Theorie der Elektrizität. I. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität, von Dr. A. Föppl. Vierte, umgearbeitete Auflage von Dr. M. Abraham. B. G. Teubner 1912.

Daß die Abrahamsche „Theorie der Elektrizität" ein unentbehrliches Hilfsbuch des theoretischen und praktischen Physikers geworden ist, dafür spricht am deutlichsten die rasche Folge von drei Neuauflagen, die es in dem kurzen Zeitraum von 1904 bis 1912 erfahren hat. Sowohl vom didaktischen als vom kritischen Standpunkte überaus vorteilhaft hat sich die schon durch die Geschichte des Buches bedingte Abtrennung der phänomenologischen reinen Maxwellschen Theorie von den heißumstrittenen Problemen der Elektronentheorie und der verschiedenen Theorien für bewegte Körper erwiesen. Diesen ist der zweite Band gewidmet, während im ersten nur gelegentlich auf die in der reinen Maxwellschen Theorie auftretenden Schwierigkeiten hingewiesen und ihre Lösung vorbereitet wird.

Naturgemäß kann daher der bis jetzt vorliegende erste Band gegenüber der letzten Auflage nicht viel Neues bringen. Die ponderomotorischen Kräfte und die fiktiven Spannungen sind etwas ausführlicher behandelt, entsprechend der großen Bedeutung, welche den letzteren auch in den neuesten Theorien zukommt; ferner ist die Theorie der elektrischen Wellen durch die Behandlung des Skin-Effekts, des Hertzschen Oszillators und die Anwendung der ihm entsprechenden Lösung auf die drahtlose Telegraphie ergänzt.

Wir sehen mit Spannung dem Neuerscheinen des zweiten Bandes entgegen, der ohne Zweifel eine viel tiefgehendere Umgestaltung erfahren haben wird

Erwin Schrödinger.

Digitized by Google

A Treatise on Hydromechanics. P. II. Hydrodynamics by A. S. Ramsey. Bell and Son, London 1913.

Der vorliegende Band ist eine Neubearbeitung der Hydrodynamik nach Dr. Berants Treatise on Hydromechanics. Doch handelt es sich eigentlich wohl um ein ganz neues Buch. Es soll zur Einführung für Studierende dienen, welche sich mit dem Gebiet gut vertraut machen wollen. Die Darstellung ist leicht faßlich und klar, eine große Zahl durchgerechneter Beispiele erleichtert das Verständnis. — Nach Ableitung der Bewegungsgleichungen und der allgemeinen Theoreme wird zunächst die Theorie der wirbelfreien Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit gegeben. Es folgt die Bewegung eines starren Körpers in einer solchen, dann die Theorie der Wirbelbewegung und endlich der Oberflächenwellen. Den Schluß bildet die Behandlung der Schallwellen in einer kompressiblen Flüssigkeit. Zur Einführung werden vorher die Schwingungen gespannter Seiten und Membranen erörtert. *E. Schrödinger.*

Lehrbuch der Physik für Mediziner und Biologen. Von Dr. Ernst Lecher, Professor an der Universität Wien. 1912. Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin. Preis 8 M., geb. 9 M.

Das Buch ist hervorgegangen aus den Experimentalvorlesungen, welche der Verfasser seit Jahren speziell für Mediziner an der Universität Wien abhält. Der angestrebte Zweck, den angehenden Medizinern und Biologen in knapper, anschaulicher und leichtfaßlicher Weise die Grundlehren der Experimentalphysik mit besonderer Berücksichtigung ihrer medizinisch-biologischen Anwendungen beizubringen, ist wohl in vorzüglichster Weise erreicht. Die mathematischen Deduktionen sind aufs äußerste eingeschränkt und überall die graphische Darstellung in den Vordergrund gerückt, so daß dadurch abstraktere Partien ungemein leichtverständlich gehalten sind. Von den zahlreichen medizinisch-biologischen Kapiteln seien hier einige Schlagworte wiedergegeben: Drehmomente am Tierskelette, mechanische Funktion der Muskeln, Herzpumpe und Blutkreislauf, Atmung, Mareysche Kapsel, Stimmapparat, Anatomie des Gehörs, Osmose der Zellmembran und der roten Blutkörperchen, Quellung, Kolloide, Wärmelösungen im Organismus, Assimilation der Pflanzen, tierische Muskelmaschine, Physik der Gesichtsempfindungen, Anwendungen der Spektralanalyse für die Medizin, Elektrische Kataphorese, Unpolarisierbare Elektroden, Elektrokardiogramm, Elektrophysiologische Wirkungen, Thermopenetration, Kaltkanter, Medizinische Anwendung der Radium und Röntgenstrahlen.

Aus dieser Liste von Schlagworten ersieht man unschwer, daß der Verfasser es verstanden hat, die wichtigsten Grenzgebiete zwischen Physik und Medizin trotz des knappen Umfanges des Buches (437 Textseiten) zu behandeln. Eine etwas breitere Darstellung des Gebietes der neueren Strahlungen wäre vielleicht empfehlenswert gewesen. Das Buch wird seinem Zweck vortrefflich entsprechen.

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. 3. Jahrgang 1913. Herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe; Leipzig, B. G. Teubner 1913. 6 Mark.

Die Herausgeber wie der Verlag lassen es sich angelegen sein, das Taschenbuch derart zu gestalten, daß es eine ausgedehnte Verbreitung finde. Unter den Sonderbeiträgen, die von beteiligten Fachleuten verfaßt, einen kurzen Über-

Digitized by Google

blick über einzelne, teilweise jetzt besonders aktuelle Gebiete geben sollen, seien folgende besonders erwähnt: Mengenlehre von G. Hessenberg, Gruppentheorie und Galoissche Theorie der Gleichungen von L. Bieberbach, der letzte Fermat'sche Satz von A. Fleck, Integralgleichungen und deren Anwendungen von O. Toeplitz, die Quantentheorie von A. Sommerfeld. Das Buch ist mit einem Bildnis des am 17. Januar 1910 verstorbenen Physikers Kohlrausch geziert, dessen Biographie aus der trefflichen Feder E. Warburgs an die Spitze des Buches gestellt ist. *W. G.*

Esercizi di Analisi infinitesimale. Von G. Vivanti; Pavia, Mattei & C. 1913. — 15 Lire.

Es ist mit Freuden zu begrüßen, daß ein Mathematiker wie G. Vivanti sich der Mühe unterzogen hat, ein Übungsbuch zur Infinitesimalrechnung herauszugeben, zumal mehr als zwei Drittel der 575 Übungsbeispiele nach des Verfassers eigener Angabe neu sind. Während hiebei Beispiele aus der Physik vermieden wurden, ist die Geometrie im weitestem Umfange und in reichlichstem Maße zur Belebung der Übungen herangezogen worden. Den Beispielen ist stets eine knapp gehaltene Auflösung beigefügt. In dem Buche sind zuerst die gewöhnlichen Abschnitte der Infinitesimalrechnung behandelt. Ein eigener Abschnitt ist den geometrischen Anwendungen gewidmet. Über 170 Beispiele, großenteils der Geometrie entnommen, dienen zur Übung in der Behandlung der Differentialgleichungen. Eine kleine Anzahl von Beispielen zur Variationsrechnung beschließt das Werk. *W. G.*

Funktionentheorie I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Sammlung Göschen 668). Von Dr. Konrad Knopp; G. J. Göschen, Leipzig, 1913. 142 S. 90 Pfennige.

In klarer übersichtlicher Form sind hier die Grundlehren der komplexen Funktionentheorie strenge dargestellt. Hervorgehoben sei vor allem die hübsche Umgestaltung des Goursatschen Beweises des Cauchyschen Integralsatzes, die hier gegeben ist. Übersehen wurde (S. 108), daß zwischen analytischer Funktion und analytischem Gebilde im Weierstraßschen Sinne der wesentliche Unterschied besteht, daß diesem auch noch die algebraischen Verzweigungspunkte und die Pole zugerechnet werden. Es ist ganz erstaunlich, welche Fülle von Stoff sich in so engen Rahmen zwängen ließ und es ist dem Büchlein eine recht weite Verbreitung zu wünschen. *W. G.*

Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht. Von G. Kowalewski (Aus Natur und Geisteswelt, 197. Bändchen). Zweite Auflage. B. G. Teubner, Leipzig 1913, 196 S.

Das treffliche Büchlein liegt nunmehr in neuer, stark veränderter Gestalt in zweiter Auflage vor und es ist nur zu wünschen, daß es eine große Verbreitung finde, da es durch seine knappe und dennoch klare Fassung wie geschaffen dazu ist, die Kenntnis der hauptsächlichsten Lehren der Infinitesimalrechnung in strenger Form weiteren Kreisen zu übermitteln. Meiner Ansicht nach würde eine kurze Darstellung des Dedekindschen Schnittes das erste Kapitel nicht wesentlich erweitern, anderseits aber für die strenge Begründung vom Vorteil sein; doch ist dies schließlich Ansichtssache und es sei noch ein-

Digitized by Google

mal der ausgezeichnete Standpunkt hervorgehoben, den dies Büchlein unter den populären Darstellungen der Infinitesimalrechnung einnimmt. *W. G.*

Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik. Von M. Lindow (Aus Natur und Geisteswelt, 387. Bändchen). B. G. Teubner, Leipzig 1913. 111 S.

Ein durch die Auswahl des Stoffes, durch passend gewählte Beispiele treffliche Ergänzung des Kowalewskischen Büchleins ist in dieser Darstellung gegeben, die mehr für den Praktiker bestimmt ist und daher auch die näherungsweise Integration bringt, einfache Beispiele der Kurvendiskussion behandelt und überall die Rechnung betont. Daß man von einer solchen Darstellung nicht dieselbe strenge Behandlungsart erwarten wird, wie vom vorbesprochenen Büchlein, ist ja selbstverständlich. Aber wenn man sieht, wie sich auf jeder Seite die Vertrautheit des Verfassers mit dem Stoffe sowie seine pädagogische Kunst zeigt, so bedauert man es, daß sich auch hier die veraltete Vorstellung vorfindet, die Differentiale seien der Grenzfall endlicher Differenzen. *W. G.*

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch. 6. Auflage. Mit einem Anhang chemischer und physikalischer Konstanten, revidiert von Prof. Dr. Karl Scheel. 1912. Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig. Geb. 2·40 Mark.

Es sei hiemit angezeigt, daß das handliche Büchlein nunmehr bereits in sechster Auflage vorliegt.

Der Wortschatz der Mathematik nach Alter und Herkunft untersucht. Von Alfred Schirmer, 1912. R. J. Trübner, Straßburg. 3·20 Mark.

Vorliegendes Werkchen, ein Beiheft zur Zeitschrift für deutsche Wortforschung, bringt eine geschichtliche Untersuchung des deutschen mathematischen Wortschatzes, wobei sich der Verfasser auf die Elementarmathematik beschränkt. Die mühevolle Arbeit wird für jeden von Interesse sein, der in die Lage kommt, einmal danach zu forschen, wann und wie ein Fachausdruck dem mathematischen Wortschatze einverleibt wurde.

Gedenktagebuch für Mathematiker. Von Dr. Felix Müller. 3. Aufl. 1912. B. G. Teubner, Leipzig. 2. Mark.

Durch dieses Werk, das der Verfasser in liebevoller Arbeit zu seiner jetzigen Vollendung gebracht hat, ist den Mathematikern ein Festkalender geschaffen, der ihnen die Gedenktage ihrer Großen vor Augen führt. Eine praktische Neuerung ist es, daß das Buch einseitig gedruckt und so Platz für weitere Eintragungen geschaffen ist. Das Buch ist mit einem Bildnis des Verfassers geschmückt. *W. G.*

Vollständige vierstellige Logarithmentafel zum Gebrauch für Schule und Praxis von Dr. R. Mönkemeyer. 1913; Mor. Diesterweg, Frankfurt a. Main. Geb. 2 Mark.

Die vorliegende Tafel enthält außer den Logarithmen der Zahlen von 0—10000 und den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen von Minute

Digitized by Google

zu Minute noch die trigonometrischen Funktionen von 10 zu 10 Minuten, die Länge der Kreisbögen und Sehnen von Grad zu Grad, die Quadratzahlen der Zahlen bis 1000, sowie die Kubikzahlen, Quadrat- und Kubikwurzeln und natürliche Logarithmen der Zahlen von 1—100. Die Anordnung ist übersichtlich.

Arithmetik für die 6. Klasse der Gymnasien von J. Jacob. Wien, Deuticke, 1910.

Die Lehrbücher von Jacob sind durch Klarheit der Disposition, Beschränkung des Lehrstoffes und des Aufgabenmaterials auf das wesentlich Notwendige, durch sorgfältige Fassung der Lehrsätze und möglichste Reduktion ihrer Anzahl ausgezeichnet. Die arithmetische Aufgabe bildet hier zumeist einen speziellen Fall der allgemeinen Untersuchung eines bestimmten Funktionstypus, der durch graphische Darstellung hervorgehoben ist. An Besonderheiten in der Behandlung sei aus dem vorliegenden Bande des Lehrbuches folgendes hervorgehoben: Die komplexen Zahlen werden durch Zählung von Paaren ungleichartiger Objekte eingeführt, die Bedeutung von i wird erst durch die Multiplikationsvorschrift bestimmt. Die Differentialrechnung beginnt mit der Berechnung der Steigung einer Geraden und einer speziellen krummen Linie; es folgt die allgemeine Definition der ersten und zweiten Ableitung und ihre Anwendung zur Untersuchung der Steigverhältnisse verschiedener Funktionen. Für die Umkehrungsaufgabe der Differentiation wird die Eindeutigkeit bis auf eine Konstante durch den Hinweis darauf plausibel gemacht, daß zwei Kurven mit überall gleicher Steigung überall parallel, also in gleicher Höhendifferenz verlaufen müssen. Den Schluß bildet die Quadratur einer Fläche und der Zusammenhang ihres Wertes mit dem unbestimmten Integral. Der Beweis für diesen Zusammenhang ist allerdings weder streng noch klar; es wäre erst zu zeigen, daß die Vernachlässigungen trotz ihrer unendlichen Anzahl im Grenzübergang keine Differenz ergeben. Den auf die Infinitesimalrechnung vorbereitenden Abschnitt über Grenzwerte hält der Referent für didaktisch nicht sonderlich geglückt. Die Bedeutung des Grenzwertes dürfte nur dann klar werden, wenn man ihn zunächst für solche Stellen definiert, wo er einerseits nicht direkt als Funktionswert ersichtlich, anderseits aber doch für die Kenntnis der Funktion unentbehrlich erscheint, mithin eine Stelle im Endlichen, wo der definierende analytische Ausdruck, aber nicht die darzustellende Funktion unbestimmt wird. Bei den im Buch an erster Stelle verwendeten Funktionen $\frac{1}{x}$ und a^x tritt ein solches Ergänzungsbedürfnis nirgends ein. *F.*

Geometrie der Ebene von J. Travniček, für die 4. Klasse der Gymnasien. **Planimetrie und Stereometrie** für die Mittelstufe der Realschulen von F. Schiffner. Wien, Deuticke, 1910 und 11.

Die Darstellung der Planimetrie ist in beiden Büchern (die demselben Unterrichtswerk angehören) größtenteils wörtlich dieselbe. An der Disposition ist folgendes hervorzuheben: Die Lage- und Größenbeziehungen an Strecken, Bogen, Winkeln und Vielecken werden so weit wie möglich ohne Zuhilfenahme der Dreieckskongruenz, zum Teil mit Hilfe von Symmetrieeigenschaften behandelt; die Beziehungen: Kongruenz, Ähnlichkeit, Flächengleichheit sind somit an den Schluß verlegt. Von der euklidischen Grundlegung werden nur Reste

Digitized by Google

beibehalten; doch scheinen dem Referenten die gewählten Axiome nicht zweckmäßig zu sein. So ist der Grundsatz in dem Buch von Travniček: „Von einem bestimmten Punkt kann nach einer bestimmten Richtung nur eine Gerade gezogen werden" viel zu unbestimmt, als daß man bei der Begründung des Parallelensatzes sich auf ihn berufen könnte. Bei Schiffner wird der Parallelensatz „aus der Erfahrung" entnommen. Der Grundsatz: „zwei Bogen sind gleich, wenn sie aufeinandergelegt sich decken" ist eine Tautologie. Bei der Definition der Flächengleichheit müßte außer der Deckbarkeit durch Zerlegung auch die durch Addition zugelassen werden. Als Vorzug des Buches seien die zahlreichen Hinweise auf Instrumente und Methoden zu praktischer Messung erwähnt. Einen Nachteil bildet nach Ansicht des Referenten die Tendenz, eingebürgerte Fremdwörter, wie Parallele, Centriwinkel, Parallelogramm usw. durch deutsche Beziehungen zu ersetzen. *F.*

Essai de Géometrie Analytique Modulair à deuxe dimensions. Par Gabriel Arnoux. Essais de Psychologie et de Mètaphysique Positives. Paris, Gauthier-Villars, 1911. 6 fr.

Die etwas lang geratene Vorrede beginnt (ähnlich wie mehrere frühere Publikationen des Verfassers über verwandte Gegenstände) mit der Konstatierung, daß das Buch eigentlich auch von Laisant und Tarry mitverfaßt worden ist und einer weitläufigen Beschreibung des Vorgangs bei dieser gemeinsamen Arbeit.

Es handelt sich kurz gesagt um eine Geometrie der Gitterpunkte in der Ebene, wobei aber die Koordinaten nur nach einem (stets als ungerade Primzahl vorausgesetzten) Modul m genommen sind. Es gibt daher m^2 Punkte, $m+1$ Richtungen — nämlich die von (0,0) nach (1, μ), wo $\mu = 0, 1, \ldots m-1$ sein kann und nach (0,1) — ebensoviele Winkel zwischen zwei Richtungen jede Gerade hat m Punkte, unendlich ferne Elemente gibt es nicht, usw. Unter diesen Richtungen gibt es im Fall $m \equiv 1$ nach 4 zwei, die den isotropen (Minimal-) Richtungen der analytischen Geometrie entsprechen, nämlich, die von (0,0) nach (1, $\pm i$), wo $i^2 + 1 \equiv 0$ (m) ist. Sie bilden (wie die isotropen Richtungen) mit allen anderen Richtungen denselben und mit sich selbst einen unbestimmten Winkel, jede von ihnen, erfüllt mit sich selbst kombiniert, die Orthogonalitätsbedingung, sie stehen daher, wie man auch sagen kann, auf sich selbst senkrecht. Dieser Umstand tritt hier in einer außerordentlich hübschen Weise in Erscheinung. Betrachtet man nämlich alle m auf einer solchen isotropen Geraden gelegenen Punkte, so bilden diese ein quadratisches Netz. Die reellen Richtungen (es sind ihrer $m-1$) im Sinne der gewöhnlichen Geometrie, die nach dem Modul m als voneinander und von der isotropen Richtung nicht verschieden anzusehen sind (man könnte sie geradezu kongruent nennen, doch wird diese Ausdrucksweise im Buch nicht gebraucht), lassen sich also in Paare von wirklich (d. h. im gewöhnlichen Sinne) orthogonalen zusammenfassen. (Dieses Resultat wird mit der Kunstweberei in Zusammenhang gebracht.) Im Falle $m \equiv 3$ nach 4 hingegen fällt alles dies aus sofort ersichtlichem Grunde weg. Die Abstände zweier Punkte sind teils „reell", teils „imaginär", je nachdem nämlich $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$ Rest oder Nichtrest ist. Im Fall $m \equiv 1$ (4) können auch verschiedene Punkte den Abstand Null haben, wenn nämlich ihre

Digitized by Google

Verbindungsgerade eine isotrope Gerade ist. Nun kann man auch die Winkelfunktionen definieren und Polarkoordinaten einführen.

Die Punkte (x,y), für die $y = a^x$ ist, bilden eine logarithmische Kurve. Sie fällt ein wenig aus dem Rahmen heraus, da x jetzt nach dem Modul $m-1$ zu nehmen ist. Auch logarithmische Spiralen werden betrachtet.

Linien mit einer Gleichung von der Form $(x-a)^2+(y-b)^2 \equiv h$ heißen Kreise; ähnlich können überhaupt Kurven zweiter Ordnung definiert werden. Je nachdem eine solche $m+1$, m oder $m-1$ Punkte besitzt, heißt sie Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Diese seltsam scheinende Definition erweist sich doch als zweckmäßig, wenn auch der Kreis nur bei Moduln $\equiv 3$ (4) zu den Ellipsen, bei Moduln $\equiv 1$ (4) dagegen zu den Hyperbeln gehört. Überraschend groß ist die Anzahl der Varietäten der Kurven zweiter Ordnung und der Möglichkeiten, betreffend die Anzahl der Scheitel, Brennpunkte, Leitlinien usw.

An mehreren Stellen zeigt der Autor, der sein Werk sichtlich mit Liebe gearbeitet hat, seine Freude an der Paradoxie mancher Resultate, die auch in dieser Skizze gestreift ist. Wenn er freilich daraus die Folgerung zieht, der „misonéisme" drohe ihm Gefahr, so scheint mir diese Besorgnis nicht allzusehr begründet. Man könnte fast eher finden, das Buch enthalte zum Teil bekannte Resultate in neuer, freilich sehr eleganter und frappierender Gewandung. Jedenfalls wäre noch abzuwarten, ob die geometrische Betrachtungsweise vielleicht ihrerseits der Zahlentheorie neue Gedanken zuzuführen vermag.

Dr. Schrutka.

Kühtmanns Rechentafeln. Ein handliches Zahlenwerk mit zwei Millionen Lösungen, die alles Multiplizieren und Dividieren ersparen und selbst die größten Rechnungen dieser Art in wenige Additions- oder Subtraktionszahlen auflösen. Nebst Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1 bis 1000. 476 Seiten 24×18 *cm*. Preis in abwaschbarem Leinenband 18 Mark. Verlag von Gerhard Kühtmann in Dresden, 1911.

Nach dem Vorwort sollen diese Tafeln der Produkte bis 1000×1000 den Nachteil der Unhandlichkeit vermeiden, der anderen gleichweit reichenden Werken anhaftet. Es haben ja allerdings z. B. die rühmlichst bekannten Crelleschen Rechentafeln (in der von Oskar Seeliger besorgten neuen Ausgabe von 1907) ein Format von 38×26. Man kann aber mit Recht und Fug behaupten, daß daran wenig oder gar nichts gelegen ist, weil derartige Tafelwerke ja nicht für die Westentasche bestimmt sind. Man pflegt sie nur zu ausgedehnten Rechnungen zu verwenden, die am Schreibtisch ausgeführt werden, wo es in der Regel auf ein paar Quadratzentimeter mehr oder weniger nicht ankommt.

Natürlich wäre trotz alledem ein handlicheres Format alles eher als ein Nachteil, wäre es nur hier nicht mit einer wesentlich umständlicheren Benützungsweise allzu teuer erkauft. Die vorliegende Tafel enthält für jeden Faktor von 1 bis 1000 zweihundert ein- bis vierstellige Tafelzahlen, während die genannten Crelleschen Rechentafeln tausend ein- bis vierstellige und hundert zweistellige anführen. Diese Reduktion ist auf folgende an sich recht beachtenswerte Art erzielt. Ist M der feste Faktor und $N = 100\,a + 10\,b + c$ der andere, bewegliche, und bezeichnet man in bekannter Weise die größte in x enthaltene ganze

Digitized by Google

Zahl mit $E(x)$ und $x-E(x)$ mit $R(x)$, so zerfällt das Produkt $M\,N$ in den durch 100 teilbaren Bestandteil

$$100\,P = 100.\,E\left(M.\ \frac{10\,a+b}{10}.\right)$$

und den Bestandteil

$$Q = 100.\,R\left(M.\frac{10\,a+b}{10}\right)+M.c$$

P und Q, die beide höchstens vierstellig sind, finden sich in der Tafel. Nun ist offenbar

$$R\left(M.\frac{10\,a+b}{10}\right) = \mathrm{R}\left(M.\ \frac{b}{10}\right),$$

also

$$Q = 100\,\mathrm{R}\left(M.\frac{b}{10}\right)+M.c$$

und man erkennt, daß P nur von den beiden Ziffern a und b, Q nur von den beiden Ziffern b und c abhängt, jedes von ihnen daher in der Tat hundert Werte aufweist. Um das Produkt $M\,N = P+Q$ zu erhalten, hat man daher eine Addition auszuführen, die sich auf zwei Stellen, nämlich die Hunderter und die Tausender bezieht. Dies ist eine bedeutende Komplikation gegenüber den Crelleschen Tafeln, bei denen man nur einen ein- bis vierstelligen und einen zweistelligen Bestandteil nebeneinanderzusetzen hat. Besonders unangenehm macht sich diese Komplikation bei der Division fühlbar.

Die Weglassung der durch 10 teilbaren Faktoren M vermindert freilich den Umfang des Werkes um ein Zehntel, hat jedoch mancherlei Unbequemlichkeiten im Gefolge, die ja bekannt sind.

Aus diesen Gründen, zu denen noch der Preis kommt (die Crelleschen Tafeln kosten nur 15 M), scheint es mir nicht, als ob die vorliegenden Tafeln Aussicht hätten, die vorhandenen zu verdrängen.

Wie es mit der Korrektheit steht, kann natürlich nur längere Benützung lehren. Ich habe als Stichproben 20 Multiplikationen gemacht und die Schemata der 100 Zahlen P und der 100 Zahlen Q für je einen Wert von M durchgerechnet und hiebei keinen Fehler gefunden.

Die Ausstattung, das Letternmaterial und der Druck sind vortrefflich. Es sind gleich hohe Ziffern verwendet, in meinen Augen ein Vorteil, während allerdings von vielen Seiten die englischen ungleichhohen vorgezogen werden.

Dr. Schrutka.

The Theory of Determinants in the historical order of development. Par Thomas Muir, Vol. II. The period 1841 to 1860. London, Macmillan & Co. 1911.

Eine Fortführung dieses außerordentlich wertvollen Sammel- und Nachschlagewerks für die Zeit von 1841 bis 1860. Der Stoff ist in Kapitel geteilt, welche gewisssen besonderen Forschungen entsprechen, so z. B. Wronskische, Jacobische Determinanten und dergl. Einzelne davon greifen auch auf die Zeit vor 1841 zurück. Ein Autorenregister bildet den Schluß; Cayley, Sylvester und Brioschi liefern mit 47, 29, 26 Titeln die meisten Beiträge zu den analysierten Abhandlungen, deren im Ganzen 310 sind. *Dr. Schrutka.*

Digitized by Google

Der Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers und des Präzisionsschiebers. Von Karl Treven. Sonderabdruck aus dem Lehrbuch der Mathematik für höhere Gewerbeschulen, herausgegeben von Schulrat Wilhelm Rulf. Wien und Leipzig, Franz Deuticke, 1913.

Auf 28 Seiten wird hier eine kurze Darstellung der Operationen mit den üblichsten Arten von Rechenschiebern geboten. Es handelt sich mehr um Formulierung der Rechenregeln als um deren Begründung. Eine Reihe von Aufgaben dient zur Einübung.

Die auf S. 13 in § 18 gegebene Vorschrift für Winkel zwischen 3°30′ und 5°44′ die zu ungenaue Näherung $\tan\varphi \doteqdot \sin\varphi$ durch $\tan\varphi \doteqdot 1{\cdot}003 \sin\varphi$ zu ersetzen, indem man sin φ um 3‰ (nicht 3%, wie dort zweimal steht, — das Beispiel ist richtig—) erhöht, um tan φ zu erhalten, beruht auf dem Mittelwert $\cos\varphi \doteqdot \frac{1}{1{\cdot}003} = 0{\cdot}99701$, während cos 3°30′ = 0·99813, cos 5°44′ = = 0·99500 ist. Die Vorschrift bedeutet also (namentlich auch wegen ihrer Willkürlichkeit) keine besondere Verbesserung. *Dr. Schrutka.*

Einführung in die Differential- und Integralrechnung für höhere Techniker. Von Dipl. Ing. Philipp Häfner. Stuttgart, Ferdinand Enke, 1912. 16 M.

Es werden die Prinzipien der graphischen Darstellung von funktionalen Abhängigkeiten, der Differentiation und der Integration auseinandergesetzt; ziemlich kurz werden die Polarkoordinaten, die Krümmung ebener Kurven und in einem Anhang die Reihenentwicklungen und Approximationen erwähnt; endlich werden in drei Kapiteln allerlei Anwendungen behandelt. Wesentlich neue Gesichtspunkte bringt die Darstellung nicht. Sie ist sehr ausführlich gehalten, um verständlich zu sein; so wird gleich anfangs eine Fülle der verschiedenartigsten Diagramme zum Ausgangspunkte genommen. (Fettdruck, eingerahmte Formeln und Figuren sind geradezu verschwenderisch angewendet.) Dagegen läßt die Präzision des Ausdrucks ganz bedeutend zu wünschen übrig. Es wird z. B. der uralte, ewig neu mißlingende Versuch wiederholt, aus den „unendlich klein gewordenen" Größen etwas zu machen. (S. 31.) Der Vorteil des Zeichenprinzips bei der Koordinatenverschiebung wird ganz ignoriert; umständlich wird zwischen Verschiebung nach oben und unten unterschieden (S. 47) $y^2 = 12x$ wird die inverse Funktion zu $x^2 = 12y$ genannt (S. 56); „Überall, wo Steigung vorliegt, ist $tg\,\alpha = +, \ldots$", „Wächst die Steigung, dann wächst $tg\,\alpha$ positiv, . . ." fettgedruckt und eingerahmt (S. 77). „Ersetzen wir . . . den Hauptexponenten 5 und die bei den wachsenden Potenzen von x bestehenden Zahlenfaktoren, welche vom Hauptexponenten abhängig sind, durch allgemeine Buchstaben . . ." (S. 90, es ist vom binomischen Satz die Rede, mit den allgemeinen Buchstaben sind die Binomialkoeffizienten $n_1, n_2, \ldots, nn$ gemeint.) Die Exponentialfunktion a^x wird durch fünf Beispiele erläutert, die sämtlich nur für ganzzahlige x einen Sinn haben (S. 103—107). S. 136, 137 werden 14 Aufgaben vom Typus „$y = \frac{3}{8}\pi = \arcsin x$, wie groß ist x?" gestellt. Auch geradezu Falsches findet sich, z. B. die Behauptung auf S. 35: „Kommt x in

Digitized by Google

der n. Potenz vor (in einer ganzen Funktion), so ist die Kurve $(n-1)$mal gekrümmt"; gemeint ist, daß $n-2$ Wendepunkte auftreten.

Diese Auslese zeigt wohl, daß das Buch keine Bereicherung der Literatur bedeutet. *Dr. Schrutka.*

Raumlehre für die Unterstufe der Realschulen von F. Schiffner, Wien, Deuticke, 1910.

Konsequente Verbindung räumlicher und ebener Betrachtungen, Hinweise auf geometrische Formen an den Gegenständen der gewöhnlichen Umgebung und Betonung praktischer Meßverfahren bilden die Vorzüge des Buches. Häufung von Worterklärungen und zweifelhafte Definitionen einfacher Begriffe im ersten Teil sind der Tradition zuzuschreibende Mängel. *F.*

Praktische Mathematik von R. Neuendorff, 1. Teil, B. G. Teubner, 1911 („Aus Natur und Geistesweit" 341).

Aus Volks-Hochschulkursen hervorgegangen, ergibt die vorliegende Schrift eine leichtfaßliche und anregende Einleitung in das graphische und numerische Rechnen; sie setzt kaum irgendwelche mathematischen Kenntnisse voraus. Graphische Darstellungen, Flächen- und Körpermessungen (auf konstruktivem, rechnerischem und mechanischem Wege), abgekürztes Rechnen, Verwendung von Tabellen und mechanischen Rechnungsbehelfen werden in ihren Grundsätzen und durch Anwendung auf einfache Beispiele erläutert. Für Mittelschullehrer dürfte besonders das von Interesse sein, was der Verfasser über die ausgedehntere Verwendung von Tabellen im Unterricht und über nomographische Methoden sagt. Zur Einführung in das ganze Gebiet ist das kleine Buch durchaus zu empfehlen. *F.*

Mathematisches Unterrichtswerk von R. Suppantschitsch. Raumlehre für die IV. Klasse der Realschulen, Geometrie für die IV. und V. Klasse der Realschulen; Arithmetik für die Mittel- und Oberstufe (2 Bände, Ausgaben für Gymnasien und Realschulen).

Raumlehre. Geometrie. Die Raumlehre für die 4. Klasse bringt eine klare, übersichtliche Darlegung der Konstruktion von Kegelschnitten und der ersten Elemente der darstellenden Geometrie, einschließlich einfacher Schattenkonstruktionen. Über die „Geometrie" für die Mittelstufe ist schon früher berichtet worden. — Hinsichtlich der Arithmetik-Lehrbücher für die Mittel- und Oberstufe sei von vornherein erklärt, daß sie, wie kaum ein anderes Unterrichtswerk, den Eindruck einer umfassenden und genauen Arbeit machen, den Anregungen der neueren Fachliteratur überall Folge geben, im theoretischen Text, wie im Aufgabenmaterial eine reiche Auswahl bieten und, soweit der Referent bemerkt hat, nirgends nennenswerte Unrichtigkeiten enthalten. Alle Fragen, in welchen erfahrungsgemäß in der Praxis Unsicherheit oder Irrtümer vorkommen, finden eine besonders ausführliche und eindringliche Behandlung. Da die Lehrbücher des Verfassers teilweise neuen Zielen zustreben, muß sich die Besprechung unter Übergehung von Einzelheiten auf ihre grundsätzliche Eigenart beziehen. Diese ist eine wesentlich extensive, das heißt, sie besteht in der Einfügung neuer Stoffgruppen unter vollständiger Beibehaltung und Erweiterung des traditionellen Stoffes, wobei die Disposition des letzteren ebenfalls keine beträchtliche Änderung erfährt. So ist z. B. die unter dem Titel der „Allgemeinen

Digitized by Google

Arithmetik" bekannte ausführliche Darlegung der Rechengesetze und ihrer Permanenz als selbständiger Abschnitt beibehalten und nicht, wie der neue Lehrplan es zu verlangen scheint, auf die genauere Erklärung der bei den Gleichungen auftretenden Operationen reduziert worden; die Theorie der Grundoperationen wird hier sogar noch wesentlich vertieft, indem die Frage der Existenz des Resultats und die Axiome der Monotonie ausführlich erläutert werden. Schon hier, wie im folgenden erhält man den Eindruck, daß die Tendenz des Buches ungeachtet aller Anschauungsbehelfe eine wesentlich arithmetisierende ist, d. h. die Zurückführung aller Gesetze auf den Zahlbegriff anstrebt. Wie die Lehre von den algebraischen Operationen, ist auch die von den ganzen Zahlen, insbesondere im Aufgabenmaterial, reichlicher bedacht als anderswo. Das Rechnen mit komplexen Zahlen wird als Theorie der Zahlenpaare mit spezieller Multiplikationsvorschrift behandelt. Die Lehre von den algebraischen Gleichungen wird durch Aufnahme der Diskussion von Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten vermehrt. Eine dankenswerte Erweiterung bildet die ausführliche Besprechung der proportionalen Abhängigkeiten, die trotz ihrer Wichtigkeit in den meisten Büchern recht oberflächlich behandelt werden, und die des Zusammenhanges zwischen den Progressionen und den nach den gleichen Gesetzen wachsenden Funktionen einer stetig veränderlichen Größe. Die Untersuchung der Funktionen auf Grund ihrer graphischen Bilder kommt nicht nur voll zu ihrem Recht, sondern ist nach Ansicht des Referenten sogar etwas zu weit getrieben: Für die Diskussion eines und desselben Funktionentypus, z. B. des quadratischen, werden so viele Bilder vorgeführt und noch mehr vom Schüler verlangt, daß die Schulpraxis schwerlich den Anforderungen des Verfassers nachkommen kann; auch dürfte es nicht nötig sein, denn an der einen Figur der Funktion $y = x^2$ könnten durch Maßstabsänderung alle Funktionen $y = kx^2$ und durch Hinzufügung der Geraden $y = -ax - b$ die ganzen Vorzeichen-Diskussionen erledigt werden. Die Untersuchung der zu bestimmten Koeffizientenänderungen gehörigen Verschiebungen der Bilder gehört ohnehin eher der analytischen Geometrie an.

Das große Gewicht, welches der Verfasser, gewiß mit Recht, auf die logische Schulung legt, bekundet sich darin, daß er gewisse Überlegungsformen einer eingehenden Besprechung unterwirft, z. B. den Schluß von n auf $n + 1$ (bei Gelegenheit der Progressionen), einige mathematische Trugschlüsse behandelt, ferner indem er mit großem Nachdruck darauf hinweist, daß die Erweiterungen des Zahlen- und Operationsraumes freie Festsetzungen sind und dgl. (Gegen die Festsetzungen könnten allerdings mitunter Einwände erhoben werden: z. B. ist der Umstand, daß die Operationen erster Stufe bei positiven Zahlen ebenso verlaufen wie bei absoluten, kein hinreichender Grund dafür, daß jene bei der Multiplikationsvorschrift vor den negativen bevorzugt werden; vielmehr kommt die Analogie mit den absoluten Zahlen den negativen ebenso gut zu, wie den positiven und die Multiplikationsvorschrift ist tatsächlich reine Willkür. Die entsprechende Vorschrift für komplexe Zahlen (als Zahlenpaare) erscheint in der vorliegenden Darstellung zunächst überhaupt nicht motiviert. Anderseits ist es nicht Folge einer „Festsetzung", daß die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, sobald $a = 0$ wird, die Wurzel $x = -\frac{c}{b}$ behält). — Die größte Energie hat der Verfasser auf die Darlegung des Grenzbegriffes verwendet und dabei

Digitized by Google

den Grundsatz vertreten, „daß demjenigen, der eine korrekte mathematische Betrachtung nicht versteht, auch eine unkorrekte nichts nützen kann". Dies ist gewiß richtig, sogar mit der Verstärkung, daß eine unkorrekte Deduktion dem Denken des Schülers schadet. Soll aber jener Grundsatz als Argument für die überaus langen und eingehenden Ausführungen des Buches über irrationale Zahlen, Konvergenz und Stetigkeit gelten, so dürfte eine Verwechslung zwischen „Strenge" und „Allgemeinheit" vorliegen; ist die erstere unentbehrlich, so scheint der Verfasser in der letzteren Hinsicht viel zu weit gegangen und dadurch mitunter in Schwierigkeiten geraten zu sein, aus welchen kein praktischer Ausweg gefunden werden konnte. Der Referent betrachtet eine Deduktion als „streng", wenn sie, auf irgendein Objekt der behandelten Klasse angewendet, ein richtiges Resultat ergibt; die Notwendigkeit einer umständlichen Deduktion wird dem Schüler einleuchten, wenn eine anscheinend näher liegende Begründung, auf ein besonderes Objekt der Klasse erstreckt, zu einem Widerspruch führt. Die didaktische Aufgabe besteht nun darin, die Grenzen der zu behandelnden Klasse so eng zu ziehen, daß man ihren Inhalt, ohne Unentbehrliches auszuschließen, durch möglichst einfache Deduktionen behandeln könne. Die Überlegungen des Buches sind aber zum großen Teil auf solche Klassen von mathematischen Objekten zugeschnitten, deren Grenzen weit über das hinausreichen, was für den elementaren Unterricht notwendig oder nützlich ist und führen dadurch Schwierigkeiten ein, die dem Schüler, selbst wenn er sie überwindet, als künstlich eingeschleppt erscheinen müssen. So wird die irrationale Zahl ganz ausführlich durch den Schnitt im System der rationalen Zahlen definiert. Daß die eingehende Untersuchung des reellen Zahlensystems auf der Schule schwerlich auszuführen ist, gibt der Verfasser selbst stillschweigend zu indem er den Permanenzbeweis für die Operationsgesetze, den Beweis dafür daß ein Schnitt im vollständigen System der reellen Zahlen keine neue Erweiterung bilde, und anderes, was zu einer solchen Untersuchung gehören würde, fortläßt; gibt man dies aber zu, so bildet die gegebene Einführung eine unverhältnismäßig schwerfällige Basis für den Aufbau recht einfacher Anwendungen für die Existenz der Wurzel, der allgemeinen Potenz und einiger anderer einfacher Funktionen. Denselben Dienst würde aber auch die Definition der reellen Zahl durch den unendlichen Dezimalbruch, eventuell durch eine andere Reihe positiver Brüche, deren Summe nicht über jede Grenze wächst, leisten. Der Verfasser beweist z. B. die Existenz von 10^x bei irrationalem x durch Zurückgehen auf den Schnitt, mithin die Existenz eines Grenzwertes der Funktion wenn sich eine rationale Wertfolge r dem gegebenen Wert x nähert. Dasselbe aber ergibt sich unmittelbar daraus, daß sich 10^r beliebig wenig ändert, wenn man r hinreichend wenig ändert; durchläuft also r Näherungswerte eines unendlichen Dezimalbruches, so können sich auch nur beliebig tiefe Stellen des Dezimalbruches 10^r ändern, womit die Herstellung eines solchen Bruches für 10^x gezeigt ist. Ist damit die Lückenlosigkeit der Exponentialkurve klar gemacht, so ergibt eine bloße Spiegelung die Existenz des Logarithmus. Ein ähnlicher Einwand drängt sich gegenüber der ausführlichen Untersuchung über konvergente, oszillierende und ins Unendliche divergierende Reihen auf: Entschließt man sich zu einer dem elementaren Standpunkt entsprechenden Reduktion der Klassen von Reihen, von welchen die Rede sein soll, so genügt als Kriterium das der beständigen Konvergenz und man kann auf „ε und δ"

Digitized by Google

verzichten; der Strenge wird kein Eintrag getan, wenn man nur noch feststellt, daß außer beständig konvergierenden und unbegrenzt wachsenden Folgen noch andere existieren, die beiseite bleiben. Auch der Begriff der Stetigkeit wird im Hinblick auf eine viel zu große Klasse von Möglichkeiten aufgestellt: die Unterscheidung zwischen stetigen und unstetigen unabhängigen Veränderlichen ist sogar theoretisch belanglos, ganz besonders aber in der Lehre von den elementaren Funktionen. Ja, der Begriff der Stetigkeit der Funktion selbst (für den drei dem Wortlaut nach verschiedene, aber gleichwertige Definitionen gegeben werden) ist im Hinblick auf die zu untersuchende Klasse von Objekten nicht von großer Bedeutung, da wohl in keiner elementaren Aufgabe die Frage, ob eine Funktion stetig ist oder nicht, auf Grund des Kriteriums zu entscheiden ist; der Stetigkeitsbegriff könnte daher recht wohl auf seinen anschaulichen Gehalt reduziert werden. Der Verfasser zieht freilich auch — des Gegensatzes halber — eine willkürlich zusammengesetzte und dadurch unstetige Funktion in den Kreis seiner Betrachtung. Sowohl für die Stetigkeit einzelner Funktionen wie für die Existenz der Grenzwerte von Summen, Produkten usw. von Funktionen führt der Verfasser den Beweis mittels jener bekannten Überlegung, die er „die ε-Probe" nennt. Abgesehen davon, daß dieses Verfahren den wenigsten Schülern einleuchten dürfte, ist es auch kaum der Mühe wert, Konvergenzsätze eigens zu beweisen, die ihre einzige Anwendung beim Differenzieren finden und dort leicht einzusehen sind, übrigens zum Teil (z. B. durch Benützung des Geschwindigkeitsbegriffes) anschaulich zu machen wären. — Wenn im vorstehenden gegen gewisse Partien des Lehrbuches eingewendet worden ist, daß sie über den Rahmen der Schulmathematik hinausgehen, so könnte dem gegenüber auf das Begleitwort des Verfassers hingewiesen werden, das dem Lehrer „Stoff und Methoden nach eigenem Ermessen" zu wählen, vorschlägt; aber abgesehen davon, daß gerade in der Zeit einer Umwandlung des Unterrichtsverfahrens ein Schulbuch eher dem unmittelbaren praktischen Gebrauch angepaßt sein sollte, statt nach der Art eines Handbuches Stoff zur Wahl zu bieten, scheint dem Referenten zu Gunsten weniger fruchtbarer Partien manches sehr wünschenswerte fortgeblieben zu sein: so z. B. die näherungsweise Auflösung von Gleichungen und vor allem die in der Physik unentbehrliche Behandlung der Summen unendlich kleiner Bestandteile und ihre Berechnung mit Hilfe des unbestimmten Integrals, wie denn überhaupt eine größere Berücksichtigung der physikalischen Anwendungen in den modernen Lehrbüchern der Mathematik zu wünschen wäre. — Zusammenfassend glaubt der Referent die Ansicht ausdrücken zu dürfen, daß die vorliegenden Lehrbücher für jeden Lehrer von großem Interesse und reich an Anregung sein werden; wie sich ihre Anwendung im Unterricht gestalten kann, wird die Erfahrung einer längeren Praxis zeigen müssen. *F.*

Arithmetik und Algebra für die Oberstufe der Mittelschulen von Močnik-Zahradníček. Ausgaben für Gymnasien und Realschulen. F. Tempsky. Wien, 1911.

Das altbekannte Lehrbuch ist in neuer, den gegenwärtigen Anforderungen durchaus entsprechender Bearbeitung erschienen. Es ist in seiner gegenwärtigen Form ebensogut für einen Unterricht geeignet, der sein hauptsächliches Ziel in formal rechnerischer Gewandtheit sieht, wie für einen Lehrgang, der in

Digitized by Google

erster Linie das Verstehen der Operationen vom funktionalen Standpunkt aus anstrebt. Jenem Ziel dient eine überaus reichliche Menge mehr und weniger komplizierter algebraischer Aufgaben, diesem die diskutierende und graphisch darstellende Behandlung der Operationsobjekte. Der doppelte Zweck, dem das Buch somit dient, rechtfertigt seinen großen Umfang und einen gewissen Mangel an Einheitlichkeit im Aufbau. Aus dem Inhalt seien folgende Abschnitte erwähnt. Auf die erfahrungsgemäß bestehende Notwendigkeit, am Beginn der Oberstufe die Fertigkeit der Schüler im algebraischen Rechnen gründlich aufzufrischen, wird durch einen 64 Seiten umfassenden Wiederholungsabschnitt Rücksicht genommen. Die Lehre von den Potenzen und Wurzeln führt zu einer ziemlich eingehenden Besprechung der irrationalen und der komplexen Zahlen; hier muß erwähnt werden, daß der gelieferte Beweis für die Permanenz der beiden Vertauschungsgesetze keine hinreichende Begründung des Rechnens mit irrationalen Zahlen ist; soll eine derartige Begründung überhaupt geliefert werden, so müßte sie mit der Erklärung beginnen, was unter einer Summe, einem Produkt usw. solcher Zahlen zu verstehen ist, auch müßten die übrigen Operationsgesetze gleichmäßig berücksichtigt werden. Den quadratischen Gleichungen geht die Diskussion der quadratischen Funktion und ihre graphische Behandlung voraus; ein gewiß nützlicher Ausblick auf die Verwendbarkeit der Methode wird dadurch geliefert, daß die kubischen Gleichungen der analogen Behandlung unterzogen werden. Die Elemente der Infinitesimalrechnung sind in diesem Buch größtenteils exakt dargestellt und finden eine recht ausgedehnte Anwendung. Speziell sei bemerkt, daß der Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral durch den Beweis dafür hergestellt wird, daß die anschauungsmäßig gegebene Ordinatenfläche die Ordinate zur Ableitung hat. Die darauffolgende Approximation des bestimmten Integrals durch Streifenteilung der Fläche ist zwar ganz korrekt durchgeführt, aber mit Rücksicht darauf, daß für die Berechnung bestimmter Integrale im folgenden doch nur die primitiven Funktionen verwendet werden, eigentlich überflüssig. Im weiteren wird aus dem binomischen Satz die e-Reihe abgeleitet (der Beweis ist nicht vollständig), hieraus die Differentiationsformel für den Logarithmus, seine Reihenentwicklung und numerische Berechnung gewonnen. Damit ist wohl dem Umfang nach das Maximum dessen vorgezeichnet, was der Mittelschulunterricht bringen kann. *F.*

Determinanten. Von Paul B. Fischer. (Sammlung Göschen 402.) 2. Aufl., 136 S. G. J. Göschen, Leipzig 1912. 90 Pfennig.

Dieses Werkchen weist gegenüber der ersten Auflage eine Reihe wesentlicher Verbesserungen auf. Die Definition der Kombinationen ist allerdings noch immer eigentümlich gefaßt. Sehr wünschenswert wäre es wohl auch gewesen, wenn der Abschnitt über lineare Gleichungen ausführlicher wäre. Kapitel II hingegen, das die für das Rechnen hauptsächlichsten Gesetze einschließlich der Entwicklung nach Unterdeterminanten und des Multiplikationstheoremes enthält, wird für den Anfänger ganz brauchbar sein.

Einleitung in die Funktionentheorie. Von Max Rose. (Sammlung Göschen 581.) 139 S. G. J. Göschen, Leipzig 1912. 90 Pfennig.

Das kleine Büchlein, das zuerst das Rechnen mit komplexen Zahlen behandelt, sodann auf die Funktionen einer komplexen Veränderlichen eingeht,

Digitized by Google

um mit einer Darstellung der Reihen mit komplexen Gliedern, vor allem der Potenzreihen, zu schließen, weicht in seiner Behandlungsweise in manchen Stücken von der gebräuchlichen ab. Nicht recht verständlich ist es, weshalb der Verfasser die Aufstellung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen die sich doch in wenigen Zeilen erledigen läßt, unterläßt. Zum Vorteile gereicht dem Werkchen die sorgfältige Behandlung, die der Verfasser der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen im Abschnitte: „Spezielle Potenzreihen" angedeihen läßt.

Analytische Geometrie des Raumes. Von Max Simon. (Sammlung Göschen 89.) 3. Aufl., 208 S. G. J. Göschen, Leipzig 1912. 90 Pfennig.

Es zeigt von der Brauchbarkeit dieses Büchleins, daß es bereits in dritter Auflage erscheint. Der Inhalt ist äußerst reichhaltig. Wenn der Verfasser auch das rechtwinklige, dreiachsige Koordinatensystem zu Grunde legt und die homogenen Koordinaten mit Ausnahme der Abschnitte V. und VI. fast ganz beiseite läßt, so hat er es doch verstanden, zahlreiche Begriffe, die ihren Ursprung der projektiven Geometrie verdanken, in seine Darstellung einzubeziehen.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. 2. Aufl., 175 S. — **Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes.** Von Prof. O. Th. Bürklen. 2. Aufl., 109 S. (Sammlung Göschen 256, 309.) G. J. Göschen, Leipzig 1912. Je 90 Pfennig.

Diese Sammlungen, die ziemlich reichhaltig sind und neben Aufgaben über Gebilde 1. und 2. Grades auch eine Reihe von Beispielen über einige gebräuchliche algebraische und transzendente Kurven und Flächen, insbesondere mit Rücksicht auf ihre Entstehungsweise enthalten, liegen nunmehr in zweiter Auflage vor.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Dr. Fr. Junker. (Sammlung Göschen 147.) 3. Aufl., 135. S. G. J. Göschen, Leipzig 1912. 90 Pfennig.

Diese Aufgabensammlung enthält 437 Beispiele, die zum großen Teil der Geometrie entnommen sind, und behandelt hauptsächlich das einfache Integral, während die Doppelintegrale mit 13 und die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit 15 Beispielen etwas stiefmütterlich bedacht sind. Nicht recht begreiflich ist es, wie in diese Sammlung, die ja nur für den ersten Anfang bestimmt sein kann und hier wohl auch gute Dienste leistet, Beispiele kommen von der Art $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, noch dazu ohne Anleitung, zur Ausführung.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Hack. (Sammlung Göschen, Nr. 508.) G. J. Göschen, Leipzig 1912.

Der in dem vorliegenden Bändchen gegebene Abriß der Wahrscheinlichkeitsrechnung umfaßt nebst rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Gegenständen auch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Fehlertheorie und die mathematische Statistik. Bedenkt man, daß dieses Bändchen den herkömmlichen Umfang aller Veröffentlichungen der Sammlung Göschen besitzt,

Digitized by Google

so mag wohl von vornehinein das Thema als etwas zu weit abgegrenzt erscheinen. In der Tat ist trotz der anerkennenswerten Darstellung fast in jedem Abschnitte die Vorsicht bei der Benützung des zur Verfügung gestandenen Raumes herauszuspüren. Die Auswahl des Stoffes leidet unter demselben Mangel. Die ansonsten oft überflüssig ausführlich behandelten Beispiele fehlen hier ganz, das Poisson'sche Gesetz fehlt ebenfalls. Bedarf also für jene Studierenden, welche mit den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun haben, dieses Buch der Ergänzung durch andere Lehrbücher, so mag es immerhin als orientierendes Einführungsmittel alsgeeignet bezeichnet werden.

Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik von Prof. H. C. E. Martus, Geh. Regierungsrat, von 1880 bis 1902 Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Große Ausgabe mit 100 Figuren im Texte und 2 Tafeln. Vierte Auflage mit vielen Zusätzen, bearbeitet nach dem Stande der Wissenschaft im Jahre 1911. Dresden und Leipzig 1912. C. A. Kochs Verlagsbuchhandlung (H. Ehlers). 8° XX und 502 pp.

Eine neue Auflage dieses rühmlichst bekannten Buches, dessen dritte Auflage in dieser Zeitschrift (Jahrgang 1905, II) besprochen wurde. Anordnung und Gliederung des Stoffes blieben unverändert und nur einzelne Kapitel erfuhren, den neuen Fortschritten der Astronomie und Geodäsie entsprechend, Ergänzungen und Umarbeitungen, die das Buch fast um zwei Bogen stärker machten. Von solchen Einschaltungen seien erwähnt: Die Anwendung der Funkentelegraphie für den Zeitdienst, zwei Figurentafeln mit der Darstellung der Wanderung des Nordpols auf der Erdoberfläche für den Zeitraum von 1900 bis 1910, die Bestimmung der Parallaxe der Sterngruppe der Hyaden nach der Methode von Lewis Boß unter der Annahme, daß ihre Eigenbewegungen parallel gerichtet sind und daher einem Fluchtpunkte zustreben, u. a. Im ganzen ein Buch, das durch das streng heuristische Verfahren des Verfassers, durch die Art und Weise, wie er die Erscheinungen durch Bilder veranschaulicht und so selbst in die verwickeltsten Verhältnisse Klarheit bringt, in ganz außerordentlicher Weise den Unterricht in der astronomischen Geographie zu beleben geeignet ist. Gegen diese Vorzüge verschwinden die kleinen hie und da vorkommenden Entgleisungen, auf welche in vielen Rezensionen schon hingewiesen wurde, die aber trotzdem auch in der neuen Auflage wieder vorhanden sind. Jeder Leser wird wohl selbst imstande sein, sie zu verbessern.

Wien. *Oppenheim.*

Astronomische Erdkunde von Professor Otto Hartmann. Vierte, umgearbeitete Auflage. Mit 36 Textfiguren, 1 Sternkarte und 88 Übungsaufgaben. Stuttgart und Berlin, Fr. Grub; Verlag 1912 XI, 179 pp. 8°.

Ein kurzes Lehrbuch der astronomischen Geographie, das, was Einteilung und Anordnung des Stoffes betrifft, manchen neuen Gedanken enthält, den Schüler zu eigenen Beobachtungen und Verwertung dieser Beobachtungen anzuregen versucht, aber wegen seiner gedrängten Darstellung für den Mittelschüler zu schwer sein dürfte. Als Leitfaden beim Unterrichte in der Hand des Lehrers wird es jedoch seinen Zweck erfüllen.

Digitized by Google

Seinem Inhalt nach gliedert sich das Buch in zwei Abschnitte, die Erscheinungen und die Erklärungen. Der erste Abschnitt bespricht die Erscheinungen, die man am Sternenhimmel wahrnimmt. Daran reihen sich die Schilderung der Erscheinungen auf der Erdoberfläche, die Lehre von der Kugelgestalt der Erde, die Berechnung ihrer Größe und Masse und endlich die Lehre von der Messung der Zeit. Der Abschnitt von den Erklärungen gibt die bekannten Beweise für den Übergang vom geozentrischen zum heliozentrischen Weltsystem und einen Überblick über das Planetensystem nnd die Fixsterne.

Wien. *Oppenheim.*

Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie mit vollständigen Lösungen. Zum Gebrauch für den Unterricht an höheren Schulen sowie beim Selbststudium. Von Dr. ing., Dr. phil. Carl Schoy, Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen a. d. R. Mit 24 Figuren auf einer Tafel. Hamburg, Henri Grand. 1913. 4°, IV und 89 pp.

Die Aufgabensammlung aus der mathematischen Geographie dürfte eine Lücke in der deutschen Literatur über Aufgaben aus der angewandten Mathematik ausfüllen. Sie geht wohl weit über das Pensum aus der sphärischen Trigonometrie heraus, das an unseren österreichischen Mittelschulen vorgeschrieben ist. Aber der Verfasser wendet sich mit ihr nicht bloß an Schüler und Lehrer dieser Anstalten, sondern auch an Studierende der Hochschulen, um für ein intensiveres Studium der sphärischen Trigonometrie, die trotz ihrer reizvollen Anwendungen auf Astronomie und Nautik immer noch ein Stiefkind des mathematischen Unterrichtes an den Mittelschulen ist, Propaganda zu machen.

Wodurch aber dieses Buch vor ähnlichen Aufgabensammlungen hervorsticht, ist die geschichtliche Einleitung, gewissermaßen der Heimatschein, den der Verfasser jeder Aufgabe beigibt. Ref. erwähnt hier insbesondere die Aufgabe 1., die auf Hipparch und Ptolemäus zurückgeht, die Aufgabe 6, als das Douwessche Problem bekannt, die Aufgabe 12, die griechische Mathematiker erdacht haben, die Aufgabe 28, das Problem der kürzesten Dämmerung, deren Literatur in der Geschichte der Mathematik außerordentlich reichhaltig ist, die Aufgabe 34, die von Mästlin, dem berühmten Lehrer Keplers in der Astronomie, herrührt, sowie die Aufgaben 44 u. f. über Schattenkurven an Horizontaluhren, die meist arabischen Ursprunges sind.

Im ganzen ein Buch, das mit weiser Beschränkung seitens des Lehrers auf die einfacheren Aufgaben beim Unterrichte mit bestem Erfolge verwendet werden dürfte.

Wien. *Oppenheim.*

Théorie des fonctions métasphériques. Par Niels Nielsen. Paris, Gauthier & Villars, 1911.

In der vorliegenden Ausgabe seiner Vorlesungen an der Universität Kopenhagen beabsichtigt der Verfasser eine Darstellung seiner Untersuchungen über alle die endlichen und unendlichen hypergeometrischen Reihen zu geben, welche in den Anwendungen auf Physik eine Rolle spielen und die man unter dem Namen Kugelfunktionen zusammenfaßt. Er definiert als metasphärische

Digitized by Google

Funktion jede Funktion vom Parameter ν, dem Index ρ und den Variablen x $K^{\nu,\varrho}(x)$, welche den beiden folgenden Gleichungen genügt:

$$(1-x^2)\,D_x K^{\nu,\varrho}(x) = (\rho+2\nu)\,x\,K^{\nu,\varrho}(x) - (\rho+1)\,K^{\nu,\varrho+1}(x)$$

$$2(\rho+\nu)\,x\,K^{\nu,\varrho}(x) = (\rho+1)\,K^{\nu,\varrho+1}(x) + (\rho+2\nu-1)\,K^{\nu,\varrho-1}(x),$$

also geeignet normierte Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\,y'' - (1+2\nu)\,xy' + \rho(\rho+2\nu)\,y = 0.$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = 0, 1, 2, \ldots n \ldots$ erhält man die Legendreschen Funktionen für $\nu = \frac{1}{2}$ $\rho = n + \frac{1}{2}$ die Ringfunktionen, für $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = -\frac{1}{2} + n$ die Kegelfunktionen.

Nun werden der Reihe nach die Konvergenz der darstellenden Reihen, der Zusammenhang der verschiedenen Zweige und das asymptotische Verhalten untersucht. Sodann werden die Funktionen mit ganzzahligem Index als ultrasphärische besonders untersucht, wobei der Zusammenhang mit den klassischen Formeln der Theorie der Kugelfunktionen herausgearbeitet wird und die Zylinderfunktionen als Grenzfall hergeleitet werden. Diese Untersuchungen füllen den zweiten Teil. Der dritte Teil enthält die Verallgemeinerung der Sätze von Franz und Karl Neumann über die Entwicklung von $(y-x)^{-1}$ und die hieraus folgenden für analytische Funktionen im Innern und Äußern einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1, Reihenentwicklungen von Produkten und Additionstheoreme, wie sie von Franz und Karl Neumann und Gegenbauer aufgestellt wurden. Der vierte Teil verallgemeinert die von Laplace, Heine und Dirichlet gegebenen Integralausdrücke und bringt Anwendungen der Neumannschen Reihen und des Sonineschen Integrals.

Die Wiedergabe einzelner Formeln würde viel zu weit führen, da ja auch die Bezeichnungen erklärt werden müßten. Es sei nur bemerkt, daß die Rechnung stets sehr übersichtlich geführt ist, so daß man bei der unvermeidlichen Menge von Formeln doch den Zusammenhang nicht verliert. Eine Einleitung stellt die spezielleren Sätze über Funktionentheorie, Reihen, Gammafunktion und hypergeometrische Funktion zusammen, welche Verwendung finden.

The collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester. Volume IV. Cambridge, University Press 1912.

H. F. Baker hat die Herausgabe von Sylvesters Werken nun zum Abschluß gebracht und den vierten Band, der Sylvesters Arbeiten von 1882—1897 enthält, herausgegeben.

Der Inhalt bezieht sich vorwiegend auf die Theorie der Verteilung der Zahlen (partition of numbers), von denen gleich der Titel der ersten eine Probe von Sylvesters origineller Ausdrucksweise gibt: „A constructive theory of partition, arranged in three acts, an interact and a exodion", sodann auf Matrices und Gleichungen zwischen ihnen, insbesondere Gleichungen zwischen Quaternionen und Studien über Fareysche Reihen. Von den Beiträgen Sylvesters zur Educational Times ist ein vollständiges Verzeichnis beigegeben ebenso ein Index zu allen vier Bänden.

Digitized by Google

Eine sehr interessante Biographie Sylvesters, welche seiner Persönlichkeit und seiner wissenschaftlichen Stellung nach jeder Richtung gerecht wird, hat Baker an den Anfang des Bandes gestellt, der auch noch mit einem trefflichen Porträt geziert ist. Die vornehme Ausstattung und der vorzügliche Druck entsprechen dem alten Ruf der University Press.

Festschrift, Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912, gewidmet von Freunden und Schülern. Mit Webers Bildnis, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner 1912.

Heinrich Webers Wirksamkeit als Forscher und Lehrer ist heute wohl jedem Anfänger bekannt. Seine aufrechte und vornehme Persönlichkeit hat ihm jeden zum Freund gewonnen, der ihm nahetreten durfte, sein vor kurzem erfolgter Tod alle tief ergriffen. Zum siebzigsten Geburtstage haben ihm die vorliegende Festschrift 30 seiner Schüler und Freunde gewidmet, darunter Namen von erstem Rang wie Dedekind, Hilbert, Reye. Hilbert bringt den neuen Begriff der Klasse von Differentialgleichungen und Untersuchungen über Differentialgleichungen mit integrallosen Lösungen, Sommerfeld eine Untersuchung über die Dispersion des Lichtes in dispergierenden Medien, v. Mises einen sehr interessanten Beitrag zum Oszillationstheorem, Wirtz eine Studie über die Figur des Mondes, Simon eine historische Studie über Nikolaus von Cusa, Volkmann eine historisch-kritische Untersuchung über den Kausalitätsbegriff usw. Bei der großen Mannigfaltigkeit der Gebiete, aus denen die 30 Beiträge stammen, würde ein Bericht über jeden einzelnen zu weit führen, gerade deshalb, weil jeder einzelne interessant und lesenswert ist, ja manche völlig neue und bedeutungsvolle Gedanken entwickelt.

Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, unter Mitwirkung von A. Speiser und H. Weyl herausgegeben von David Hilbert. 2 Bde. Groß-8° mit 2 Porträts. Leipzig, Teubner 1911 (36 M.).

Minkowski gehört zu den wenigen Mathematikern, denen mehr als ein großer Erfolg beschieden war. Am Beginn seiner Laufbahn steht die bekannte Pariser Preisarbeit über quadratische Formeln, und er starb kurz nachdem er seine Ideen über Zeit und Raum und die Relativitätstheorie veröffentlicht hatte, mitten in der Arbeit daran. Dazwischen aber liegt eine reiche Ernte tiefliegender Sätze aus der Zahlentheorie, Algebra und Geometrie, deren Auffindung durch die originelle Durchdringung der genannten Zweige der Mathematik in Minkowskis Geist ermöglicht wurde. Diese Arbeit liegt nun gesammelt vor uns, eingeleitet von der Gedächtnisrede Hilberts auf Minkowski und abgeschlossen von der Rede Minkowskis auf Lejeune Direchlet. Beide Reden gehören zum besten, was Mathematiker über ihre Wissenschaft und ihre Fachgenossen sagen können.

Die Abhandlungen sind in vier Gruppen zusammengefaßt, von denen die erste die Arbeiten zur Theorie der quadratischen Formen, die zweite die Arbeiten zur Geometrie der Zahlen, die dritte die Arbeiten zur Geometrie und die vierte die Arbeiten zur Physik umfaßt.

Aus der ersten Gruppe sind außer der Pariser Preisarbeit noch besonders die Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen mit ganzzahligen Koeffizienten und die Arbeiten über die Theorie der positiven quadratischen Formen zu nennen.

Digitized by Google

Von der Geometrie der Zahlen kann man sagen, daß sie erst durch Minkowski geschaffen wurde. Das wichtigste Hilfsmittel ist hier die Betrachtung eines regelmäßigen Punktgitters des n dimensionalen Raumes — die Gesamtheit aller Punkte dieses Raumes mit ganzzahligen Koordinaten in einem System von Parallelkoordinaten und der Begriff des convexen Körpers. Von den Ergebnissen ist vor allem die berühmte Verschärfung des Hermiteschen Satzes über das Minimum einer definitiv quadratischen Form, damit im Zusammenhang der Minkowskische Satz, daß die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers außer 1 stets noch andere Primzahlen als Teiler erhält, ferner der Satz, daß das Gebiet der reduzierten positiven quadratischen Formen eine konvexe Pyramide ist, endlich die Kriterien für algebraische Zahlen durch kettenbruchartige Algorithmen und deren periodische Approximation. Der hier viel benützte und eingehend durchgearbeitete Begriff des konvexen Körpers und die darauf begründete Minkowskische Geometrie hat seither in den verschiedensten Gebieten der Mathematik fruchtbare Anwendung gefunden. Seine Theorie wird von Minkowski in den Arbeiten zur Geometrie selbständig ausgebildet und vertieft, wobei sich namentlich eine merkwürdige Verallgemeinerung des Volumenbegriffes und Beziehung zur Oberfläche ergeben.

Die Arbeiten zur Physik bringen seine Arbeit über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, den Artikel über Kapillarität in der Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften und endlich die drei Arbeiten über das Relativitätsprinzip als deren wichtigstes Ergebnis die Ableitung der Grundgleichungen für die elektrodynamischen Vorgänge in bewegten Körpern anzusehen ist, wobei zu dem „Weltpostulat", daß alle Naturgesetze bei Lorentz-Transformation invariant bleiben müssen, noch drei sehr einfache Grundannahmen traten. Es sind durchaus Arbeiten von bleibender Bedeutung und die gesammelten Werke sind ein Denkmal, wie es besser, schöner und bleibender nicht hätte gesetzt werden können.

Leçons sur le prolongement analytique. Par Ludovico Zoretti. Paris, Gauthier & Villars 1911 (Collection Borel).

Das Buch behandelt nach einer Einleitung über die Punktmengen in der Ebene und den Begriff der analytischen Funktion vorwiegend die Schwierigkeiten, welche sich der Formulierung allgemeiner Definitionen und Sätze über singuläre Stellen, Größen des Definitionsbereiches namentlich bei unendlich vieldeutigen Funktionen entgegenstellen. Es ist also vorwiegend kritisch und bringt sehr interessante und instruktive Beispiele, ohne jedoch überall zu abschließenden Formulierungen vorzudringen. Das liegt hier in der Natur des Gegenstandes und es ist zu erwarten, daß gerade die Darstellung des Verfassers Anregung zu neuen Fortschritten bringt. Es ist aber aus diesem Grunde schwierig, kurz über den Inhalt zu berichten. Es möge daher nur als Beispiel hervorgehoben werden, daß der Verfasser die von Pompeju, Denjoy und ihm selbst studierten eindeutigen Funktionen, deren Singularitäten in der Ebene eine nicht dichte Menge mit einem von Null verschiedenen Flächeninhalt im Lebesgueschen Sinne bringt als Beleg dafür, daß eine analytische Funktion in der ganzen Ebene endlich und stetig sein kann, ohne deshalb konstant zu sein. Sie ist eben an den singulären Stellen nicht analytisch.

Digitized by Google

Ferner wird der Painlévesche Unbestimmtheitsbereich einer singulären Stelle eingehend studiert, ebenso das Verhalten der Umkehrungsfunktion ganzer Funktionen und dessen Beziehungen zum Picardschen Satz. Seinen Zweck, den Umfang des Begriffes analytischer Fortsetzung und die dabei auftretenden Schwierigkeiten dem Leser vor Augen zu bringen, hat der Verfasser jedenfalls erreicht.

Elemente der Funktionentheorie, Vorlesungen, gehalten an der Universität Kopenhagen von Dr. Niels Nielsen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Das vorliegende Buch umfaßt gleichmäßig die Elemente der Theorie der reellen Funktionen einer Veränderlichen, sowie die der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, sowie eine ausführliche Behandlung der elementaren Funktionen einschließlich der Gammafunktionen.

Der erste Teil gibt vor allem eine exacte Darstellung der Begriffe der Irrationalzahl, der stetigen Funktion, der Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung für reelle Veränderliche. Der zweite Teil gibt nach Einführung der Begriffe der analytischen Funktion und des Kurvenintegrals den Satz von Cauch-Goursat und besonders ausführliches über Konvergenz. Im dritten Teil werden trigonometrische Funktionen, algebraische Funktionen, doppeltperiodische Funktionen, das wichtigste über Bernoullische, Stirlingsche und Legendresche Polynome, über Summenformeln und asymptotische Reihen und die Gammafunktion gebracht. Außerdem ist noch den Sätzen von Hermite, Lindemann und Weierstraß über die Transzendenz der Exponentialfunktion und des Logarithmus für algebraische Argumente ein Abschnitt gewidmet. Zahlreiche und recht interessante Übungsaufgaben sind am Schluß der einzelnen Kapitel gegeben. Die Darstellung betont mit besonderer Vorliebe die Rechnung und die Formel, so daß das Buch eine gute Schule zur Aneignung der Technik dieses Gebietes ist. Dagegen ist der Begriff der Riemannschen Fläche bei algebraischen Funktionen vielleicht doch zu wenig berücksichtigt.

Leçons d'Arithmétique théorique et pratique par Jules Tannery. Nouvelle édition, complétement refondue. Paris, Armand Colin 1911.

Gegenüber der ersten Ausgabe war Tannery hier noch mehr bemüht, die wesentlichen Eigenschaften der Rechenoperationen mit ganzen Zahlen durch anschauliche Beispiele zu erörtern, unabhängig von der Art, wie diese Operationen numerisch durchgeführt werden und unabhängig vom Dezimalsystem. Dabei hat er von Anfang an nicht die äußerste logische Ökonomie angestrebt, sondern war vor allem bestrebt, den Zuhörer erst dazu zu erziehen. Dagegen hat er am Schluß des Kapitels kurze Andeutungen gemacht über die Möglichkeit eines mehr logisch systematischen Aufbaues. Der Inhalt gibt die Elemente des Rechnens mit ganzen Zahlen, Brüchen negativer Zahlen, die wichtigsten Anwendungen auf das metrische System, auf Zinseszins- und Rentenrechnung. Ferner eine sehr klare Theorie der Irrationalzahlen und des Grenzbegriffes und die Elemente der Zahlentheorie. Das Buch ist besonders jedem, der sich mit dem Unterricht in der Elementarmathematik zu befassen hat, aber auch jedem, der von den überlieferten Schulbegriffen her zu wissenschaftlicher Durchdringung vorzudringen versucht, aufs beste zu empfehlen.

Digitized by Google

Oeuvres de Charles Hermite publiées par Émile Picard. Tome III. Paris, Gauthier & Villars 1912, mit einem Porträt.

Der dritte Band von Hermite's Werken enthält die Arbeiten von 1872—1880 und außerdem eine Arbeit aus dem Jahre 1852 über die Ausdehnung des Sturmschen Satzes auf Systeme von Gleichungen, welche erst jetzt unter den Papieren Liouvilles gefunden wurde. Ferner wurden einige Kapitel aus dem Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique und die bekannte Note Hermites über Galoissche Gleichungen aus Serrets höherer Algebra aufgenommen. Eine Vorlesung über die Lamésche Gleichung aus dem Winter 1872—1873 ist ebenfalls abgedruckt, da sie die ersten Untersuchungen Hermites über dieses Thema, das er später mit so großem Erfolg bearbeitete, enthält.

Aus dem reichen Inhalt des Bandes ist besonders die klassische Arbeit „sur la fonction exponentielle" von 1873 hervorzuheben, die den berühmten ersten Beweis des Satzes über die Transzendenz von e gibt, sodann die gleichfalls klassisch gewordenen Untersuchungen „sur quelques applications des fonctions elliptiques" aus den C. R. von 1877—1882, ferner die Arbeit über die Integration der rationalen Funktionen, deren wesentlicher Inhalt, die Herstellung des algebraischen und transzendenten Teiles eines solchen Integrales auf rationalem Wege, vielfach bereits in die Lehrbücher der Integralrechnung übergegangen ist. Aber auch die vielen anderen kleineren Arbeiten zur Integralrechnung, über Bernoullische Funktionen u. s. w. enthalten sehr interessante Einzelheiten und sind eine Quelle für die Erwerbung jener mathematischen Technik, die unentbehrlich ist, um allgemeine Gedanken in wirkliche Ergebnisse umzusetzen.

Die von Hermite mit Vorliebe herangezogenen Zahlenangaben sind von H. Bourget einer genauen Revision unterzogen worden. Ein vierter Band wird die Ausgabe zum Abschluß bringen.

Opere Matematiche del Marchese Giulio Carlo de Toschi di Fagnano, pubblicate sotto gli auspici della Società italiana per il progresso delle Scienze dai soci V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli. Milano, Roma Napoli, Albrighi, Segati e C. 1911. (3 vol. 40 fr.)

Fast jedes Buch über elliptische Funktionen enthält Angaben über Fagnano, der zuerst die Teilung des Lemniskatenquadranten mit Zirkel und Lineal in 2^m-, 3.2^m- und 5.2^m-Teile gelehrt hat, und außerdem in geometrischer Form jenes nach ihm benannte Theorem an Ellipsen und Hyperbelbögen entdeckt hat, welches wir heute als Additionstheorem der zweiten Gattung bezeichnen.

Fagnano war am 26. September 1682 in Sinigaglia geboren und starb am 18. Mai 1766. Seine Ergebnisse hat Fagnano zuerst in Giornale de'Letterari d'Italia 1716 mitgeteilt und diese später in den Produzione matematiche 1750 (2 vol.) mit anderen Arbeiten zusammengefaßt neuerdings veröffentlicht. Beides ist ziemlich selten geworden. Die vorliegende Ausgabe der Werke Fagnanos bringt zuerst einen Neudruck der Produzione, die ja für Euler die Anregung zur Beschäftigung mit den elliptischen Integralen geworden sind, aber außerdem noch manche interessante Beiträge zur Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade und überhaupt für die Geschichte der Mathematik im XVIII. Jahrhundert wichtige Aufsätze enthalten. Diese füllen die ersten zwei Bände. Der

Digitized by Google

dritte Band enthält andere Aufsätze Fagnanos, und zwar wissenschaftlicher und polemischer Natur und den Briefwechsel, soweit derselbe aufzubringen war, darunter 11 Briefe von Lagrange an Fagnano und 10 von Fagnano an Lagrange.

Für vorliegende schöne und billige Ausgabe dieses „Meilensteines auf dem Wege zu den Schätzen unseres heutigen wissenschaftlichen Besitzes" gebührt allen Beteiligten, darunter auch der Provinz Ancona und der Stadt Sinigaglia aufrichtiger Dank.

Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Von R. Fricke und J. Klein. II. Bd., 2. Lieferung: Kontinuitätsbetrachtungen im Gebiete der Hauptkreisgruppen mit 66 Figuren. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1911.

Während die erste Lieferung des zweiten Bandes vorwiegend der Theorie der Poincaréschen Reihen, also analytischen Entwicklungen gewidmet war, kommen hier wieder die geometrischen Theorien zur Geltung, allerdings in der Absicht, dem Beweise der Fundamentaltheoreme zu dienen, welche aber hier nur für den Fall einer Grenzkreisgruppe oder einer Hauptkreisgruppe angestrebt werden.

Es handelt sich um den Beweis des Satzes, daß die beiden Continua einerseits der durch passende, in Band I entwickelte Invarianten charakterisierten Hauptkreisgruppen und anderseits der Riemannschen Flächen vom Geschlechte p, auf welchen außerdem n Punkte ausgezeichnet sind, in der Tat ausnahmslos eindeutig aufeinander bezogen sind. Dieser Beweis wird auch in einer Reihe von Einzelfällen wirklich geführt, indem zunächst die Polygoncontinua studiert werden, sodann die zugehörigen Zwischencontinua und damit die Continua signierter Riemannscher Flächen in Beziehung gesetzt werden. Diese Einzeluntersuchungen sind von Fricke durchgeführt, während die Methode selbst von Klein und Poincaré in verschiedener Darstellung gegeben wurde, deren gegenseitiges Verhältnis auseinandergesetzt wird. Der Schlußbemerkung, daß die Schwierigkeit der Continuitätsmethode darin begründet ist, daß man die Continua nicht ausreichend zu übersehen im stande ist, wird man gewiß zustimmen. Umsomehr wird man die für die nächste Lieferung versprochene Darstellung der direkten Beweise der Fundamentaltheoreme, wie sie durch Koebe gegeben wurde, begrüßen.

Praktische Physik für Oberlyzeen, unter Mitwirkung von Dr. K. Mönkemeyer und Dr. J. Lohmeyer, herausgegeben von Dr. H. Hupfeld. Mit 397 Figuren, 322 praktischen und 472 theoretischen Übungsaufgaben und einer Spektraltafel. 404 Seiten. Frankfurt a. M., Verlag von M. Diesterweg, 1912. Preis geb. M. 4.—.

Wie der Herausgeber im Vorwort mitteilt, ist das Lehrbuch eine teils gekürzte, teils erweiterte und vertiefte Ausgabe der „Praktischen Physik für Lyzeen, Oberlyzeen und die mittleren und unteren Klassen der Studienanstalten". Es behandelt den Lehrstoff der Physik in folgenden Kapiteln und in folgender Reihenfolge: Akustik, Optik, Magnetismus, Reibungselektrizität, Stromelektrizität, Wärme, kosmische Mechanik und Pendelbewegung, Wellenlehre, das Messen, kurze Wiederholung der allgemeinen Mechanik, Bilder aus der Geschichte der Physik. Für eine derartige Stoffanordnung mag vielleicht der Verfasser seine guten Gründe gehabt haben, doch scheint sie vom pädagogisch-didaktischen

Digitized by Google

Standpunkte keine sehr günstige zu sein. Allerdings zeichnen sich die einzelnen Kapitel in ihrer Abfassung durch eine gewisse Selbständigkeit aus, die es dem Lehrer ermöglicht, nach seinem Gutdünken die Reihenfolge zu ändern.

Wie schon der Titel besagt, soll das Buch den Schülerinnen eine Anleitung zu praktischen Arbeiten geben; es schließt sich daher an die Behandlung der einzelnen Abschnitte jedesmal eine Anzahl praktischer Übungen und überdies eine Sammlung theoretischer Aufgaben an, was sicherlich dazu beitragen wird, das Verständnis des vorgetragenen Stoffes zu erhöhen und das Interesse am Physikunterricht wachzuhalten.

Dem letzteren Zweck dient auch ein kurzer historischer Anhang. Doch ist hier zu bemerken, das Helmholtz im Jahre 1894 gestorben ist und nicht, wie aus dem Texte zu entnehmen ist, 1893 und ferner, daß die Gründung der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Charlottenburg durch eine große Stiftung Werner von Siemens' ermöglicht wurde und nicht, daß die technische Reichsanstalt in Berlin vom Deutschen Reiche auf Betreiben der bedeutendsten Physiker gegründet worden sei.

Besonders groß ist die Zahl der Druckfehler, die durch eine etwas sorgfältigere Korrektur wohl sehr hätte veringert werden können. Besonders das Register zeichnet sich durch etliche falsche, ja sogar fehlende Seitenangaben aus.

P.

Reclams Universalbibliothek, Nr. 5521—5523. Von Prof. Dr. Siegmund Günther. Bücher der Naturwissenschaft, 16. Band. Prof. Dr. H. Wieleitner, Schnee und Eis der Erde. Mit 16 Tafeln und 26 Abbildungen im Text. 198 Seiten. Leipzig, Druck u. Verlag von Ph. Reclam jun. Preis geb. M. 1.—.

Das Büchlein behandelt die Erscheinungsformen des Wassers im festen Zustand, insofern diese auf Aussehen und Veränderung der Erdoberfläche von Einfluß sind. Aus dem reichhaltigen Inhalt seien besonders hervorgehoben die Abschnitte über Firn, Lawinen und Büßerschnee, über das Gletschereis und die Gletscher, über die Eisformen der Antarktis, über die Eisberge und schließlich die interessanten Ausführungen über die sogenannte Eiszeit.

Das Bändchen ist reichlich ausgestattet mit guten textlichen Abbildungen und mit einer großen Anzahl schöner Tafeln, welche u. a. hochinteressante Bilder, die gelegentlich der Grönlandexpedition der Gesellschaft für Erdkunde und gelegentlich der deutschen Südpolarexpedition aufgenommen wurden, enthalten.

So reiht sich dieses vorzügliche Büchlein, was Inhalt sowie Ausstattung betrifft, würdig an die übrigen Bände der Bücher der Naturwissenschaft und wird sich sicherlich zahlreiche Freunde erwerben. *P.*

Elementares Lehrbuch der Physik. Nach den neuesten Anschauungen von Ludwig Dressel. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage, besorgt von Prof. Joseph Paffrath. 2 Bde. Mit einer Spektraltafel in Farbendruck und 705 Figuren. Gr. 8° (XXVIII und 1202 S.). M. 20.—; geb. in Leinw. M. 22.—. Herdersche Verlagshandlung zu Freiburg im Breisgau und Wien.

Dressels Gabe, die Physik unter steter Rücksichtnahme auf die modernsten Errungenschaften mit großer Klarheit und Gründlichkeit in einem harmonischen Bilde darzustellen, ist in Fachkreisen schon oft nach Gebühr gewertet worden.

Digitized by Google

Seine Absicht, der ungemein raschen Entwicklung der physikalischen Forschung in den letzten Jahren durch Herausgabe einer neuen Auflage Rechnung zu tragen, konnte der Verfasser krankheitshalber nicht selbst verwirklichen. In höchst dankenswerter Weise hat sich indessen Josef Paffrath der Aufgabe unterzogen, die Vorarbeit des Verfassers ganz in dessen Geiste weiterzuführen und die von Dressel gewünschte vierte, vermehrte und verbesserte Auflage der Öffentlichkeit zu übergeben.

Zu diesem Zwecke wurden manche Kapitel gänzlich umgearbeitet (Luftelektrizität, elektrische Strömung in Gasen, Radiotelegraphie), andere wieder neu hinzugefügt oder ergänzt (Radioaktivität, Erdbebenkunde). Verbesserungen und Ergänzungen sind übrigens in sehr vielen Kapiteln des Werkes angenehm zu bemerken, so z. B. in den Abschnitten über kinetische Gastheorie, Adsorption, Molekular- und Atomphysik, Valenztheorie, Kristallphysik, Meteorologie, über das Nernstsche Wärmetheorem, ferner über Katalyse, Elektrolyse, Erdmagnitismus, Polarlicht, Dispersion des Lichtes, Photochemie, Photolumineszenz. Der Abschnitt über die Physik des Äthers wurde durch ganz wertvolle Hinweise auf die Äthermitführung und das Einsteinsche Relativitätsprinzip bereichert. Ohne daß hiebei die Absicht verfolgt worden wäre, den Leser mit allen Feinheiten dieser schwierigen Fragen bekanntzumachen, wird doch durch Hervorhebung wesentlicher Resultate, kurzer Ableitungen und wichtiger Literaturangaben auf knappem Raum recht viel geboten.

Ein Umstand, der den Wert des Buches besonders erhöht, ist die enge Fühlungnahme mit den modernen technischen Fortschritten; so findet man u. a. recht guten Aufschluß über Gleichstromdampfmaschinen, elektrische Hebezeuge, Dampfturbogeneratoren, Aviatik, Schiffs- und Kompaßkreisel. Oft werden gute technische Zeitschriften zu Rate gezogen, z. B. die elektrotechnische Zeitschrift, Stahl und Eisen, die Zeitschrift für Chemie und Industrie der Kolloide.

Auch sonst sind die Literaturnachweise durchaus den besten Quellen entnommen. Nur könnte bei der Anführung einiger neuerer Autoren von manchen Lesern der genauere Literaturnachweis vermißt werden.

Wie in den früheren Auflagen, so wurden auch in der vorliegenden den Fundamenten der Physik das gebührende Augenmerk zugewendet. So oft sich Gelegenheit dazu bot, wurden erkenntnistheoretische Bemerkungen über die physikalischen Prinzipien eingestreut, die ihren Abschluß am Ende des zweiten Bandes durch einen kurzen Überblick über die drei Hauptströmungen der modernen theoretischen Physik sowie über Ausgangspunkt und Endziel des physikalischen Geschehens fanden. Gerade der Artikel über das Ende alles physikalischen Geschehens scheint etwas zu knapp gehalten zu sein. Die angezogene Frage ist entschieden von so großem Interesse, daß vielen Lesern eine breitere Darstellung oder doch ein reicheres Literaturverzeichnis gewiß sehr erwünscht sein dürfte, um so mehr, als die Meinungen der Physiker in diesem Punkte vielfach auseinandergehen.

Was die äußere Ausstattung des Buches anbelangt, so wurde der Kleindruck früherer Auflagen vielfach durch größeren Druck ersetzt. Die Zahl der Figuren wurde entsprechend vermehrt und eine Isothermenkarte sowie eine farbige Spektraltafel beigefügt.

Das Dresselsche Lehrbuch wird ganz besonders in seiner neuen Gestalt nicht nur den an höheren Schulen Studierenden, sondern auch allen Lehrern

Digitized by Google

der Physik die besten Dienste leisten. Aber auch der junge Forscher wird durch die zahlreichen Hinweise auf Originalarbeiten, auf Sammelreferate und Handbücher das Werk mit Vorteil benützen können, ebenso wie der Techniker und überhaupt jeder gebildete Laie, der seine physikalischen Kenntnisse erweitern und vertiefen möchte.

Die Bestätigung der Atomlehre durch die Radioaktivität. Vortrag, gehalten am 16. Februar 1913, zum 50jährigen Stiftungsfeste des Vereines für Naturwissenschaften in Braunschweig. Von Prof. Dr. H. Geitel. Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1913 (24 S.). Preis M. —.80.

Hübsche populäre Schilderung der Entwickelung von den Entdeckungen des Heliums und der radioaktiven Substanzen und des Nachweises der experimentellen Beweise für die Atomstruktur der Materie. *St. M.*

Bücher der Naturwissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr. Siegmund Günther, 12. Band: Das Klima. Von Dr. Eugen Alt. Leipzig, Reclams Verl.

Das Buch gibt in sehr knapper Form (132 Seiten) einen populär gehaltenen Abriß der Klimatologie. Nach einer Einleitung über die Aufgabe und Methoden der Klimatologie folgen Kapitel über die Wärmestrahlung, Luftdruck Windströmungen, über Luftfeuchtigkeit und Niederschläge. Ferner werden die drei Haupttypen: tropisches, gemäßigtes und polares Klima sowie der Gegensatz von Land- und Seeklima genau charakterisiert und zum Schlusse die spezielle Klimatographie der fünf Erdteile gebracht. Auch die Brücknerschen Arbeiten über periodische Klimaänderungen und der Einfluß des Klimas auf die Kultur werden besprochen. Das Büchelchen ist vorzüglich geschrieben und wird die Einführung in die Klimatologie gute Dienste leisten. *Hess.*

Aus Natur und Geisteswelt, 391. Bändchen: Grundlagen der Elektrotechnik von A. Rotth. B. G. Teubner, Leipzig, 1912.

Das Buch gliedert sich — nach Entwicklung der Grundbegriffe der Elektrizitätslehre — in zwei Hauptteile: Die Behandlung des Gleichstromes und des Wechselstromes. Die Grundtatsachen werden in anschaulichster Weise entwickelt, wobei die Darstellung durch sehr gute schematische Zeichnungen unterstützt und graphische Methoden häufig benützt werden. Das Hauptgewicht ist auf die technischen Anwendungen gelegt. Die erforderlichen Berechnungen der Dimensionen von Elektromagneten usw. für bestimmte Zwecke werden an Zahlenbeispielen eingeübt. Auch die mehrphasigen Wechselfelder finden volle Berücksichtigung. Das Buch ist für angehende Elektrotechniker sehr empfehlenswert. *Hess.*

Société Française de Physique. Collection de Mémoires relatifs à la Physique. II. Série. Les Idées modernes sur la constitution de la matière. Conférences faites en 1912 par E. Bauer, A. Blanc, E. Bloch, Mme. P. Curie, A. Debierne, L. Dunoyer, P. Langevin, J. Perrin, H. Poincaré, P. Weiss. Paris, Gauthier-Villars, 1913. 371 Seiten.

Dieses Werk reiht sich den bisherigen Publikationen der obengenannten Gesellschaft würdig an und bringt insbesondere ihren auch außerhalb Frank-

Digitized by Google

reichs sehr zahlreichen Mitgliedern, welche es unentgeltlich erhalten, eine schöne Gabe. Es enthält von den berufensten Autoren Referate über den Stand der aktuellsten Fragen betreffs der Konstitution der Materie, und zwar von J. Perrin: Les preuves de la réalite moléculaire; P. Langevin: Les grains d'électricité et la dynamique électromagnétique; E. Bauer: Les quantités élémentaires d'énergie et d'action; E. Bloch: La théorie électronique des métaux; A. Blanc: L'ionisation par chocs et l'étincelle électrique; L. Dunoyer: Les gaz ultrarariéfiés; M. Curie: Les rayonnements des corps radioactifs; A. Debierne: Les transformations radioactives; P. Weiß: Les moments magnétiques des atomes et le magnéton; H. Poincaré: Les rapports de la matière et de l'éther.

Theorie der Planetenbewegung. Von Paul Meth. Mathematische Bibliothek, Herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Bd. 8. Mit 17 Figuren im Text und 1 Tafel. Leipzig und Berlin, Teubner, 1912. Preis M. —.80.

Anknüpfend an die zuerst von Möbius angewendeten elementaren Methoden wird hier mit einem minimalen mathematischen Apparat unter beständiger Heranziehung geometrischer Methoden eine Darstellung der Planetenbewegung geboten. Zuerst werden einige einleitende Sätze aus der Mechanik gebracht, sodann folgt die Beschreibung der Bahnen des Sonnensystems und der Rückschluß auf die wirkenden Kräfte, worauf der Überzeugung auf das Newtonsche Gravitationsgesetz gemacht wird. Von da an ist der Gang der Entwicklungen deduktiv. Vielen wird die graphische Darstellung der Zeitgleichung mit ihren Komponenten willkommen sein. Auch die gelegentlich eingeflochtenen historischen Bemerkungen erhöhen den Wert des Büchleins.

Die Fallgesetze. Von H. E. Timerding. Mathematische Bibliothek, herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting. Bd. 5. Mit 20 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, Teubner, 1912. Preis M. —.80.

Auch in diesem Werkchen der mathematischen Bibliothek wird der geometrischen Darstellungsmethode der Vorzug gegeben, wodurch seine Lesbarkeit naturgemäß bedeutend erhöht wird. Besonderes Gewicht wird auf das historische Werden der Probleme gelegt. Der Verfasser bekennt sich gleich in seiner Vorrede als Anhänger Ernst Machs, zu dessen Mechanik die vorliegende Schrift eine kleine Ergänzung bieten will. Von der geistigen Entwicklung Galileis ausgehend, wird der Gang seiner Versuche und Erkenntnisse so getreu als möglich vorgetragen. Der Verfasser läßt nicht selten Galilei selber zu Worte kommen, wodurch die Darstellung ungemein an Frische gewinnt. Den Schluß bildet ein Abschnitt über den Ausbau und die Bestätigung der Fallgesetze. Dem lesenswerten Werkchen ist auch ein Bild Galileis beigegeben.

Maße und Messen. Von Walter Block. Aus Natur und Geisteswelt, 385. Bändchen. Mit 34 Abbildungen. Leipzig, Teubner, 1913. Preis geb. M. 1.25.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, den Laien in Kürze in das Verständnis der modernen Metronomie einzuführen. Es hat sein Ziel in mustergültiger Weise erreicht. Indem er mit feinem Geschick immer nur das Wesentliche herausarbeitet, gelingt es ihm an der Hand von passend gewählten Beispielen die Be-

Digitized by Google

griffe der Metronomie überhaupt sowie das Entstehen und den Zusammenhang der wichtigsten Maße recht klar und anschaulich darzustellen.

Nach einer Einleitung über die ältesten Maße und Entstehung des metrischen Maßsystems folgt ein sehr instruktiver Abschnitt über relative und absolute Messungen, über Meßgenauigkeit und Maßbehörden. Sodann werden der Reihe nach die hauptsächlichsten mechanischen, thermischen, optischen, elektrischen Maße und Messungen, im Zusammenhang erklärt. Zahlreiche Abbildungen fördern die Anschauung. Am Ende des lesenswerten Bändchens werden noch kurz die Beziehungen der Metronomie zur Relativitätstheorie erörtert.

Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeiten. Von S. Oppenheim. Aus Natur und Geisteswelt, 110. Bändchen. 2. Aufl., mit 19 Abbildungen. Leipzig, Teubner, 1912. Preis geb. M. 1.25.

Oppenheim ist den astronomisch interessierten Liebhabern der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" kein Fremdling mehr. Seine Meisterschaft in der klaren Darstellung astronomischer Tatsachen und Gedankengänge ist schon mehrfach von der Kritik entsprechend gewürdigt worden.

Die zweite Auflage des genannten Buches unterscheidet sich von der ersten bloß durch einige Kürzungen, die der Verfasser vorgenommen hatte, um nach dem Wunsche einiger Rezensenten Raum für ein Sachregister zu gewinnen.

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. Otto Henkel, Bauingenieur und Oberlehrer an der Königl. Tiefbauschule in Rendsburg. I. Teil. Mit 121 Figuren. (Sammlung Göschen, Nr. 603.) G. J. Göschen, Berlin und Leipzig. M. —.80.

Ohne besondere mathematische Kenntnisse vorauszusetzen führt der Verfasser den Leser in die Grundlehren und in die wichtigsten Anwendungsgebiete der graphischen Statik ein. Nach einer kurzen Darstellung einiger geometrischer Hilfskonstruktionen folgt die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in einer Ebene. Daran schließen sich Abschnitte über: graphische Schwerpunktsbestimmungen, Trägheitsmomente, über den einfachen Träger, den Fachwerkträger, den vollwandigen Dreigelenkbogen und das Tonnengewölbe.

Besonders wertvoll ist die stete Berücksichtigung der Einflußlinien, da diese in der modernen Konstruktionstechnik von ganz besonderer Wichtigkeit geworden sind.

In der physikalischen Einleitung muß es wohl als Irrtum bezeichnet werden, wenn der Verfasser das Beharrungsvermögen und die Wärme als Beispiele für Kräfte anführt.

Die Sprache ist sonst durchwegs klar und leicht verständlich, die beigegebenen Figuren sind sauber und übersichtlich gezeichnet.

Jedenfalls wird der I. Teil von Henkels graphische Statik in Verbindung mit dem noch ausständigen II. Teile, der in der Fachwelt gewiß dieselbe günstige Aufnahme finden wird wie der I., nicht nur dem angehenden Techniker als Lehrbuch, sondern auch dem Ingenieur als Nachschlagewerk ausgezeichnete Dienste leisten.

Digitized by Google

Luftelektrizität von Dr. Karl Kähler, wissensch. Hilfsarbeiter am königl. preuß. Meteorologisch-Magnetischen Observatorium Potsdam. Mit 18 Abbildungen. (Sammlung Göschen Nr. 649.) G. J. Göschen, Berlin und Leipzig. Mk. —.80.

Es ist sehr zu begrüßen, daß nun in der so beliebten „Göschen-Sammlung" auch ein Bändchen über atmosphärische Elektrizität aufgenommen worden ist, zumal wenn es von einem so berufenen Fachmann wie Dr. Kähler stammt. Die Einteilung des Stoffes lehnt sich an das bewährte Vorbild von Mache und Schweidler, bezw. Gockel an; es werden die seit dem Erscheinen dieser Hauptwerke erzielten Fortschritte bis Ende 1912 berücksichtigt. Die Bedeutung der radioaktiven Substanzen in der Erde und der Luft wird eingehend gewürdigt. Auch die Theorien über den Ursprung und die Regeneration des elektrischen Feldes der Erde werden kurz besprochen, wobei die Ebertsche Theorie in den Vordergrund gestellt wird.

Das Buch wird nicht allein dem Fernerstehenden einen Einblick in das so wenig bekannte und erst in der neuesten Zeit mehr gewürdigte Gebiet der atmosphärischen Elektrizität gewähren, sondern wird auch in der engeren Fachwelt verdienten Beifall finden. *V. Hess.*

Leitfaden der Wetterkunde. Von Prof. Dr. R. Börnstein, Geh. Reg.-Rat. Dritte, umgearbeitete und vermehrte Auflage. X, 270 S. Gr. 8°. Mit 55 Abbildungen im Text und 26 Tafeln. Preis geheftet M. 7.—, gebunden M. 8.—. Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Dieser leichtfaßlich geschriebene Leitfaden, mit einer großen Anzahl vortrefflichster Illustrationen ausgestattet, ist das Abschiedsgeschenk R. Börnsteins geworden, das er nicht nur seinen zahlreichen Freunden und Schülern hinterlassen hat, sondern das ihm auch nach seinem Tode noch viele neue Freunde zu erwerben bestimmt ist.

Es gliedert sich in die Kapitel – nach einer allgemeineren Einleitung – über Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Bewölkung, Niederschlag, Luftdruck, Wind, Wetter und Wetterdienst mit einem Anhang von sorgfältig durchgearbeiteten Tabellen und einem Literaturverzeichnis.

Nicht nur Fachmeteorologen und Physikern, sondern jedem gebildeten Laien kann das Buch bestens empfohlen werden. *St. M.*

Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Von Paul Volkmann. Zweite, mehrfach umgearbeitete Auflage, Leipzig bei Teubner, 1913, geh. M. 13.—.

Im Gegensatz zu anderen Einleitungsvorlesungen, die in systematischer Art das ganze Gebäude der analytischen Mechanik auf einigen wenigen Voraussetzungen aufführen, ohne jedoch diesen besondere Beachtung zu schenken, haben die vorliegenden Vorlesungen den Zweck, gerade diese Voraussetzungen in weitestgehendem Maße zu berücksichtigen und den empirischen Charakter der Mechanik sowie der theoretischen Physik überhaupt in helles Licht zu rücken. Da sich hiezu die historische Methode wie keine zweite eignet, so

Digitized by Google

wurde denn auch diese ganz im Sinne Ernst Machs vom Verfasser besonders zur Geltung gebracht.

Volkmann geht von der Darlegung der Galileischen und Newtonschen Mechanik aus, welche letztere er entgegen der Anschauung von Heinrich Hertz für besonders geeignet hält, denkende Geister in das Verständnis der Grundlagen einzuführen. Im Anschluß an die Newtonschen Prinzipien folgen nun Kapitel über die Mechanik diskret und kontinuierlich verbreiteter Massen, über Methoden der praktischen Physik und Instrumentenlehre, Hydrostatik, Geophysik und über die allgemeinen Prinzipe der Mechanik. Mit großem Feinsinn hat der Verfasser gerade solche Kapitel der Mechanik in den Bereich seiner Betrachtungen gezogen, die zur Erörterung prinzipieller Fragen vorzüglich Gelegenheit bieten. Ganz dem Geiste des Buches entsprechend werden Probleme der Systematik erst am Schlusse behandelt. Hier werden nicht nur die Grundlagen der physikalischen Erkenntnistheorie entwickelt, es wird auch gezeigt, daß gerade die exakten Naturwissenschaften besonders dazu geeignet sind, die Handhabe zur Lösung ganz allgemeiner erkenntnistheoretischer Fragen zu bieten.

Die zweite Auflage des Buches unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich durch die schärfere und tiefere Darstellung der Ideen sowie durch ein sorgfältig durchgeführtes Namen- und Sachregister. Die Volkmannsche „Einführung" wird vom theoretischen wie vom praktischen Physiker mit gleichem Gewinn benutzt werden.

Fragen des physikalischen Schulunterrichts. Von Paul Volkmann. Teubner, 1913, geh. M. 2.—.

Beherzigenswerte Worte sind es, die der Verfasser in diesen vor einem Kreise von Lehrern der Physik gehaltenen Vorträgen gesprochen hat. Ein Gegner des in unserer Zeit vielfach intellektualistisch und systematisch betriebenen physikalischen Schulunterrichtes redet er einer historischen Methode das Wort, die den Schüler die Entwicklung der Wissenschaft nacherleben läßt. Die formal-mathematische Behandlung der physikalischen Probleme wird als Ausfluß des Intellektualismus bekämpft. Dagegen wird den Mathematiklehrern die Pflege des kunstmäßigen Zahlenrechnens insbesondere mit abgekürzten Dezimalbrüchen als Mittel zur Förderung eines richtigen Genauigkeitsbegriffes und im Interesse späterer praktisch-physikalischer Arbeiten warm empfohlen. Dem Schüler sind nach Tunlichkeit historisch gewordene Experimente vorzuführen. Seine Fähigkeit zur selbständigen Naturbeobachtung ist bei jeder sich bietenden Gelegenheit auszubilden.

Das frisch geschriebene Büchlein, in dem nur die Tautologie „numerisches Zahlenrechnen" etwas störend wirkt, sollte von jedem Lehrer der Physik gelesen werden. *W. Michl.*

Vorlesungen über Differentialgeometrie. Von R. v. Lilienthal. II. Band, Flächentheorie, 1 Teil. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1913. VIII und 270 S. Geb. M. 13.—.

Der erste Abschnitt „Allgemeine Betrachtungen" behandelt zunächst die verschiedenen Arten der analytischen Darstellungen von Flächen, wobei auch die außergewöhnlichen Flächenpunkte berücksichtigt werden. Der Verfasser hat dabei Gelegenheit, die abwickelbaren Flächen, die Röhrenflächen und andere

Digitized by Google

besondere Flächen zu besprechen. Die Theorie der Einhüllenden (mit Anwendungen auf besondere Fälle) und der Striktionslinien einer einfach unendlichen Schar von Raumkurven oder Flächen beschließt diesen Abschnitt.

Der zweite Abschnitt „Wichtige Flächenarten" untersucht die geradlinigen Flächen, zyklischen Flächen, Umdrehungsflächen, Schraubenflächen, Schiebungsflächen, Sehnenmittelpunktsflächen und die Dupinschen Zykliden.

Der dritte Abschnitt „Die Normalkrümmung der Flächenkurven" behandelt diejenigen Teile der Flächentheorie, in deren Mittelpunkt die Sätze von Euler und Meusnier stehen und die Theorie der konjugierten Linien.

Der letzte Abschnitt „Die geodätische Krümmung der Flächenkurven" enthält auch die Begründung der Methode der Ableitung nach Bogenlängen und verwendet mehrfach kinematische Hilfsmittel. Die Theorie der Kurvennetze ohne Umwege und der äquidistanten Kurven wird eingeflochten.

Die Vorzüge, die bei Besprechung des ersten Bandes hervorgehoben wurden, kommen auch diesem Bande zu. Neben vorsichtiger Gründlichkeit bietet auch die Auswahl und Anordnung des Stoffes manches Eigenartige. Beispielsweise gelangt der Verfasser schon auf S. 18 dazu, die Bedingung für die Abwickelbarkeit einer Fläche zu finden, indem er den Fall betrachtet, daß die normalen Richtungen derselben nur eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit bilden. *Konrad Zindler.*

Einführung in die neuere Geometrie. Von Gustav Hädicke. I. Teil. XXIII und 241 Seiten mit 17 Figuren. L. Oehmigke, Berlin 1912.

Es ist schon befremdend, daß jetzt ein Buch unter dem gänzlich fallen gelassenen Titel „neuere Geometrie" erscheint. In dem 23 Seiten langen Vorworte sind fast ausschließlich Quellwerke angegeben, deren Erscheinen zwei Jahrzehnte oder mehr zurückliegt; Späteres ist nicht berücksichtigt. Es scheint also, daß der Verfasser sein Buch schon vor längerer Zeit fertig hatte und erst jetzt Gelegenheit fand, es zu veröffentlichen. Mit seinen Reformvorschlägen ist er daher etwas spät dran, auch sind in letzter Zeit wieder andere Reformgedanken in den Vordergrund getreten. Der vorliegende I. Teil behandelt „Symmetrie und Kongruenz". Als Leser denkt sich der Verfasser ältere Schüler der Fortbildungs- und Fachschulen, in erster Linie aber Volksschullehrer. Wegen der behaglichen Breite in der Behandlung wird es sich vielleicht in dem genannten Kreise Eingang verschaffen. *Th. Sch.*

Guido Haucks Vorlesungen über darstellende Geometrie unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik, herausgegeben von Alfred Hauck, Direktor der k. Realschule in Schönlanke. I. Band mit 650 Textfiguren, XII und 339 Seiten. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1912.

Guido Hauck war einer der hervorragendsten Vertreter der darstellenden Geometrie in der vergangenen Periode. Es ist daher erfreulich, daß nunmehr — wenn auch erst sieben Jahre nach dem Tode — seine Vorlesungen veröffentlich werden. Die Herausgabe besorgt sein Sohn, Direktor A. Hauck. Der vorliegende I. Band enthält 7 Teile: Die Grund- und Aufrißmethode und ihre Anwendung auf ebenflächige Gebilde, die axonometrische Methode, geome-

Digitized by Google

trische Verwandtschaften, Kurven, entwickelbare Flächen, Rückungsflächen, windschiefe Regelflächen. Man hat wirklich eine meisterhafte Behandlung des genannten Stoffes vor sich, welche viel Eigenartiges aufweist. Besonders hervorzuheben sind die zahlreichen, zum Teil der Praxis entlehnten, schönen Aufgaben.

Die ganze abfällige Bemerkung über orthogonale Axonometrie auf S. 103 ist nicht zutreffend. Die Bezeichnung der beiden möglichen Schraubenbewegungen (S. 202) ist leider wieder entgegengesetzt von jener, welche jetzt am verbreitetsten sein dürfte (Study, Archiv d. Math. 21. Bd.). Die Elementaraufgaben werden als „Handwerkzeug" bezeichnet; die Herstellung eines axonometrischen Bildes wird „Bauplan, Baugerüste, Zuhauen der Bausteine, . . ." genannt. Solche Ausdrücke mögen zur Belebung des Vortrages dienen; in einem Buche sind sie nicht recht passend. Auch das Weglassen der Buchstabenbezeichnung in den Figuren dürfte sich höchstens beim Vortragen und Prüfen als verwendbar erweisen. Literaturangaben kommen nicht vor. Der II. Band wird Perspektive und Schattenkonstruktion enthalten. *Th. Sch.*

Einführung in die projektive Geometrie. Von Max Zacharias, Oberlehrer am Humboldt-Gymnasium in Berlin. Mathematische Bibliothek, VI. Bändchen. 50 S. mit 18 Figuren. B. G. Teubner, 1912.

Wer sich über die Elemente der projektiven Geometrie ein wenig orientieren will, dem kann das vorliegende Büchlein wärmstens empfohlen werden. In fünf Abschnitten, welche mit den Namen der hervorragendsten Förderer des Wissenszweiges überschrieben sind, findet man eine Reihe von wichtigen Sätzen über projektive Grundgebilde I. Stufe und über Kegelschnitte in der dem Werdegange entsprechenden Aufeinanderfolge behandelt. Durch die anregende Form, welche einen Einblick in die geschichtliche Entwicklung bietet, dürfte so mancher Leser veranlaßt werden, sich mit dem Gegenstande eingehender zu befassen. Die Figuren sind weniger ansprechend, vielleicht weil alle Linien gleich stark gezogen sind. *Th. Sch.*

Die Grundlagen der Geometrographie. Von Adalbert Grüttner. 54 Seiten. Quelle & Meyer in Leipzig, 1912.

Seit Steiner trat wiederholt der Gedanke auf, die geometrischen Konstruktionen in bezug auf Einfachheit und Genauigkeit miteinander zu vergleichen. Herr Grüttner kam selbständig auch auf diesen Gedanken, nachdem die Geometrographie schon einen Namen und zahlreiche Anhänger hatte; erst hinterher lernte er die vorhandene Literatur kennen. In dem vorliegenden Büchlein gibt er nun eine Übersicht und dann eine Kritik der Zählweisen von Lemoine, Bernès, Mehmke, Adler, Papperitz und seiner eigenen. Dabei wendet er sich hauptsächlich gegen das System Papperitz, weil es vorwiegend auf theoretische Umstände (Dualitätsgesetz) Rücksicht nimmt und „über die einfachsten Erfahrungen der Praxis hinweggehe". Hiezu könnte bemerkt werden, daß der praktische Standpunkt eigentlich nur bei den allergewöhnlichsten Konstruktionen berechtigt ist. Da es jedoch eine absolut einwandfreie Zählweise sicher nicht gibt, sollte man eine Einigung durch möglichste Be-

Digitized by Google

schränkung zu erzielen suchen. Referent gibt in seiner Vorlesung gelegentlich das Schema:

Anlegen	a	;	e	Einsetzen	.... Inzidenzen
Geraden	g	;	k	Kreise	.... Linien
	w				.... Werkzeugwechsel

Vom Summieren soll man gänzlich absehen und die Beurteilung der Konstruktionen auf Grund der gefundenen Zahlen möge der Schätzung jedes Einzelnen überlassen bleiben. *Th. Sch.*

Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. Herausgegeben von F. Klein. — Leipzig, Teubner.

I. Band, Heft 5. Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands von J. Schröder. Mit einem Schlußwort zu Band I von F. Klein. (XII u. 183 S.) 1913. M. 6.—.

Der Bericht schildert vor allem die Verhältnisse in Preußen, wo im Jahre 1908 das höhere Mädchenschulwesen neu organisiert wurde. Darnach ist die Normalbildungsanstalt für die gebildete Frau die zehnklassige Mädchenschule (vom 6. Lebensjahre angefangen). Daran schließen sich einerseits zwei Frauenschulklassen, anderseits das vierjährige höhere Lehrerinnenseminar zur Vorbereitung für den Beruf als Lehrerin an mittleren und höheren Mädchenschulen; beide zusammen führen den Namen: Oberlyzeum. Von der viert- bezw. drittletzten Klasse des Lyzeums zweigen die Studienanstalten ab, welche den 3 Typen der höheren Lehranstalten für Knaben entsprechen. Unter den letzteren dominieren die realgymnasialen Kurse. Im Lyzeum überwiegen noch immer die humanistischen Fächer. Die realistischen Fächer sind gegen früher etwas mehr berücksichtigt. Der mathematische Lehrplan der preußischen Lyzeen umfaßt einen geringeren Stoff als z. B. der für die neuen österr. Mädchenlyzeen, welch letzterer auch die Logarithmen und Trigonometrie aufgenommen hat. Die Stundenzahl ist aber für beide annähernd die gleiche. Trotzdem erklärt man in Preußen diese Stundenzahl für zu gering, besonders wenn man das Lyzeum in Parallele mit der sechsklassigen Realschule für Knaben zieht. Gegenwärtig befindet sich das preußische Mädchenschulwesen erst in Umwandlung und die mitgeteilten math. Aufgaben aus Reifeprüfungen an den Oberlyzeen und an den Studienanstalten lassen noch wenig das Eindringen der modernen Grundsätze erkennen. Um die Lehrkräfte mit entsprechender Vorbildung für die neuen Schulen zu erhalten, mußte man verschiedene Übergangsbestimmungen treffen. Man hat die „preußische Oberlehrerin" zum Unterschiede von der weiblichen Oberlehrerin und die sogenannte „Kleine Matrikel" geschaffen. Diese Institutionen dürften sich aber länger erhalten, als man anfänglich dachte.

An die Bemerkungen über Preußen schließen sich solche über die Mädchenschulen in den übrigen deutschen Bundesstaaten an. Zum Teil haben darüber schon die Abhandlungen über das Unterrichtswesen in den betreffenden Ländern berichtet. Bemerkenswert ist insbesondere die Gliederung der höheren Bildungsanstalten für Mädchen in Baden, Bayern, Hessen und Sachsen, welche

Digitized by Google

gegenüber Preußen bemerkenswerte Unterschiede aufweisen, z. B. hinsichtlich der Studienanstalten, ob Gabelung oder Aufbau, hinsichtlich der für die realistischen Fächer insbesondere für Mathematik zur Verfügung stehenden Zeit, hinsichtlich der Zielleistungen in diesen Fächern u. a. m.

Mit diesem Berichte erscheint der Band I dieser Abhandlungen abgeschlossen. Klein weist in seinem Schlußworte auf den Zusammenhang zwischen wissenschaftlicher Mathematik und mathematischem Unterricht hin und schließt mit den Worten: „Die Wissenschaft, sich selbst überlassen, strebt ihrer Natur nach immer mehr dazu, sich zu spezialisieren und sich durch gesteigerte Abstraktion dem allgemeinen Verständnis zu entfremden. Dementgegen bringt eine Betrachtung des Unterrichtswesens, wie sie die IMUK anstrebt, die große Ausdehnung des Gesamtbereiches, auf den die Wissenschaft hinauswirken soll, und die ursprüngliche Art des menschlichen Denkens in den Vordergrund. Und das scheint als Gegengewicht gerade in jetziger Zeit natürlich, ja unentbehrlich."

II. Band, Heft 6. Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen in den thüringischen Staaten von C. Hoßfeld. (IV. und 18 S.) 1912. M. —.80.

Dieser Bericht gibt eine Schilderung der Einrichtungen an den thüringischen höheren Lehranstalten, welche im wesentlichen mit den preußischen übereinstimmen.

III. Band, Heft 6. Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterricht der höheren Schulen Deutschlands, dargestellt vor allem auf Grund älterer und neuerer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen von M. Gebhardt. (VII. u. 157 S.). 1912. M. 4.80.

Der Bericht zerfällt in 5 Teile. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit die Geschichte der Mathematik in den Lehrbüchern gepflegt wird. Wenn man im 19. Jahrhundert überhaupt je Geschichte in der Schule trieb, so geschah es vorwiegend um der Antike willen. Nur wenige Lehrbücher und Aufgabensammlungen machen eine rühmliche Ausnahme. Erst von den Achtzigerjahren angefangen nimmt das Interesse für Geschichte im mathematischen Unterricht zu, zweifellos eine Folge der Forschungen von Hankel und später von M. Cantor. Neuerdings bringen immer mehr Lehrbücher entweder geschichtliche Aufgaben nach dem Muster von Heiß oder besondere Abschnitte über Geschichte der Mathematik oder geschichtliche Einzelnotizen im Lehrtexte eingestreut, beziehungsweise in Anmerkungen und Fußnoten. In den letzten Jahren trug viel zur höheren Wertschätzung des geschichtlichen Momentes im Unterricht die Geschichte der Elementarmathematik von J. Tropfke bei.

Im zweiten Teile wird auf die Schulprogramme eingegangen, soweit dieselben entweder historische Stoffe behandeln oder die methodische Seite der Behandlung historischer Stoffe im Unterricht berühren. Es ist merkwürdig, daß gerade auf diesem Gebiete von Seite der Mathematiklehrer so wenig Nennenswertes geleistet wurde.

Daran schließt Gebhardt im dritten Teile seines Berichtes eine Reihe allgemeiner Bemerkungen über den Wert geschichtlicher Behandlung der Mathematik im Unterricht. Viel zu wenig werde dem Gymnasiasten trotz der vielen klassischen Bildung, die er genießt, klargemacht, daß auch die Mathematik in

Digitized by Google

der Antike wurzle und aufs engste mit der antiken Philosophie verknüpft ist. Man solle die Geschichte der mathematischen Zeichen pflegen, man solle die Leistungen großer Mathematiker ebenso würdigen wie die anderer großer Männer. Beschäftigung mit der Geschichte mancher mathematischer Probleme trete am wirksamsten der vielfach verbreiteten Meinung entgegen, die Mathemathik sei etwas Dogmatisches, in sich Abgeschlossenes. Endlich erblickt Gebhardt in der Geschichte das beste Mittel, um nicht bloß die Einzelprobleme jedes Faches untereinander, sondern auch alle Fächer zu einer höheren Einheit zusammenzufassen, und er schreibt der Geschichte in dieser Richtung einen größeren Wert zu als der Philosophie, der „subjektivsten aller Wissenschaften".

Im vierten Teile bespricht der Verfasser einige methodische Fragen und macht auch einige sehr bemerkenswerte Vorschläge, in welcher Weise das historische Moment in der Schule gepflegt werden solle, ohne daß durch zu große Ausführlichkeit (etwa gar durch einen zusammenhängenden Kursus über Geschichte) andere wichtige Partien des Lehrstoffes unerledigt bleiben oder durch Belastung des Gedächtnisses eine Überbürdung der Schüler erzeugt würde.

Ein überaus ausführliches Literaturverzeichnis, welches der fünfte Teil bringt, erhöht den Wert dieses Berichtes ganz erheblich.

IV. Band, Heft 2. Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie von K. Ott. (VI u. 158 S.) 1913. M. 4.—.

Während im 1. Hefte dieses Bandes Grünbaum den Unterricht in der reinen Mathematik an den obgenannten Fachschulen schildert, wird in diesem Hefte der Unterricht in der angewandten Mathematik an diesen Lehranstalten behandelt. Dieser Unterricht, welcher gegenwärtig fast ausschließlich in den Händen von Ingenieuren liegt, umfaßt — dem Lehrplane der kgl. preußischen Maschinenwerkschulen gemäß — die technische Mechanik einschließlich Festigkeitslehre, graphischer Statik, Wärmelehre und Hydraulik. Auch die Behandlung der Darstellenden Geometrie ist in den Kreis der Betrachtungen einbezogen. Über die Methodik dieses Unterrichtes sagt der Verfasser u. a., es bliebe nichts anderes übrig, als dem Schüler die Hauptmomente des Gehörten kurz zu diktieren. In den an den Unterricht sich anschließenden Übungen beschränkt sich die Tätigkeit des Schülers in der Regel auf die zeichnerische oder rechnerische Durchführung von Aufgaben aus der Statik, darstellenden Geometrie oder Maschinenlehre. Hinsichtlich der Laboratorien ist man in Deutschland nicht so weit wie in England, wo die Laboratoriumstätigkeit ganz im Mittelpunkte der Mathematik und Mechanik steht.

Der Bericht gewährt einen sehr guten Einblick in die Organisation und Durchführung dieses Unterrichts. Besondere Beachtung verdienen die Kapitel, in welchen die Einzelprobleme sowohl der rechnerischen wie der graphischen Methoden der angewandten Mathematik besprochen werden.

V. Band, Heft 2. Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht von W. Lietzmann. (IV u. 88 S.) 1912. M. 2.80.

Dieser dem Andenken P. Treutleins gewidmete Bericht beschäftigt sich mit dem Raumlehreunterricht. Unter Raumlehre wird eine ausschließlich

Digitized by Google

oder doch vorwiegend mit Anschauung und Experiment arbeitende Geometrie verstanden, wie sie an den Volksschulen (durchschnittlich vom 12. bis 13. Lebensjahre angefangen) und in dem propädeutischen Unterricht an den höheren Schulen gelehrt wird. Neben der Besprechung dieses Unterrichts auf Grund der einschlägigen Literatur finden sich auch kurze Ausführungen über Arbeitsschulen, das Beschäftigungsspiel der Kleinen in den Kindergärten, über Werkunterricht, soweit dieselben mit den vorliegenden Fragen in Verbindung stehen. Im zweiten Kapitel werden die zwei Hauptprobleme des Raumlehreunterrichts auseinandergesetzt, einerseits der Zusammenhang mit der praktischen Geometrie, anderseits die methodische Seite des Unterrichts und ein kunsthistorischer Überblick gegeben, beginnend mit Heron, dem Repräsentanten der praktischen Mathematik, und endend mit Pestalozzi, der ja vor allem die Forderung der Anschaulichkeit des Unterrichts aufgestellt hat. Gerade der Mathematiker, dessen eigentlicher Berufskreis weitab von dem der Volksschule liegt, wird diesem Berichte, dem auch ein ausführliches Literaturverzeichnis beigefügt ist, entnehmen, daß auch in dieser Phase des Unterrichts wichtige Probleme liegen. Darum hat auch die IMUK die Absicht, sich mit den psychologischen Fragen des mathematischen Unterrichts, wobei gerade der Anfangsunterricht eine große Rolle spielt, eingehender zu beschäftigen.

V. Band, Heft 3. Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten in Süddeutschland mit Ausführungen von Hensing über Hessen, Cramer über Baden, Geck über Württemberg, Kerschensteiner und Bock über Bayern, nebst einem Einführungswort von P. Treutlein. (XIV u. 173 S.) 1912. M. 5.—.

Man entnimmt diesem Berichte in erster Linie eine ausführliche Schilderung der Organisationen der Volks-, Mittel- und Fortbildungsschulen in den einzelnen süddeutschen Ländern, ferner der Lehrpläne sowohl für den Rechen- als auch für den Raumlehreunterricht in diesen Schulen. Eine kurze zusammenfassende Übersicht wird von Treutlein im Einführungsworte gegeben. Der Bericht über Hessen enthält insbesondere eine eingehende Kritik der Methodik des Volksschulunterrichts. In dem Berichte über Baden ist bemerkenswert, was über das von Schulrat Sickinger eingeführte sogenannte Mannheimer System gesagt wird, dessen Grundprinzip darin besteht, den Unterricht in großen Volksschulkörpern „nicht schematisch einheitlich, sondern differenziert einheitlich“ zu betreiben. So gibt es in Mannheim nebst den eigentlichen acht Hauptklassen, Förder- und Hilfsklassen mit Abschlußklassen für minderbegabte Schüler, ferner Sprachklassen (Bürgerschulen) und endlich spezielle Vorbereitungsklassen für höhere Schulen. In Bayern ist die von Kerschensteiner neu geschaffene Organisation der Fortbildungsschule in München hervorzuheben, welche die Beendigung der Volksschule zur Voraussetzung hat, obligatorisch ist, nach Beschäftigungen der Schüler und Schülerinnen organisiert ist und sich bei Knaben auf 3—4 Schuljahre erstreckt. Für die Maschinenbau- sowie für die kaufmännische Fortbildungsschule sind die Lehrpläne mitgeteilt. Hervorheben möchte ich hier auch den aus dem Jahre 1907 herrührenden Lehrplan für die Werktagvolksschulen in München, welcher in dem geometrischen Anschauungskurse als letzte Aufgabe für die 8. Volksschulklasse im Anschlusse an das

Digitized by Google

bürgerliche Rechnen, den Geographie-, Physik- und Chemieunterricht, die graphische Darstellung der Veränderlichkeit einer beobachteten Größe fordert.

An die Schilderung des Volksschulunterrichts in jedem der süddeutschen Staaten schließen sich in den einzelnen Berichten Bemerkungen über die Heranbildung der Volksschullehrer und -lehrerinnen in den Lehrerbildungsanstalten an. In Bayern und Hessen umfaßt die Ausbildung der Lehrer 5 Jahre, davon 3, beziehungsweise 2 Jahre in Präparandenschulen, die letzten Jahre im Seminar. In Baden und Württemberg dient eine einheitliche Schulgattung, die sechsklassige Lehrerbildungsanstalt zur Heranbildung der Volksschullehrer. Es scheint aber, daß auch dort, wo die Lehrerbildung nur 5 Jahre umfaßt, vielfach der Wunsch geäußert wird, die Ausbildung auf 6 Jahre auszudehnen, um dem Lehrer eine größere Allgemeinbildung zu geben und ihn nicht vor dem 20. Lebensjahre in den Beruf hinauszustellen. Der mathematische Lehrplan geht am weitesten in württembergischen Lehrerbildungsanstalten und unterscheidet sich in keinem wesentlichen Punkte von dem für höhere Schulen. Logarithmen und Trigonometrie werden jedoch auch in Baden und Hessen in das Lehrziel einbezogen. Nur in Bayern geht man ungefähr so weit, wie in den österr. Lehrerbildungsanstalten.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique. Publications du comité central redigées par H. Fehr. 2. Série, fasc. I. — Novembre 1912. Compte rendu du Congrès de Cambridge 21—27. août 1912. — Genève, Georg et Co., 1912. Fr. 2.50.

Fehr berichtet über den Verlauf der Sitzungen, welche die IMUK auf dem Kongresse in Cambridge abgehalten hat. Dieselben galten vor allen der Vorlage der bisher fertiggestellten Berichte sowie der Diskussion über zwei Themen: 1. Die mathematische Ausbildung des Physikers auf der Universität und 2. Anschauung und Experiment im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. Der Bericht von Runge über das erste Thema schließt mit den Worten: „Die Hauptsache liegt in der Kluft zwischen Physikern und reinen Mathematikern, die noch größer zu werden droht. Die reine Mathematik leidet unter einer Überspezialisierung und schließt sich immer mehr sowohl von der theoretischen wie von der experimentellen Naturwissenschaft ab. Vorschriften können hier wenig helfen. Was aber erreichbar ist, das ist die Forderung, daß die Mathematiker diese Probleme und Bedürfnisse der Physiker verstehen sollen.“ An diesen Bericht von Runge schloß sich eine sehr lebhafte Diskussion, in der sich die Vertreter der Mathematik sowie die der angewandten Mathematik und die Physiker mitunter sehr temperamentvoll entgegentraten. Über das zweite Thema berichtete D. J. Smith und stellte hiebei zwei Fragen in den Vordergrund, deren Behandlung er als das eigentliche Ziel für die nächsten Jahre bezeichnete: einerseits wie weit ist die Geometrie auf den höheren Schulen induktiv, wie weit deduktiv zu behandeln? anderseits welche Rolle soll die Anschauung bei der Behandlung des Funktionsbegriffes spielen.

In der letzten Sitzung machten Goldzieher und Smith Bemerkungen über eine Bibliographie, die sämtliche mit der Reformbewegung im mathematischen Unterricht zusammenhängenden Veröffentlichungen aller Länder zwischen 1900 und 1912 mit Ausnahme der Schulbücher umfassen soll und vom amerikanischen Bureau of Education herausgegeben wird. Diese Bibliographie ist unterdessen bereits erschienen.

Digitized by Google

Die Tätigkeit der IMUK hat auf diesem Kongresse nicht ihr Ende gefunden, da noch nicht sämtliche Länder ihre Arbeiten abgeschlossen haben. Darum wird die Kommission bis zum nächsten Kongreß im Jahre 1916 fortbestehen.

Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission, Heft 8, enthaltend: P. Staeckel, Nachruf auf P. Treutlein, und W. Lietzmann, Der Internationale Mathematikerkongreß in Cambridge. — Leipzig, Teubner, 1913. M. 1.60.

Staeckel entwirft in seinem warmempfundenen Nachruf ein Bild von dem Lebensgange und der fruchtbaren Tätigkeit des bekannten badischen Mathematikers und Schulmannes P. Treutlein, welcher insbesondere ein eifriger Verfechter der Zweistufigkeit des mathematischen Unterrichts war.

Lietzmanns Bericht enthält außer einer Schilderung des allgemeinen Verlaufes der Kongreßberatungen eine ausführliche deutsche Wiedergabe des von der Kommission herausgegebenen, im obigen besprochenen Compte rendu mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der deutschen Unterkommission, sowie der beiden Referate von C. Runge und D. J. Smith mit den daran sich anschließenden Diskussionen.

Astronomischer Kalender für 1914. Herausg. von der k. k. Sternwarte Wien, Carl Gerolds Sohn. K 3.—.

Im wesentlichen der bekannte Kalender, welchem beigegeben sind je eine Abhandlung über die totale Sonnenfinsternis vom 21. August 1914 von H. Krumpholz, zum Merkurdurchgang am 7. November 1914 von J. Holetschek und der Bericht über neue Asteroiden und Kometen von J. Hepperger, dem wir entnehmen, daß in der Zeit vom 1. Oktober 1912 bis 1. Oktober 1913 im ganzen 93 Asteroide als neu entdeckt gemeldet wurden, von denen 83 als Neuentdeckungen anzunehmen sind. Die Gesamtzahl der Asteroiden beträgt bis jetzt 754.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1914. Paris, Gauthier-Villars.

Dieser Jahrgang berücksichtigt außer den astronomischen Daten besonders Physik und Chemie und bringt eine Abhandlung von Bigourdau: Der Tag und seine Teilungen, eine Notiz über die 17. Konferenz der internat. geodätischen Assoziation von Baillaud und über die Deformation der Bilder durch das Fernrohr von Hatt.

Arbeiten des Bundes für Schulreform, Heft 3. Mathematik und Naturwissenschaften an den deutschen Lehrerbildungsanstalten von K. Umlauf. — Leipzig, Teubner, 1912. M. 3.60.

Im Jahre 1910 wurde vom Bunde für Schulreform auf Anregung des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht eine Umfrage veranstaltet, welche den gegenwärtigen Stand des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an den deutschen Lehrerbildungsanstalten zum Gegenstand hatte. Diese Umfrage ist die Grundlage des vorliegenden Berichtes. Derselbe gibt zunächst eine kurze Übersicht über die Organisation der Lehrerbildungsanstalten in den einzelnen deutschen

Digitized by Google

Bundesstaaten, welche natürlich sehr vielgestaltig ist, was sowohl die Zahl der Jahrgänge (5—6) als auch die Zahl der Lehrstunden für die einzelnen Fächer (z. B. für Rechnen und Mathematik 17—28 wöchentliche Stunden in sämtlichen Jahrgängen zusammengenommen) anlangt. Der Bericht umfaßt den gesamten mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, also den Rechen- und Mathematikunterricht, Physik, Chemie und Biologie. Den Schluß bildet die Beschreibung der Einrichtungen einiger neuerer Seminare Deutschlands. Für den mathematischen Unterricht gipfelt der Bericht in der Forderung, daß für die Lehrerbildungsanstalt dieselben Grundsätze gelten sollen, wie sie von der deutschen Unterrichtskommission für die höheren Schulen in den Meraner Vorschlägen zum Ausdruck gebracht wurden, also insbesondere Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und Erziehung zur Gewöhnung des funktionalen Denkens; der Unterricht müsse auch in der Lehrerbildungsanstalt bis zur Schwelle der Infinitesimalrechnung führen und die Elemente der analytischen Geometrie einschließen. Besonders hervorgehoben ist auch eine stärkere Pflege der mathematischen Erd- und Himmelskunde. Außer der Allgemeinbildung habe natürlich die Lehrerbildungsanstalt auch die Methodik jedes einzelnen Faches zu pflegen. Diese Unterweisung solle nach den Vorschlägen dieses Berichtes z. B. für den Rechenunterricht schon in den mittleren Klassen anfangen und Hand in Hand mit den entsprechenden Unterrichtsübungen erfolgen.

Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Heft 14. Vorschläge für den mathematischen, naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminaren. Unter Mitwirkung von Fachmännern ausgearbeitet vom Ausschusse. Leipzig, Teubner, 1912. M. 1.80.

Diese Vorschläge hängen zum Teil mit dem vorhin besprochenen Berichte des Bundes für Schulreform zusammen. Sie umfassen außer dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht auch die Erdkunde. Der Deutsche Ausschuß hat eine Reihe von Leitsätzen aufgestellt, welche sehr beachtenswert sind und von denen im folgenden einzelne herausgegriffen werden: Die Vorbereitung für den Lehrberuf solle mindestens einen Zeitraum von 6 Jahren, von dem Abschluß der Volksschule an gerechnet, umfassen und sich sowohl auf die Allgemeinbildung als auch auf die Berufsbildung erstrecken. Beide sollen voneinander getrennt behandelt werden, und zwar die Berufsbildung erst am Schlusse der gesamten Ausbildung. Ferner soll beim Stundenausmaß für die verschiedenen Lehrbereiche im Seminar als Grundsatz gelten, daß diejenigen Lehrfächer einzuschränken sind, welche nicht für alle Schüler die gleiche Wichtigkeit besitzen (z. B. Fremdsprachen), daß dagegen diejenigen größere Berücksichtigung finden, zu deren Beherrschung praktische Übung und Ausbildung, Einführung in wissenschaftliche Forschungsmethoden, Benützung von Sammlungen, Apparaten oder sonstigen dem Volksschullehrer meist nicht zur Verfügung stehenden Einrichtungen unerläßliche Bedingungen sind. Demgemäß ist in dem vorliegenden Entwurfe die für die naturwissenschaftlichen Fächer und Übungen festgesetzte Stundenzahl von bisher etwa 20 Stunden (für die ersten 5 Jahrgänge) auf 38 vermehrt. Der Lehrplan für Mathematik ist auf den Grundsätzen der Meraner Vorschläge aufgebaut und umfaßt die Behandlung der einfachsten algebraischen Funktionen, der Exponential- und der logarith-

Digitized by Google

mischen Funktionen; in der Geometrie legt man großen Wert auf das geometrische Zeichnen (Darstellung in schräger Parallelperspektive) und auf die Behandlung der Trigonometrie, sowohl der ebenen Trigonometrie als auch einiger Sätze aus der sphärischen Trigonometrie. Besonders werden die Anwendungen betont (darunter auch die einfachsten Aufgaben aus der Versicherungsrechnung). Die konstruktive und analytische Behandlung der Kegelschnitte ist dagegen dem wahlfreien zweistündigen Unterricht in der obersten Klasse zugewiesen.

Nichteuklidische Geometrie. Von Dr. Heinrich Liebmann, a.-o. Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 39 Figuren. Zweite, neubearbeitete Auflage. Sammlung Schubert XLIX. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1912. VI u. 222 Seiten. Preis geb. M. 6.50.

Gegenüber der im Jahre 1905 erschienenen ersten Auflage weist die vorliegende zweite zahlreiche Änderungen auf. In das erste Kapitel, das vom Parallelenpostulat und seinen Scheinbeweisen handelt, ist nunmehr das Axiomensystem von Hilbert aufgenommen und ferner der wichtige Satz von der Mittellinie kongruenter Punktreihen, den Hjelmslev als vom Parallelenpostulat unabhängig nachgewiesen hat. Bei der Aufzählung der Axiome sind einige Versehen unterlaufen, u. zw. sind die Axiome I, 2 und II, 1 (p. 4), sowie I, 5 (p. 18) nicht richtig formuliert. Auch die Behauptung auf p. 5, Z. 1—2 v. o., daß aus den beiden ersten Axiomen der Anordnung II, 1 und II, 2 (p. 4) folgt, daß es zwischen zwei Punkten A und B einer Geraden unbegrenzt viele Punkte gibt, ist nicht richtig; dazu müßte erst bewiesen werden, daß die Annahmen, C liegt zwischen A und B, D liegt zwischen A und C, zur Folge haben, daß D auch zwischen A und B liegt, was aber nur mit Hilfe des Axioms II, 4 von Pasch (p. 5) erreicht wird. Der Beweis auf p. 12 ist durch Druckfehler derart entstellt, daß er fast unverständlich wird.

Das zweite Kapitel behandelt die Elementargeometrie in der hyperbolischen Ebene (p. 21—56) und die Grundlagen des hyperbolischen Raumgeometrie (p. 56—64). Das wichtigste Hilfsmittel, das beim Aufbau verwendet wird, besteht in der Zuordnung eines rechtwinkeligen Dreieckes und eines dazu „komplementären" dreirechtwinkeligen Viereckes, aus welcher dann die Neper-Engelsche Regel (p. 40—41) folgt. Der Zusammenhang komplementärer Figuren wird diesmal innerhalb der Ebene selbst und nicht, wie in der ersten Auflage, mittels eines sphärischen Dreieckes aufgestellt. Außerdem werden die Zyklen und ihre Abbildung durch komplementäre Ordinaten, sowie die Inhaltsbestimmung des Dreieckes besprochen. § 13 enthält den von den Begründern der nichteuklidischen Geometrie in den Vordergrund gestellten Satz, daß auf der Grenzkugel die euklidische Geometrie gilt. Während die Beweise auf p. 24—27 recht unklar sind, dürfte § 10 (p. 37—42) zu den besten des Buches gehören. Unrichtig ist die Behauptung auf p. 55, Z. 3—1 v. u., daß aus $f(\delta) + f(\pi - \delta) = \pi$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$ (hier ist überdies ein Druckfehler) folgen soll, daß $f(\delta) \equiv \pi - \delta$ ist (was übrigens $\equiv \delta$ heißen soll); wie man leicht sieht, kann die Funktion $f(\delta)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ganz willkürlich angenommen werden, wenn sie nur die Bedingungen $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ erfüllt.

Digitized by Google

Im dritten Kapitel wird die hyperbolische Trigonometrie aufgebaut. Es ergeben sich zuerst Formeln für das rechtwinkelige Dreieck, in denen nicht die Winkel des Dreieckes selbst, sondern die Lote vorkommen, deren Parallelwinkel sie sind. Erst nach Festsetzung des Winkelmaßes werden die Winkel selbst in die Formeln eingeführt. Den Schluß dieses Kapitels bildet der Nachweis, daß im kleinen die euklidische Geometrie gilt, sowie eine darauf beruhende, von Gauß angedeutete Ableitung der nichteuklidischen Geometrien und endlich die Deutung der hyperbolischen Planimetrie als sphärische Geometrie auf einer Kugel vom Radius $i = \sqrt{-1}$. Von den mannigfaltigen Druckfehlern dieses Kapitels sei bloß hervorgehoben, daß der Sinussatz (p. 74, letzte Zeile) unrichtig angeschrieben ist. Auf p. 84, Z. 3 v. o., wird ferner auf „Formeln (1) bis (5)" verwiesen, die wohl in der ersten Auflage (auf p. 130) vorkommen, in der zweiten aber teilweise weggeblieben und überhaupt nicht numeriert sind.

Das vierte Kapitel, das Längen- und Inhaltsmessungen behandelt, hat nur geringe Änderungen erfahren (auch in bezug auf die Druckfehler); dagegen sind im fünften Kapitel, wo die analytische Geometrie der hyperbolischen Ebene mit Benützung der Weierstraßschen homogenen Koordinaten entwickelt wird, neu aufgenommen die Cayley-Kleinsche Metrik, sowie die konforme Abbildung der hyperbolischen Ebene, bei welcher den Geraden derselben die Kreise eines Bündels mit reellem Orthogonalkreis entsprechen. (In der ersten Auflage war dieser Abbildung ein eigenes Kapitel gewidmet.) Sehr gekürzt wurde auch die Geometrie der Kegelschnitte in der hyperbolischen Ebene.

Die wesentlichste Änderung, die das sechste Kapitel erfahren hat, ist die Aufnahme der Studyschen Abbildung der Speere des elliptischen Raumes (p. 186—194). Die Schilderung einer Konstruktion auf p. 157 ist wohl etwas allzu knapp ausgefallen und enthält überdies in Z. 6 v. o. einen irreführenden Druckfehler.

Im letzten Kapitel, das einiges aus der nichteuklidischen Mechanik enthält, ist als neu hinzugekommen zu erwähnen die Darstellung der Beziehungen des Relativitätsprinzips zur hyperbolischen Geometrie.

Im ganzen scheint der Verfasser offenbar bestrebt gewesen zu sein, den Umfang des Werkes nach Möglichkeit zu verringern; jedenfalls ist es ihm gelungen, die Seitenzahl um 26 herabzudrücken, freilich nicht selten auf Kosten der Deutlichkeit, die außerdem noch durch eine recht große Zahl von Druckfehlern gestört wird.

Der kundige Leser wird gewiß in dem Buche vieles finden, was ihn interessiert; wir glauben aber nicht, daß der mit dem Gegenstand nicht vertraute Anfänger, der aus dem Buche lernen will — und nach dem Plane der Sammlung Schubert sollte man diese Absicht immerhin für berechtigt halten — jenes Maß von Geduld aufbringen wird, das notwendig ist, sich durch das stellenweise recht dichte Gestrüpp von Versehen, Unklarheiten und sinnstörenden Druckfehlern hindurchzufinden. *H. Rothe.*

Leçons de Mathématiques générales. Par L. Zoretti, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. Avec une préface de P. Appell, Paris, Gauthier-Villars, 1914. XVI et 753 pages.

Digitized by Google

Hervorgegangen aus Vorlesungen, welche der Verfasser während dreier Jahre an der Faculté de Grenoble für die Studierenden der „Mathématiques générales des Facultés des Sciences" hielt, soll das vorliegende Werk hauptsächlich allen jenen dienen, welche für irgend einen Zweck die Mathematik als Hilfswissenschaft brauchen.

Der erste der drei Teile des Buches behandelt die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, sowie die Theorie der Vektoren, ohne daß die Symbolik der Vektoranalysis eingeführt würde. Der zweite Teil bringt aus der Algebra die Lehre von den komplexen Zahlen, den binomischen Lehrsatz, einiges über Determinanten, numerische Auflösung von Gleichungen und das Wichtigste über numerisches und graphisches Rechnen, ferner die Differentialrechnung nebst ihren Anwendungen auf die Theorie der ebenen und räumlichen Kurven, der Flächen und schließlich auf Probleme der Kinematik des materiellen Punktes und des starren Körpers. Der dritte Teil enthält die Integralrechnung nebst geometrischen und mechanischen Anwendungen, zwei kurze Kapitel über elliptische Funktionen und Fouriersche Reihen, ferner zwei Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen nebst Anwendungen und schließlich einige Andeutungen über partielle Differentialgleichungen. Diese kurze Inhaltsangabe dürfte vielleicht eine Vorstellung von dem reichen und vielseitigen Inhalt des Werkes geben.

Daß die Darstellung sich dem Zwecke des Buches anpaßt und deshalb keine vollständig strenge sein kann, braucht wohl kaum gesagt zu werden. Der Verfasser hat natürlich auf die Ausführung abstrakter Beweise verzichtet und sich häufig damit begnügt, die Sätze anschaulich plausibel zu machen. Hingegen hat er an wichtigen Stellen, wie z. B. bei der Definition des bestimmten Integrals (p. 502) wenigstens angegeben, was eigentlich noch zu beweisen übrig bliebe. Die unendlich kleinen Größen werden in einwandfreier Weise eingeführt; Grenzwert und Stetigkeit werden offenbar als aus den Elementen bekannt vorausgesetzt.

Es seien noch folgende, einige Einzelheiten betreffende Bemerkungen beigefügt:

p. 3: Die Formeln (1), welche dort Chasles zugeschrieben werden, stammen doch wohl von Möbius.

p. 8, Z. 12 v. u.: Die Bezeichnung homogene Koordinate für die Teilverhältniskoordinate ist wohl nicht gebräuchlich.

p. 63: Die Seitenüberschrift ist nicht richtig.

p. 96—97: Die Ableitung der Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel ist etwas gekünstelt.

p. 100, Z. 14 v. u.: Statt „sommet" lies „foyer".

p. 130, Z. 1 v. u.: Statt „ellipses" lies „cercles".

p. 218, Z. 1 v. u.: Die Bezeichnung „semikonvergent" für „bedingt konvergent" ist nicht gebräuchlich.

p. 240: Fig. 77 ist umzudrehen.

p. 281, von Z. 6 v. u. an: Die Bezeichnung dx und dy müßte erst noch gerechtfertigt werden (vgl. p. 277, Z. 6 v. u.).

p. 317: Fig. 100 ist nicht richtig; die Kurve muß an der y-Achse gespiegelt werden.

p. 322, Z. 3 v. u. ist im allgemeinen nicht richtig.

Digitized by Google

p. 596, Fig. 171: Die Winkel sind in der Figur anders bezeichnet als im Text.

p. 649—650: Im Beispiel wird nicht, wie angegeben, das gemeinsame Volumen beider Zylinder gerechnet.

p. 709, Z. 9 v. o.: Hier wird die Bezeichnung partikuläres Integral verwendet, aber nirgends erklärt.

p. 730, Z. 5 v. o. ist zu streichen: de révolution.

p. 746, Z. 9—10 v. o. fehlt die Angabe des Geltungsbereiches der Potenzreihen für e^x und $l\,(1 + x)$.

Außerdem finden sich gelegentlich Rechenfehler, z. B. auf p. 60, Beispiel 6, p. 113, Z. 13 und 9 v. u., p. 547, Z. 4 und 1 v. u., etc., und eine nicht geringe Zahl von Druckfehlern. Algebraische und transzendente Kurven werden nicht definiert, doch wird manchmal stillschweigend vorausgesetzt, daß die betrachtete Gleichung $f\,(x, y) = 0$ eine algebraische Kurve darstellt (p. 299, Z. 3 v. o., und p. 314, Z. 8 v. u.); das Wort „transzendent" wird auf p. 322 gebraucht. Singuläre Punkte werden nirgends definiert, obwohl von ihnen mehrfach gesprochen wird. Auffallend ist, daß bei den Kurven: Strophoide (p. 317), Zissoide (p. 317), Descartessches Blatt (p. 318), Lemniscate (p. 319), etc. jede geometrische Definition fehlt; diese Kurven werden bloß durch ihre Gleichungen definiert.

Wenn dieses hübsche Werk wegen seines beträchtlichen Umfanges, seines mannigfaltigen Inhaltes und seiner manchmal immerhin etwas gedrängten Darstellung für ein erstes Studium vielleicht weniger in Betracht kommt, so ist doch sicher anzunehmen, daß es als Ergänzung zu einer Vorlesung, bei der Wiederholung und als Nachschlagewerk sehr gute Dienste leisten wird.

H. Rothe.

Letzte Gedanken. Von Henri Poincaré. Mit einem Geleitwort von Wilhelm Ostwald. Übersetzt von Dr. Karl Lichtenecker. Leipzig, 1913. Akademische Verlagsgesellschaft. 261 Seiten.

Das vorliegende Buch enthält die in den letzten Jahren seines Lebens von Poincaré veröffentlichten Aufsätze über allgemeinere Fragen. Gleich der erste Aufsatz: „Sind die Naturgesetze veränderlich?" zeigt uns die charakteristische Art des Verfassers, philosophische Probleme anzufassen. Es ist in den letzten Jahren viel gegen den „Konventionalismus" gewettert worden; aber wenn man wieder Poincarés so klare, von jeder Übertreibung und Zweideutigkeit, von jedem leeren Wortgepränge freie Sprache vernimmt, verstummen alle Bedenklichkeiten und wir erkennen wieder gern den „Konventionalismus" als eine Aufklärungsarbeit gegenüber den Scheinproblemen einer bloß grammatikalisch orientierten Scheinphilosophie an.

Ein zweiter Aufsatz: „Raum und Zeit" bespricht die heute durch die Relativitätstheorie mehr denn je besprochenen Probleme der Relativität von Raum, Zeit und Bewegung in origineller und — man kann die Wiederholung dieses Wortes bei einer Poincarébesprechung nicht vermeiden — aufklärender Weise.

Der dritte Aufsatz, der betitelt ist: „Warum der Raum dreidimensional ist", sucht in Ausführung einiger schon in dem Buche „Wert der Wissenschaft" veröffentlichter Gedanken genau festzustellen, welchen sinnlichen Erfahrungen

Digitized by Google

wir eigentlich Ausdruck geben, wenn wir den Satz: „Unser Raum ist dreidimensional" aussprechen.

Der vierte Aufsatz: „Die Logik des Unendlichen" ist für den modernen Mathematiker besonders interessant. Es wird, von den Paradoxien der Mengenlehre ausgehend, die ganze Begriffsbildung dieser Disziplin kritisiert und, teilweise in Übereinstimmung mit Russell, der von den modernen Mengentheoretikern begangene Fehler darin gesehen, daß Klassifikationen verwendet werden, die nicht „wohlbestimmt" sind, sondern durch die Tatsache der Klassifikation selbst verändert werden. Auch die Zermelosche Axiomatik wird verurteilt.

Im fünften Aufsatz: „Die Mathematik und die Logik" wird dieser Widerstreit zwischen dem Verfasser und den Mengentheoretikern psychologisch analysiert und zwei Denktypen aufgestellt, der „Cantorianer" und der „Pragmatiker", die ganz verschiedene logische Bedürfnisse haben.

Der sechste Aufsatz: „Die Quanten-Hypothese" und der siebente „Materie und Weltäther" besprechen die modernsten Anschauungen der theoretischen Physik, wobei zahlreiche eigene Ideen eingestreut sind.

Mit dem achten Aufsatz: „Moral und Wissenschaft" und dem neunten: „Die Sittlichkeit als Gemeingut" wendet sich Poincaré einem ganz neuen Gebiet zu. Er sucht ganz nüchtern und ohne Voreingenommenheit festzustellen, was Wissenschaft und Moral miteinander zu tun haben. Es wirkt unendlich wohltuend, auf einem Gebiete, wo herkömmlicherweise mehr Schwung als Klarheit herrscht, einer Darstellung zu begegnen, die alle Dinge einfach so nimmt, wie sie liegen.

Die Bedeutung Poincarés als Philosoph scheint mir in Deutschland noch viel zu wenig gewürdigt zu werden, besonders auch von seiten verwandter philosophischer Strömungen. Ich möchte aber diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne die Mathematiker und Physiker darauf hinzuweisen, daß für sie von Poincaré aus der beste Zugang zur Philosophie ausgeht.

Philipp Frank.

Probleme der modernen Astronomie. Von S. Oppenheim. (Aus Natur und Geisteswelt, Nr. 355.) B. G. Teubner.

Wie sehr verbreitet auch das Interesse für den gestirnten Himmel ist, so schwierig ist es doch, dem Laien klar zu machen, welches die Probleme sind, mit denen heute die astronomische Wissenschaft sich beschäftigt. Verhältnismäßig leicht lassen sich noch kosmogonische Spekulationen und astrophysikalische Ergebnisse auseinandersetzen. Der Verfasser des vorliegenden Büchleins aber bohrt, wie man zu sagen pflegt, das Brett dort, wo es am dicksten ist, und macht sich gerade an die dem Laien am fernsten liegenden Probleme, die gewöhnlich in der Himmelsmechanik mit Aufgebot unendlicher mathematischer Formeln behandelt werden. Es werden in sechs Kapiteln besprochen: I. Das Störungsproblem. II. Das Stabilitätsproblem. III. Das Kometenproblem. IV. Das Problem der Gestalt der Himmelskörper. V. Das Problem der Verteilung und Bewegung der Sterne im Raum. VI. Das Newtonsche Gravitationsgesetz.

Es gelingt dem Verfasser auch tatsächlich ohne jede Anwendung mathematischer Formeln das Wesen und die bisher erzielten Lösungen der genannten Probleme begreiflich zu machen. Das Büchlein ist aber auch dem Mathematiker und Physiker, der sich auf diesem Grenzgebiete eine erste Orientierung verschaffen will, sehr zu empfehlen. *Philipp Frank.*

Digitized by Google

Die Theorie der Wechselströme. Von Dr. Ernst Orlich. (Mathem.-phys. Schriften für Ingenieure und Studierende, herausg. von E. Jahnke. Bd. 12.) Leipzig, B. G. Teubner, 94 Seiten.

Das Buch behandelt in kurzer, aber dabei sehr klarer Weise einen sehr reichen Stoff. Zuerst werden die durch eine harmonische Funktion der Zeit darstellbaren Ströme erörtert und an ihnen alle Grundbegriffe klargemacht; dann folgen allgemeine durch Fouriersche Reifen darstellbare (mehrwellige) Wechselströme, wobei die Begriffe: Form- und Scheitelfaktor, Leistungs- und Querwiderstand u. a. erläutert werden. Dann folgen die Mehrphasenströme und am Schluß eine Betrachtung des „Hauteffektes", vermöge dessen stark frequente Ströme sich hauptsächlich an der Oberfläche des Leiters verteilen.

Das Buch ist insbesondere geeignet, den Mathematiker in das behandelte Gebiet einzuführen. Ich möchte ausdrücklich darauf aufmerksam machen, daß der Hochschullehrer der Mathematik darin reiche Anregung für Beispiele zu Vorlesungszwecken findet. Die Kenntnis der Wechselstromtheorie gibt ihm Gelegenheit zu interessanten Beispielen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, den Fourierschen Reihen, der Vektorrechnung, dem Rechnen mit komplexen Größen. Es können dadurch die Vorlesungen über Grundbegriffe der höheren Mathematik sehr bereichert und an Stelle der traditionellen Pendelbewegung und Saitenschwingung mannigfaltigere und praktisch bedeutsamere Beispiele gesetzt werden. *Philipp Frank.*

Der Weltäther. Von Sir Oliver Lodge. (Aus der Sammlung „Die Wissenschaft", Heft 41.) Übersetzt von Hilde Berkhausen. Vieweg, Braunschweig, 107 Seiten. Geh. M. 3.—, geb. M. 3.60.

Durch die Relativitätstheorie ist das Interesse für die optischen Vorgänge im bewegten Körper sehr rege geworden; die Kenntnis dieser Vorgänge ist ja die notwendige Voraussetzung eines wirklichen Verständnisses dieser modernen Theorie. Die Bücher über das Relativitätsprinzip behandeln aber diese Erscheinungen meist nur einleitungsweise und kurz, so daß heute schon viele Leute existieren, welche die Theorie von Vorgängen ausgezeichnet beherrschen, von denen sie kaum etwas wissen.

Das vorliegende Buch, die Übersetzung eines im Jahre 1909 erschienenen Originals, behandelt nun gerade die genannten Erscheinungen in außerordentlich klarer und eindrucksvoller Weise. Die Sprache des Buches ist so plastisch, oft möchte man sogar sagen drastisch, daß die Lektüre geradezu spannend wird. Nirgends sind darin schwierige Abstraktionen, sondern überall anschauliche und mit numerischen Angaben belegte Darstellungen zu finden.

Zum Verständnisse sind nur Vorkenntnisse aus den Elementen der Experimentalphysik erforderlich; nur in einem Anhange werden einige Dinge auch mathematisch ausgeführt. *Philipp Frank.*

Physikalisches über Raum und Zeit. Von Emil Cohn. Zweite, verbesserte Auflage. B. G. Teubner, Leipzig, 1913, 24 Seiten. M. —.80.

Diese Broschüre, welche in kurzer und doch klarer Weise in die Relativitätstheorie einführt, erscheint in zweiter Auflage, bei welcher Gelegenheit

Digitized by Google

überall die neuesten Fortschritte berücksichtigt worden sind. Das Originellste darin ist das vom Verfasser ersonnene Modell für die Einsteinsche Uhrenregulierung. Ein solches Modell wurde im letzten Jahre unter Anleitung des Herrn Dr. L. Flamm auch in Wien ausgeführt und ist im Institut für theoretische Physik aufbewahrt. *Philipp Frank.*

Die Lehre von den Kettenbrüchen. Von Oskar Perron. Band XXXVI aus B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Teubner, 1913. 520 S., geheftet M. 20.—, in Leinwand geb. M. 22.—.

Es fehlte bisher eine zusammenfassende Darstellung der mannigfachen Resultate, die über Kettenbrüche in alter und neuer Zeit gewonnen wurden, — eine Lücke, die das vorliegende Buch in dankenswerter und ausgezeichneter Weise ausfüllt. Stofflich zerfällt das Buch in zwei Hauptteile. Aus dem ersten arithmetischen Teil sei hervorgehoben die allgemeine Lehre von den regelmäßigen Kettenbrüchen; die Periodizität und die speziellen Ergebnisse über die Perioden bei quadratischen Irrationalitäten; die insbesondere von Hurwitz untersuchten Kettenbruchtypen, deren Teilnenner eine Anzahl arithmetischer Reihen höherer Ordnung bilden, wozu auch gewisse schon Euler bekannte mit der Zahl e zusammenhängende K. gehören; die transzendenten Zahlen Liouvilles und die durch die quasiperiodischen K. Maillets dargestellten; allgemeines über die halbregelmäßigen K. (bei denen neben Teilzählern $= +1$ auch solche $= -1$ zugelassen sind) sowie gewisse besonders studierte Spezialfälle. Aus dem Inhalt des zweiten analytisch-funktionentheoretischen Teiles seien genannt die Konvergenzkriterien; Beziehungen von unendlichen Reihen und Produkten zu K., speziell von Potenzreihen zum „korrespondierenden" und zum „assoziierten" K., hier finden der Gaußsche K. im Fall der hypergeometrischen Reihe, ein allgemeinerer von Heine, aber auch eine neue Untersuchung periodischer K. Platz, die gewissen speziellen zweiwertigen algebraischen Funktionen entsprechen; mit Sorgfalt werden dabei auseinandergehalten formales Entsprechen der unendlichen Symbole (Reihe und K.), die Konvergenzfrage und die Frage der zahlenmäßigen Gleichheit; hiebei wird ein bemerkenswerter Divergenzfall mitgeteilt; im Anschluß an eine Auseinandersetzung des Stieltjesschen Integralbegriffs werden die Stieltjesschen K. dargestellt; weiters werden behandelt die durch eine Padésche Tafel gelieferten Approximationen von Potenzreihen durch rationale Funktionen; K., deren n-ter Teilzähler und Teilnenner rationale Funktionen von n sind.

Das klar und lesbar geschriebene Buch stellt aber, ganz abgesehen von den neuen Ergebnissen, die es bringt, auch hinsichtlich der älteren Resultate mehr als eine bloße Zusammenfassung dar. In der älteren Literatur stößt man auf Schritt und Tritt auf Beweise, die den heutigen Anforderungen an Vollständigkeit und Strenge nicht durchaus entsprechen, so daß der Leser ständig auf der Hut vor Beweislücken sein muß; manche dieser Lücken sind durch spätere Arbeiten ausgefüllt, manche andere sind unausgefüllt geblieben. Darin, daß Herr Perron es unternommen hat, durchwegs exakte Beweise zu bringen, liegt ein nicht geringer Teil der Arbeit, aber auch ein wichtiges Verdienst des Buches. Daß hiebei den höchsten Anforderungen, die wir heute erheben, ent-

Digitized by Google

sprochen wurde, dafür gab wohl allein der Name des Verfassers Gewähr. Im übrigen ermöglichte es die einheitliche Darstellung (sie ist rein arithmetisch), vielfach kürzer zu beweisen als die Originalarbeiten. Zum Schluß sei noch auf das wertvolle Literaturverzeichnis hingewiesen. *Heinr. Tietze.*

Zahlentheorie. Von Kurt Hensel. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1913. (XII u. 356 S.) Brosch. M. 10.—, in Lwd. geb. M. 10.80.

Der Autor wendet in diesem Werk seine Methoden der Reihenentwicklungen, die er zunächst für die Lehre von den algebraischen Körpern ersonnen hat, auf den Körper der gewöhnlichen ganzen Zahlen an. Das Buch enthält daher wenig neue Resultate, dafür aber eine methodische Behandlung des Gebiets, die zugleich die trefflichste Vorbereitung für das Studium jenes höheren Gebiets bildet, daß in Hensels Theorie der algebraischen Zahlen dargestellt ist.

Im ersten Kapitel werden die Grundgesetze und die Grundbegriffe Körper, Modul, Gruppe, Ring eingeführt, im zweiten die Teilbarkeit der Zahlen besprochen. Im dritten Kapitel beginnt die Hensel eigentümliche Betrachtungsweise des Verhaltens einer beliebigen Zahl einer festen Grundzahl (dem Modul) g gegenüber. Eine, ganze oder gebrochene, Zahl $A = \frac{m}{n}$ heißt für den Bereich von g ganz, wenn sie (in der reduzierten Form) einen zu g teilerfremden Nenner hat, sonst gebrochen. Diese ganzen Zahlen modulo g bilden einen Ring. Sind die Zahlen ε und $\frac{1}{\varepsilon}$ beide ganz, so heißt jede von ihnen eine Einheit. Jede modulo g ganze Zahl A ist einer der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, g-1$$

nach g kongruent, etwa a_0:

$$A = a_0 + g A_1;$$

A_1 ist wieder einer Zahl aus dieser Reihe kongruent, etwa a_1, usw.:

$$A_1 = a_1 + g A_2,$$
$$A_2 = a_2 + g A_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Hieraus folgt rein formal

$$A = a_0 + a_1 g + a_2 g^2 + a_3 g^3 + \ldots = (\text{kurz})\, a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots;$$

die Reihe ist, wenn sie nicht abbricht, was bei positiven absolut ganzen Zahlen A der Fall ist, natürlich nicht im gewöhnlichen Sinne konvergent, sondern sie hat Partialsummen, deren ρ-te der Zahl A nach $g^{\rho+1}$ kongruent ist. So ist z. B.

$$5 = 1{,}01 \quad (2); \qquad \tfrac{1}{3} = 7{,}666\ldots = 7{,}\overline{6} \quad (10); \qquad -1 = 5{,}\overline{5} \quad (6)$$

und es bedeutet z. B. die zweite dieser Aussagen, daß folgende Kongruenzen gelten

$$\tfrac{1}{3} \equiv 7 \quad (10); \qquad \tfrac{1}{3} \equiv 7 + 6 \cdot 10 = 67 \quad (100); \qquad \tfrac{1}{3} = 667 \quad (1000); \ldots$$

Die Partialnummern werden als Näherungswerte der Zahl A bezeichnet.

Alle bisherigen Reihen fallen periodisch aus. Im vierten Kapitel werden nun auch die nicht periodischen als „allgemeine g-adische Zahlen" hinzugenommen. Sie bilden einen Ring R (g). Die Rechengesetze sind dabei dieselben wie bei

Digitized by Google

den Potenzreihen. Zum weiteren Studium dieses Ringes (fünftes Kapitel) ist es wichtig, daß erstens mehrfache Primfaktoren von g durch einfache ersetzt werden können, zweitens die Eigenschaften von $R(PQ)$ (wo P und Q teilerfremd sind) durch die von $R(P)$ und $R(Q)$ beherrscht werden können, so daß weiterhin nur Primzahlen p als Moduli betrachtet zu werden brauchen. Hiezu dient der fundamentale Satz: In $R(PQ)$ gibt es eine Zahl 1_P, die in $R(P)$ gleich 1, in $R(Q)$ gleich 0 ist. Man hat nämlich jetzt

$$A = A \cdot 1_P + A \cdot 1_Q \qquad (PQ);$$

$A \cdot 1_P$ gehört dem Ring $R(P)$, $A \cdot 1_Q$ dem Ring $R(Q)$ an. Man hat also z. B. stets

$$1 = 1_P + 1_Q \qquad (PQ).$$

Ist daher $g = pq \ldots r$ die Primfaktorenzerlegung von g, so folgt

$$A = A_p + A_q + \ldots + A_r \qquad (g),$$

wo $A_p = A\,(p), A = 0\ (q, \ldots, r)$ usw. Dies ist die additive Normalform. Ferner ist

$$A = [1 + (A-1)_p]\ [1 + (A-1)_q] \ldots [1 + (A-1)_r] \qquad (g)$$

weil $(A-1)_p \cdot (A-1)_q = 0 \quad (p), (q), \ldots (r)$ usw. ist; dies ist die multiplikative Normalform.

Ein Ring $R(p)$ mit einem Primzahlmodul ist ein Körper $K(p)$ (sechstes Kapitel). Hier wird nun eine Rangordnung nach der Größe (in übertragenem Sinne) eingeführt: eine Zahl $A = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \ldots$ $(a_\alpha \neq 0)$ heißt um so größer, je größer α ist (dagegen heißen zwei Zahlen mit demselben α von gleicher Größe, Zeichen $\sim$). Die Zahlen A bilden ein nicht-Archimedisches Größensystem. p^α heißt der absolute Betrag von A. Die Definition des Grenzwertes, der unendlichen Reihe usw. liegt jetzt auf der Hand. Weiter (siebentes Kapitel) wird die Variable, die Funktion, die Stetigkeit, die Ableitung definiert, alles formal genau ebenso wie üblich, aber mit durchaus eigenartigen Konsequenzen. Die Funktion $E(x)$, die der Funktionalgleichung $E(x+y) = E(x)\,E(y)$ genügt, heißt Exponentialfunktion, ihre Umkehrung der Logarithmus usw. Diese p-adischen Zahlen haben eine Zahlentheorie (achtes Kapitel).

Es folgt jetzt die Anwendung auf die g-adischen Zahlen im allgemeinen (neuntes Kapitel) und einige speziellere Untersuchungen: die reinen Gleichungen und reinen Kongruenzen (zehntes), das Reziprozitätsgesetz (elftes) und die quadratischen Formen (zwölftes Kapitel).

Ich kann es mir zum Schluß nicht versagen, diejenigen, die eine etwas ausführlichere Übersicht über den Inhalt des Buches wünschen, auf die ausgezeichnete Analyse von E. Cahen im Bulletin des Sciences Math. (2) 38 (1914), 77—85 aufmerksam zu machen. *Schrutka.*

Elementare Algebra. Von E. Netto. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Zweite Auflage. Mit 19 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. (X u. 200 S.) Geh. M. 4.40, in Lwd. geb. M. 5.—

Bis auf kleine Zusätze, die Verbesserung von Druckfehlern und die Hinzufügung einer Widmung durchaus unveränderter Abdruck der vor 10 Jahren erschienenen ersten Auflage. *Schrutka.*

Digitized by Google

Leçons sur la Theorie des Nombres. (Modules. Entiers algebriques. Reduction continuelle.) Par A. Chatelet. Paris, Gauthier-Villars, 1913. (X et 156 p.) Fr. 5.50.

Die Anzahl der französischen Werke über Zahlentheorie ist nicht groß und war bis vor kurzem noch viel geringer; alle aber haben für den deutschen Leser einen ganz eigenen Reiz durch die eigentümliche Auffassung und Anordnung des Stoffes. Dies trifft auch bei diesem Buche zu. Es soll der Absicht des Autors nach ein Supplement zu den größeren Werken von Serret, Tannery, Borel-Drach, Cahen usw. bilden, behandelt daher nur gewisse ausgewählte Kapitel. Begonnen wird mit den linearen Transformationen oder, anders ausgedrückt, mit der Theorie der Matrizes. In der Tat wird darauf Wert gelegt, eine Matrix als ein selbständiges Gebilde (eine hyperkomplexe Zahl) erscheinen zu lassen. Die geometrische Ausdrucksweise wird eingeführt und die Grundbegriffe der Minkowskischen Geometrie der Zahlen werden entwickelt. Für Strahldistanz wird der sehr bezeichnete Ausdruck distance generalisée eingeführt. Weiterhin folgt die Theorie der Moduln (im Dedekindschen Sinne), gleich in geometrischem Gewande, und die Theorie des größten gemeinsamen Teilers für gewöhnliche ganze Zahlen, dann die Theorie der algebraischen Zahlen und die Teilbarkeitsgesetze für die ganzen algebraischen Zahlen. Hiezu wird in der Note II der Körper $K(\sqrt{82})$ als Beispiel durchgerechnet. Die letzten Kapitel führen tiefer in die Theorie der algebraischen Zahlen hinein; es wird die Hermitesche „reduction continuelle" und ihre Anwendung auf die Basis eines algebraischen Körpers und die Äquivalenz der Ideale behandelt. Note I enthält einiges über die „fonctions quasi-periodiques" von Esclangon, Funktionen, die ihre Werte zwar nicht unendlich oft wieder annehmen (wie die periodischen Funktionen), wohl aber ihnen unendlich oft beliebig nahe kommen; Note III entwickelt den Begriff der Kongruenz nach einem Ideal. *Schrutka.*

Abriß der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen. Von Paul Mansion. Nach der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig, B. G. Teubner, 1913. 44 S. Geh. M. 1.25.

Die Hyperbelfunktionen werden durch die Ausdrücke $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, usw. definiert und mit *sh*, *ch*, *th*, *coth*, *sech*, *cosech* bezeichnet. (Diese kurzen Bezeichnungen sind in einer Theorie der Hyperbelfunktionen wohl am Platz, sonst aber geht es wohl nicht an, den Hyperbelfunktionen einfachere Zeichen zu geben, als den um so viel wichtigeren Kreisfunktionen.) Aus diesen Definitionen ergeben sich die Rechenregeln. Numerische Angaben sind aus einer Tabelle zu entnehmen, die nach Hoüels Gedanken die Kreisfunktionen und die hyperbolische Amplitude enthält. Die Umkehrungen werden mit *argch* usw. bezeichnet. Die geometrische Deutung der Hyperbelfunktionen wird nachträglich angegeben. Weiters folgen Infinitesimalformeln und Reihen. Anwendungen werden gegeben auf die reduzierte kubische Gleichung, auf die parametrische Darstellung der Hyperbel $x = a\,ch\,t$, $y = b\,sh\,t$, auf die Kettenlinie, die Traktrix, die pseudosphärische Fläche und die Parabel in der parametrischen Form $y = p\,sh\,t$, $x = \frac{1}{2}p\,sh^2\,t$, wo z. B. $ds = p\,ch^2\,t\,dt$ wird, endlich auf die Lobatschewskische Trigonometrie. Die rein analytische Theorie der Kreis-

Digitized by Google

funktionen im Anhang folgt Lipschitz (Lehrbuch der Analysis II, § 14): der imaginäre Teil von $2^n \cdot \sqrt[2^n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = 2^n\left(\cos\frac{\varphi}{2^n} + i\sin\frac{\varphi}{2^n}\right)$ wird $i\varphi$ für $\lim n = \infty$, liefert also den Arkussinus. *Schrutka.*

Differential- und Integralrechnung. Von W. Franz Meyer. Erster Band. Differentialrechnung. Sammlung Schubert X. Zweite, durchgesehene und erweiterte Auflage. Berlin und Leipzig, G. J. Göschen, 1912. (XV u. 418 S.) In Lwd. geb. M. 9.—.

Das Erscheinen einer zweiten Auflage nach 11 Jahren zeigt, daß das Buch seinen Leserkreis gefunden hat. Die Änderungen gegen die erste Auflage sind nicht sehr weitgehend. Ich beschränke mich daher darauf, im folgenden auf einige Einzelheiten einzugehen, die mir bei der Lektüre Anlaß zu Bemerkungen gegeben haben.

Nr. 7 (S. 7). a^0 als Symbol für $\lim_{n=\infty} a^{\frac{1}{n}}$ ist wohl kaum aufrecht zu erhalten; die darauffolgende Bemerkung über die Bedeutung von $a^0 = 1$ in der elementaren Arithmetik zeigt deutlich, daß hier eine Bezeichnung in zwei Bedeutungen gebraucht ist. Daß der Zahlenwert derselbe ist, kann an der logischen Inkorrektheit nichts ändern. — Nr. 10 (S. 10) heißt es: „Ein festes Intervall . . . möge . . . in eine stets wachsende Anzahl von Teilintervallen zerlegt werden; dies ist nur so möglich, daß mindestens eines dieser Teilintervalle unter jede Grenze sinkt." Man kann eigentlich nicht sagen, daß bei diesem Prozeß mit einem Teilintervalle etwas geschehe, da sie ja nicht individualisiert sind. Außerdem liegt der viel weiterreichende Schluß, daß, um mit Kowalewski zu reden, „fast alle" unendlich klein werden, so nahe, daß er wohl angeführt werden könnte, auch wenn er hier nicht verwertet wird. — Nr. 14 (S. 16). Die Kurve der Figur ist keine Parabel, sie ist sogar unsymmetrisch. — Nr. 15 (S. 18, Anmerkung*). Hier, bei der Quadratur der Parabel, ist die Summenformel $\lim_{n=\infty}(1 + g + g^2 + \ldots + g^{n-1}) = \lim\frac{1-g^n}{1-g} = \frac{1}{1-g}$ auf den Fall $g = k^3 = \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^3$ nicht deshalb nicht anwendbar, weil $\lim g = 1$ ist, sondern weil sie überhaupt über den Fall, daß g von n abhängt, nichts aussagt. — Nr. 15 (S. 19, Z. 14—17). Die Einteilung des Intervalls $a\ b$ in $a,\ a\sqrt[n]{\frac{b}{a}},\ a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^2 \ldots$ versagt wohl für $a = 0$, aber nicht, wie hier behauptet wird, für $\lim a = 0$. — Nr. 20 (S. 28). Ein Winkel wird hier (vom Standpunkt der elementaren Geometrie aus) als „ein nach Graden, Minuten und Sekunden eingeteilter Flächenraum" bezeichnet. — Nr. 21 (S. 31). Um die Volumsbestimmung für das abgeplattete Rotationsellipsoid aus der für das verlängerte zu gewinnen, braucht man nicht die Halbaxen a und b zu vertauschen, sondern nur die Beschränkung $a > b$ aufzuheben. — Nr. 22 (S. 33). Der Ausdruck „gegenseitige Abnahme" (von δ und $\sin\delta$) ist unverständlich und erklärt sich nur aus der ersten Auflage, wo „Verhältnis der gegenseitigen Abnahme" (statt „gegenseitiges Verhältnis der Abnahme") stand. — Nr. 24 (S. 37). Die Erklärung: „die Gerade, die P mit einem beliebig nahe an P liegenden Kreispunkte verbindet", geht wohl nicht an. — Nr. 33 (S. 55). Der Ausdruck „Tragweite" (der

Digitized by Google

Methoden zur Berechnung von e) verdeckt ein wenig den Umstand, daß man jede Genauigkeit erreichen kann und nur die aufzuwendende Mühe je nach den Methoden verschieden groß ist. — Nr. 60 (S. 104). Es wird hier (bei den Ableitungen inverser Funktionen) nicht genügend deutlich, daß $\lim \triangle x = 0$ und $\lim \triangle y = 0$ gleichwertig sind. — Nr. 79 (S. 144, Anmerkung*). Der Ausdruck „mit dr, wie mit einer endlichen Größe, dividiert" dürfte, nach den Erklärungen des Differentialquotienten, wie sie hier gegeben worden sind, nicht recht verständlich sein. — Nr. 89 (S. 189). Die Fassung „es soll sich unter den sämtlichen Teilintervallen von (a, b) wenigstens eines befinden, das unter eine vorgegebene . . . Grenze g heruntersinkt" ist nicht glücklich, da sie den Gedanken an eine Veränderlichkeit der Intervalle nahelegt, während doch die Teilungspunkte die Nullstellen einer gegebenen Funktion sind. — Nr. 89 (S. 190). Die hier vorgeschlagene Bezeichnung „Zwischenwert" statt Mittelwert wäre sehr zu empfehlen. — Nr. 97 (S. 204). Beispiel (1). Es fehlt der Hinweis darauf, daß $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$ bei der Differentiation von $\sin x$ bereits vorausgesetzt wird. — Nr. 105, 4. Aufgabe (S. 225). Die Existenz eines kleinsten Dreiecks, das von einer Geraden durch einen festen Punkt aus einem Winkelraum ausgeschnitten wird, läßt sich auch ohne Hinzuziehung der „uneigentlichen" Dreiecke mit zwei parallelen Seiten erschließen, wenn man die Dreiecke, deren Seiten nahezu parallel sind, betrachtet. — Nr. 112 (S. 262). Hier wird eigens bewiesen (auf 22 Zeilen), daß bei der Entwicklung des Sinus $|R_n|$ nicht $\leqq$, sondern $< \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ist, was doch nebensächlich ist. *Schrutka.*

Lehrbuch der Physik. Von O. D. Chwolson. 4. Bd., 2. Hälfte, 1. Abt. Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1913, geheftet M. 7.50. 446 S.

Von dem ausgezeichneten Lehrbuch, dessen Vollendung schon lange herbeigewünscht wird, ist nun wieder ein Teil erschienen. Es ist dies der vorletzte, so daß der Schluß wohl nicht mehr lange auf sich warten lassen wird. Der vorliegende Teil beginnt mit der Fortsetzung des „konstanten magnetischen Felds". Es folgen „Methoden und Resultate der Messungen von elektrischen Widerständen", „der Stromstärke, elektromotorischen Kraft und magnetischen Feldintensität". Die Überschrift „Veränderliches Magnetfeld" faßt neben einer Einleitung über Vektoranalysis die „Induktion", „Maxwellsche Theorie", „die Grundlagen der Elektronentheorie" und „das Relativitätsprinzip" zusammen. Wir haben also hier eine Darstellung der modernen Physik, die allen jenen Lesern hochwillkommen sein wird, welche sich das Studium von Spezialwerken versagen müssen. *G. J.*

Die Entwickelung des Temperaturbegriffes im Laufe der Zeiten. Von Kristine Meyer. Aus dem Dänischen übersetzt von Irmgard Kolde, mit einem Vorwort von E. Wiedemann. „Die Wissenschaft", Bd. 48, Braunschweig 1913, geb. M. 4.80.

Mit rühmenswertem Fleiß und feinem Verständnis für das Werden der Probleme hat sich die Verfasserin der Aufgabe unterzogen, eine Entwicklungsgeschichte des Temperaturbegriffes zu geben. Es liegt in der Natur der Sache, daß eine solche Geschichte nicht losgelöst werden kann von der Geschichte

Digitized by Google

der Wärmelehre überhaupt; und so befaßt sich denn auch das vorliegende Buch nicht bloß mit dem Temperaturbegriff, sondern auch mit der genaueren Darstellung jener Wärmetheorien, die dem jeweiligen Temperaturbegriff zu Grunde lagen.

Es ist ein Vergnügen, den anschaulichen Ausführungen der Verfasserin zu folgen, die uns bis in den aristotelischen Gedankenkreis hineinleiten. Wir hören von dem uralten Begriffe der Antiperistasis, von primum frigidum, vom pulsilogium des Sanktorius. Wir sehen, wie die ursprünglichen, haltlosen Spekulationen über die Wärme durch die sich stetig verfeinernden Temperaturmesser immer klarer und richtiger werden, wie die Spekulationen umgekehrt auf die Klärung und Verschärfung des Temperaturbegriffes befruchtend einwirken und wie schließlich das stolze Gebäude der neueren Wärmetheorie durch den umfassenden Temperaturbegriff von Lord Kelvin gekrönt wird.

Ich stehe nicht an, das Buch, welches vielfach ganz neue Quellen benutzt und durch viele Originalabbildungen geschmückt ist, als eine überaus wertvolle Ergänzung zu Ernst Machs „Prinzipien der Wärmelehre" zu bezeichnen.

Wilhelm Michl.

Die moderne theoretische Physik und der Äther. Von F. Schuster. Karlsruhe, 1913, geheftet M. 1.—.

Die vorliegende Broschüre ist eine Erwiderung auf einige Einwürfe, die im naturwissenschaftlichen Vereine zu Karlsruhe gegen verschiedene Ansichten des Verfassers erhoben worden sind. Sie ist vor allem eine Kampfschrift, die sich nicht an die Fachwelt, sondern an das gebildete Publikum wendet, dessen Urteil der Verfasser außerordentlich hoch einzuschätzen scheint. In den beiden ersten Abschnitten wird versucht, den Leser an der Hand der gegenwärtigen Anschauungen über den Lichtäther zu überzeugen, daß die moderne Physik auf dem besten Wege sei, unserer Naturerkenntnis den sicheren Boden zu entziehen, während die folgenden Kapitel einen Beitrag zu der „so dringend nötigen Erkenntnis der Naturvorgänge" leisten wollen. Allein uns will scheinen, als ob sich der Verfasser das Problem des Äthers und der Gravitation denn doch etwas zu einfach vorstellt. Der Äther ist nämlich nach seiner Anschauung nichts anderes als die Gesamtheit der in den Weltraum im Zustande äußerster Verdünnung hineinreichenden atmosphärischen Hüllen der Weltkörper, also ein Gas.

Es würde zu weit führen, die Darlegungen Schu ters einer fachmännischen Kritik zu unterziehen um so mehr, als diese Kritik ja nach des Verfassers Wunsch dem gebildeten Publikum vorbehalten bleiben muß.

Wilhelm Michl.

Leçons sur la dynamique des systèmes matériels. Par E. Delassus. Paris 1913.

In der Darstellung der klassischen Mechanik machen die Franzosen häufig einen Unterschied zwischen der mécanique rationnelle und der mécanique analytique. Während die erstere das Lehrgebäude der Mechanik auf mehrere Fundamentaltheoreme gründet, führt die letztere alle Probleme auf die Gleichungen von d'Alembert zurück.

Delassus stellt sich die Frage, warum man im Unterricht gerade immer von der mécanique rationnelle ausgeht, um die rein analytische Behandlung der Mechanik erst am Schlusse oft nur flüchtig abzutun. Wiewohl er zugesteht, daß

Digitized by Google

die historische Entwicklung der Mechanik die gegenwärtige Lehrmethode einigermaßen rechtfertige, weist er den didaktischen Einwand, es sei die rein analytische Behandlung für den Anfänger mit viel zu großen Schwierigkeiten verknüpft, als unberechtigt und im Widerspruch stehend mit seinen eigenen Erfahrungen als akademischer Lehrer zurück.

Wie aber das Ziel, der jungen Physiker nach rein analytischen Methoden in die Lehren der Dynamik der Massensysteme einzuführen, erreicht werden könne, das hat der Verfasser in dem vorliegenden Werke in mustergültiger Weise dargetan. Nach einigen Ergänzungen zur Vektorenrechnung und Kinematik sowie allgemeinen Erörterungen über die Massensysteme wird der Übergang zu den Bewegungsgleichungen holonomer und nicht holonomer Systeme gemacht. Den Kapiteln über die Integration der Bewegungsgleichungen folgt die Behandlung verschiedener spezieller Probleme. Den Schluß bildet eine Reihe von Anwendungen.

Das Werk von Delassus verdient es in hohem Maße, von Lehrern und Studierenden der Mechanik beachtet zu werden. *Wilhelm Michl.*

Allgemeine und physikalische Chemie. Von H. Kaufmann. Sammlung Göschen, Nr. 71 u. 698, Leipzig 1913, jeder Teil geb. M. —.90.

Die Sammlung Göschen brachte bereits vor mehreren Jahren ein Bändchen über physikalische Chemie aus der Feder Rudolphis. Daß verhältnismäßig kurze Zeit darauf das vorliegende Doppelbändchen über denselben Gegenstand erschien, ist nur ein Beweis für den außergewöhnlichen Aufschwung, den die physikalische Chemie in den letzten Jahren erfahren hat. Die neue Darstellung berücksichtigt denn auch, soweit dies der zugemessene Raum gestattet, die neueren und neuesten Forschungsergebnisse in weitestgehendem Maße. Nur das Kapitel über die Radioaktivität scheint mir im Vergleich zu deren Bedeutung für die physikalische Chemie etwas zu knapp und ungenau geraten zu sein. Die Darlegungen des Verfassers, die durchwegs leichtfaßlich und durchsichtig gehalten sind, werden mit elementaren Mitteln durchgeführt. Der I. Teil behandelt die Lehre von den chemischen Grundbegriffen, von den Aggregatzuständen und von den chemischen Umwandlungen, der II. die Lehre von den chemischen Konstitution, die Thermochemie, Elektrochemie, Photochemie und Atomtheorie. Wer sich in kurzer Zeit gründliche Vorstellungen über die Ergebnisse der allgemeinen und physikalischen Chemie erwerben will, dem sei die Kauffmannsche Darstellung aufs beste empfohlen. *Wilhelm Michl.*

Erklärung: Auf Verlangen des Herrn C. Rodenberg in Hannover erkläre ich, daß sich meine Bemerkung über Isophotenkonstruktion (Monatsh. 1914, Literaturber. S. 10) nur auf den Gedanken bezog, die Spurkegelschnitte einer Schar von Stufenkegeln gleicher wahrer oder scheinbarer Beleuchtung zu benützen, während Herr Rodenberg das Verfahren durch Einführung eines „gedruckten Maßstabes“ allgemein brauchbar und praktisch wertvoll machte, so daß es mit vollem Rechte als „Rodenbergsches Verfahren“ zu bezeichnen ist. *Th. Sch.*

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Albert Anton, Über Haupttangenten spezieller windschiefer Regelflächen . . 163
Baumgartner Ludwig, Beiträge zur Theorie der ganzen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen 3
Braude L., Über Mannheimsche Flächen 71
Dintzl E., Über die Entwicklungskoeffizienten der elliptischen Funktionen, insbesondere im Falle singulärer Moduln 125
Ernst Paul, Die Mannheimsche Kurve von Raumkurven 337
Hahn Lilly, Über Zerlegungen des n-dimensionalen Raumes 303
Holzberger Hermann, Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze 179
Mack Karl, Die stereographische Projektion eines nullteiligen Kreises . . . 341
Müller Emil, Dr. Ludwig Tuschel † 177
Nielsen Niels, Über die von v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen 152
— Über die Verallgemeinerungen der von A. v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen 328
Preisausschreibung für den internationalen Mathematikerkongreß in Stockholm 177
Rulf Friedrich, Systeme von Größen mit zwei Einheiten und nicht notwendig assoziativer Multiplikation 267
Schwendenwein Hugo, Ein Satz über Summen Jacobi-Legendrescher-Zeichen 171
Theisinger Leopold, Einige geometrische Studien 321
Weitzenböck Roland, Die Drehungsinvarianten einer Fläche zweiter Ordnung 89
— Die Drehungsinvarianten eines linearen Komplexes 121

Literaturberichte.

Alt E., Das Klima 37
Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1914 49
Arnoux Gabriel, Essai de géometrie analytique modulaire à deux dimensions 17
Astronomischer Kalender für 1914 49
Auerbach Felix, Physik in graphischen Darstellungen 7
Auerbach F. und *Rothe R.*, Taschenbuch für Mathematiker und Physiker . 13
Bauer E., Blanc A., Bloch E., Curie P., Debierne A., Dunoyer L., Langevin P., Perrin J., Poincaré H., Weiß P., Société Française de Physique 37
Block Walter, Maße und Messen 38

Digitized by Google

Seite

Bolte F., Leitfaden für den Unterricht in der Physik 5
Börnstein R., Experimentalphysik 4
— Leitfaden der Wetterkunde 40
Böttger H., Dr. Friedr. Schoedlers „Buch der Natur" 4
Brill A., Das Relativitätsprinzip 3
Bürklen O. Th., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. — Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes 26
Chatelet A., Leçons sur la Theorie des Nombres 60
Chwolson O. D., Lehrbuch der Physik 62
Cohn Emil, Physikalisches über Raum und Zeit 56
Dalwigk F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie 11
Delassus E., Leçons sur la dynamique des systèmes matériels 63
Dressel Ludwig, Elementares Lehrbuch der Physik 35
Drude Paul, Lehrbuch der Optik 6
Fagnano C., Opere 33
Fehr H., Commission internationale de l'Enseignement mathématique . . . 48
Festschrift, Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag 30
Fischer B., Determinanten 25
Föppl A., Theorie der Elektrizität 12
Fricke R. und *Klein F.*, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen 34
Fuß Konrad und *Hensold Georg*, Lehrbuch der Physik 5
Geitel H., Die Bestätigung der Atomlehre durch die Radioaktivität 37
Girard Pierre, La pression osmotique et le mécanisme de l'osmose . . . 9
Großmann Marcel, Einführung in die darstellende Geometrie 12
Grüttner Adalbert, Die Grundlagen der Geometrographie 43
Hack, Wahrscheinlichkeitsberechnung 26
Hädicke Gustav, Einführung in die neuere Geometrie 42
Häfner Philipp, Einführung in die Differential- und Integralrechnung für höhere Techniker 20
Hartmann Otto, Astronomische Erdkunde 27
Hauck Alfred, Guido Haucks Vorlesungen über darstellende Geometrie . . 42
Hermite Ch., Oeuvres III 33
Henkel Otto, Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien 39
Hensel Kurt, Zahlentheorie 58
Hupfeld H., Praktische Physik für Oberlyzeen 34
Jacob J., Arithmetik für die 6. Klasse der Gymnasien 16
Janet P., Allgemeine Elektrotechnik 3
Jarosch J., Methodik des Unterrichts in der darstellenden Geometrie und im geometrischen Zeichnen 10
Junker Fr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung . . 26
Kähler Karl, Luftelektrizität 40
Kaufmann H., Allgemeine und physikalische Chemie 64
Klein F., Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland 44
Knopp Konrad, Funktionentheorie I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen 14

Digitized by Google

Seite

Kowalewski G., Einführung in die Infinitesimalrechnung mit einer historischen Übersicht 14
Kühtmanns Rechentafeln 18
Lecher Ernst, Lehrbuch der Physik für Mediziner und Biologen 13
Liebmann Heinrich, Nichteuklidische Geometrie 51
Lietzmann W., Math. Kongreß in Chicago 49
Lilienthal R., Vorlesungen über Differentialgeometrie 41
Lindow M., Differential- und Integralrechnung mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik 15
Lodge Oliver, Der Weltäther 56
Mansion Paul, Abriß der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen 60
Markau K., Die Telephonie ohne Draht 6
Martus H. C. E., Astronomische Erdkunde 27
Meyer Franz, Differential- und Integralrechnung 61
Meyer Kristine, Die Entwicklung des Temperaturbegriffes im Laufe der Zeiten 62
Meyer Gustav W., Maschinen und Apparate der Starkstromtechnik 6
Meth Paul, Theorie der Planetenbewegung 38
Minkowski Hermann, Gesammelte Abhandlungen 30
Močnik-Zahradniček, Arithmetik und Algebra für die Oberstufe der Mittelschulen 24
Mönkemeyer R., Vollständige vierstellige Logarithmentafel zum Gebrauch für Schule und Praxis 15
Muir Thomas, The theory of determinants in the historical order of development 19
Müller Felix, Gedenktagebuch für Mathematiker 15
Nernst W., Traité de chimie générale 11
Netto N., Elementare Algebra 59
Neuendorff R., Praktische Mathematik 21
Nielsen Niels, Théorie des fonctions métasphériques 28
— Elemente der Funktionentheorie 32
Oppenheim S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeiten 39
— Probleme der modernen Astronomie 55
Orlich Ernst, Die Theorie der Wechselströme 56
Perron Oskar, Die Lehre von den Kettenbrüchen 57
Poincaré H., Leçons sur les hypothèses cosmogoniques professées à la Sorbonne 8
— Letzte Gedanken 54
Ramsey A. S., A treatise on hydromechanics 13
Rengade, Jolibois, Broniewski, Conférences sur les alliages 10
Rotth A., Grundlagen der Elektrotechnik (Aus Natur und Geisteswelt, 391. Bändchen) 37
Rose Max, Einleitung in die Funktionentheorie 25
Rosenberg K., Beiträge zur Stereoskopie und zur stereoskopischen Projektion 3
Schiffner F., Raumlehre für die Unterstufe der Realschulen 21
— Planimetrie und Stereometrie 16
Schlömilch O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln . . 15
Schirmer Alfred, Der Wortschatz der Mathematik nach Alter und Herkunft untersucht 15

Digitized by Google

Seite

Schmid Th., Erklärung 64
Schoy Carl, Vermischte Aufgaben der mathematischen Geographie und sphärischen Astronomie 28
Schriften des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 50
Schuster F., Die moderne theoretische Physik und der Äther 63
Simon Max, Analytische Geometrie des Raumes 26
Staekel P., Nachruf auf P. Treutlein 49
Suppantschitsch R., Mathematisches Unterrichtswerk 21
Sylvester James Joseph, The collected mathematical papers 29
Tannery Jules, Leçons d'arithmétique théorique et pratique 32
Timerding H. E., Die Fallgesetze 38
Travniček J., Geometrie der Ebene 16
Treven Karl, Der Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers und des Präzisionsschiebers 20
Umlauf K., Arbeiten des Bundes für Schulreform 49
Vivanti G., Esercizi di analisi infinitesimale 14
Volkmann Paul, Einführung in das Studium der theoretischen Physik . . . 40
— Fragen des physikalischen Schulunterrichtes 41
Wieleitner H., Schnee und Eis der Erde 35
Windmüller K., Meßmethoden zur Bestimmung von Stromstärke, Spannung und Widerstand bei Gleichströmen 4
Zacharias Max, Einführung in die projektive Geometrie 43
Zoretti Ludovico, Leçons sur le prolongement analytique 31
— Leçons de Mathématiques générales 52

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PERIODICAL

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

RENEWED BOOKS ARE SUBJECT TO
IMMEDIATE RECALL

Library, University of California, Davis
Series 458A

Digitized by Google

PERIODICAL

No 536781

QA1
M74
v.25

Monatshefte für
Mathematik und
Physik.

PHYSICAL
SCIENCES
LIBRARY

Call Number:

536781
Monatshefte für
Mathematik und
Physik.

QA1
M74
v.25

PHYSICAL

LIBRARY
TY OF CALIFORNIA
DAVIS

Digitized by Google

Digitized by Google